

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА  
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ  
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ  
ІМ. Я.С. ПІДСТРИГАЧА

На правах рукопису

**ТУРЧИН ІГОР МИКОЛАЙОВИЧ**

УДК 539.3

**МЕТОД ПОЛІНОМІВ ЛАГЕРРА В НЕСТАЦІОНАРНИХ  
ЗАДАЧАХ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ТА ПРУЖНОСТІ  
ШАРУВАТИХ ТІЛ**

01.02.04 - механіка деформівного твердого тіла

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора  
фізико-математичних наук

Науковий консультант  
**Сулим Георгій Теодорович,**  
доктор фіз.-мат. наук, професор

ЛЬВІВ - 2017

## ЗМІСТ

|                                                                                                                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ВСТУП                                                                                                                                                                       | 6  |
| 1. ОГЛЯД ОСНОВНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ЗА ТЕМОЮ РОБОТИ.....                                                                                                                           | 18 |
| Висновки до розділу 1 .....                                                                                                                                                 | 29 |
| 2. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПОЛІНОМІВ<br>ЛАГЕРРА ДО ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ І<br>ТЕРМОМЕХАНІКИ.....                                                  | 30 |
| 2.1. Наближення функцій поліномами Лагерра.....                                                                                                                             | 30 |
| 2.1.1. Визначення коефіцієнтів розкладу за Лагерром із задачі<br>Коші .....                                                                                                 | 30 |
| 2.1.2. Ряд за поліномами Лагерра та інтегральне перетворення<br>Лапласа .....                                                                                               | 36 |
| 2.2 Застосування методу поліномів Лагерра до нестационарного<br>рівняння теплопровідності та хвильового рівняння.....                                                       | 38 |
| 2.2.1. Зведення початково-крайової задачі теплопровідності до<br>послідовності крайових задач .....                                                                         | 38 |
| 2.2.2. Фундаментальні розв'язки трикутних послідовностей<br>звичайних диференціальних рівнянь у прямокутній та полярній<br>системах координат в одновимірному випадку ..... | 41 |
| 2.2.3. Нестационарна одновимірна задача теплопровідності для<br>багатошарової плити.....                                                                                    | 44 |
| 2.2.4. Застосування методу поліномів Лагерра до хвильового<br>рівняння .....                                                                                                | 47 |
| 2.2.5. Інтегральні подання фундаментальних розв'язків .....                                                                                                                 | 49 |
| 2.3 Метод рядів Неймана при розв'язуванні послідовностей парних<br>інтегральних рівнянь.....                                                                                | 51 |
| 2.3.1. Метод рядів Неймана при розв'язуванні класичних парних<br>інтегральних рівнянь.....                                                                                  | 51 |

|                                                                                                                                                                                                       |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.3.2 Узагальнення методу рядів Неймана на трикутну послідовність парних інтегральних рівнянь та умови квазірегулярності одержаних послідовностей безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь ..... | 54         |
| Висновки до розділу 2 .....                                                                                                                                                                           | 60         |
| <b>3. КВАЗІСТАТИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ПЛОСКО-ШАРУВАТИХ ТІЛ І СЕРЕДОВИЩ.....</b>                                                                                                                   | <b>62</b>  |
| 3.1 Нестационарні двовимірні задачі теплопровідності для плоско-шаруватих тіл і середовищ .....                                                                                                       | 62         |
| 3.1.1 Нестационарна осесиметрична задача теплопровідності для плоскошаруватої плити .....                                                                                                             | 62         |
| 3.1.2 Визначення нестационарного температурного поля в шаруватому півпросторі в плоскому випадку.....                                                                                                 | 72         |
| 3.2 Визначення напружено-деформованого стану плоско-шаруватих тіл .....                                                                                                                               | 77         |
| 3.3 Числові розрахунки термонапруженого стану в шаруватих тілах .....                                                                                                                                 | 85         |
| 3.3.1 Напружено-деформований стан в багат шарових тілах.....                                                                                                                                          | 85         |
| 3.3.2. Числовий аналіз термонапруженого стану в тілах з покриттями.....                                                                                                                               | 90         |
| 3.4 Квазістатична задача термопружності для півсмуги з покриттям.....                                                                                                                                 | 99         |
| Висновки до розділу 3 .....                                                                                                                                                                           | 109        |
| <b>4. ОСЕСИМЕТРИЧНА КВАЗІСТАТИЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ РАДІАЛЬНО-ШАРУВАТОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ТІЛА .....</b>                                                                                         | <b>110</b> |
| 4.1 Нестационарна осесиметрична задача теплопровідності для радіально-шаруватого циліндричного тіла.....                                                                                              | 110        |
| 4.2 Квазістатична задача термопружності для радіально-шаруватого циліндричного тіла.....                                                                                                              | 122        |
| 4.3 Числові результати.....                                                                                                                                                                           | 132        |
| 4.4 Квазістатична задача термопружності для циліндричного тіла, виготовленого з функційно-градієнтного матеріалу .....                                                                                | 135        |

|                                                                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Висновки до розділу 4 .....                                                                                            | 139 |
| 5. ЗМІШАНІ КВАЗІСТАТИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ З<br>ПОКРИТТЯМИ .....                                           | 140 |
| 5.1 Квазістатичні напруження в півпросторі з покриттям при змішаних<br>умовах нагрівання 1-3-го роду.....              | 140 |
| 5.2 Квазістатична задача термопружності для двошарової плити при<br>змішаних умовах нагрівання 2-3-го роду. ....       | 149 |
| 5.3 Змішана квазістатична задача термопружності для півбезмежної<br>плити із двостороннім покриттям. ....              | 162 |
| Висновки до розділу 5 .....                                                                                            | 174 |
| 6. ДИНАМІЧНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ З ПЛОСКО-<br>ПАРАЛЕЛЬНИМИ ГРАНИЦЯМИ РОЗДІЛУ .....                         | 175 |
| 6.1. Динамічна задача для прямокутної пластинки.....                                                                   | 175 |
| 6.2. Нестационарні коливання шаруватої плити.....                                                                      | 184 |
| 6.3. Динамічна осесиметрична задача теорії пружності для шаруватого<br>півпростору .....                               | 196 |
| Висновки до розділу 6 .....                                                                                            | 203 |
| 7. НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ РАДІАЛЬНО-ШАРУВАТИХ ТІЛ<br>ЦИЛІНДРИЧНОЇ ФОРМИ.....                                          | 204 |
| 7.1. Одновимірні динамічні задачі теорії пружності для тіл із системою<br>циліндричних поверхонь відбиття .....        | 204 |
| 7.1.1. Нестационарні коливання системи концентричних циліндрів .....                                                   | 204 |
| 7.1.2. Нестационарні коливання простору із циліндричною<br>вкладкою .....                                              | 214 |
| 7.2. Динамічна задача теорії пружності для багат шарового циліндра<br>при осесиметричному локальному навантаженні..... | 220 |
| 7.2.1. Розповсюдження пружних хвиль у пружному просторі із<br>циліндричною порожниною.....                             | 220 |

|                                                                                                          |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.2.2 Побудова рекурентного розв'язку динамічної двовимірної задачі<br>для багат шарового циліндра ..... | 226 |
| 7.2.3. Числовий аналіз .....                                                                             | 235 |
| Висновки до розділу 7 .....                                                                              | 237 |
| ВИСНОВКИ.....                                                                                            | 238 |
| СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ .....                                                                         | 241 |
| ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ РОБОТИ .....                                                        | 270 |

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Композиційні, градієнтні і, зокрема, шаруваті матеріали широко використовуються в сучасній інженерній практиці. Їх важливою особливістю є можливість поєднання в одній структурі різних за технологічним призначенням матеріалів, що дає змогу наділити конструкційний елемент оптимальним спектром необхідних властивостей (теплоізоляційних, вологовідштовхуючих, корозійностійких, тощо) за збереження належної міцності та формостабільності. Проте, поряд з багатьма технічно важливими перевагами композиційні матеріали мають ряд суттєвих недоліків, пов'язаних із тим, що часто фізико-механічні властивості окремих компонент погано узгоджені з погляду механічної взаємодії, а це може призводити до специфічних видів руйнування (розшарування, місцевих розривів, порушення адгезії, тощо). Особливо це актуально для випадків, коли зазначені матеріали перебувають у змінюваних умовах теплового чи силового навантаження, урахування якого призводить до необхідності розгляду відповідних квазістатичних чи динамічних задач.

Одним із найпоширеніших методів дослідження фізико-механічних полів у композитних структурах є гомогенізація їхніх властивостей за одною або декількома координатами із подальшим вивченням їхньої поведінки, як гіпотетично однорідних структур. Такий підхід дає змогу істотно спростити загальну постановку задачі і використати відомі методи досліджень фізико-механічних полів в однорідних тілах. Проте, в межах такого підходу, зазвичай, не вдається достовірно визначити якісні та кількісні характеристики фізико-механічних процесів у композиті поблизу поверхонь поділу матеріалів, зумовлені його неоднорідністю та, особливо, високою геометричною та фізико-механічною контрастністю складових.

Інший підхід, який враховує внутрішню неоднорідність та взаємодію окремих складових шаруватого тіла призводить до розгляду окремих задач для кожного елементу композита з подальшим урахуванням умов спряження. При застосуванні цього підходу вдається врахувати реальний стан в кожному елементі

та визначити особливості трансформації фізико-механічних полів на поверхнях розділу. На сьогодні досить ґрунтовно вивчені стаціонарні процеси в таких тілах, проте в сучасній літературі практично відсутні синтезуючі аналітичні методи, які би дали можливість вирішити подібну проблему у випадку нестаціонарного процесу (квазістатичного чи динамічного) від математичного моделювання до здійснення достовірного кількісного та якісного аналізу, який міг би стати основою для тестування нових та удосконалення існуючих числових методів. Крім того, практично недослідженими залишаються надзвичайно важливі у можливостях практичного застосування випадки, коли математичне моделювання процесу нагрівання чи теплової взаємодії елемента конструкції із зовнішнім середовищем зводиться до крайових умов різного роду.

У зв'язку з цим актуальною є розробка нових високопродуктивних аналітичних та аналітико-числових методів дослідження перехідних, а відтак суто нестаціонарних процесів у неоднорідних тілах, викликаних змінюваними в часі, в тому числі мішаного типу, тепловими та силовими навантаженнями, які реально відображають технологічні умови виготовлення і експлуатації таких об'єктів, а також дослідження із забезпеченням довільної прогнозованої точності особливостей зміни нестаціонарних полів температур та напружено-деформованих станів в неоднорідних тілах.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційна робота виконана в межах наукових бюджетних тем «Задачі динамічної та квазістатичної термопружності для структурно-неоднорідних тіл і дослідження зв'язаних термомеханічних процесів при фрикційному контакті» (№ д/р 0199U003622, 1999-2001 рр.), «Некласичні моделі та методи дослідження перехідних процесів у структурно-неоднорідних пружних середовищах» (№ д/р 0102U003570, 2002-2004 рр.), «Нові моделі та методи досліджень термопружних процесів у неоднорідних середовищах із дефектами структури» (№ д/р 0105U002224, 2005-2007 рр.), «Нові моделі та методи досліджень статички, динаміки та міцності структурно-неоднорідних тіл» (№ д/р 0108U004133, 2008-2009 рр.), «Розвиток методів математичного моделювання у механіці структурно-

неоднорідних твердих тіл» (№ д/р 0110U001367, 2010-2011рр.), «Розвиток методів математичного моделювання у механіці неоднорідних твердих тіл з тонкими дефектами структури» (№ д/р 0112U001271, 2012-2013 рр.) кафедри механіки Львівського національного університету імені Івана Франка МОН України та «Математичне моделювання та аналітично-чисельне визначення теплового і напруженого станів тіл з урахуванням неоднорідності їх структури» (№ д/р 0110U004821, 2011–2015 рр.) Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України.

**Метою дисертаційної роботи** є розробка методів аналітико-числового аналізу процесу трансформації двовимірних нестационарних температурних полів та напружено-деформованих станів у плоско- та циліндрично-шаруватих тілах і середовищах, зумовленого змінними в часі тепловими та силовими навантаженнями, у тому числі мішаного типу. Досягнення мети роботи передбачає вирішення таких завдань:

- із використанням інтегрального перетворення Лагерра розробити метод побудови розв'язку двовимірних (плоскої та осесиметричної) квазістатичних задач термопружності для плоскошаруватих тіл за довільної кількості складових;
- на основі розробленого методу дослідити перехідний термонапружений стан багат шарових тіл плоскошаруватої структури із високою контрастністю фізико-механічних властивостей та довільними відносною тонкістю складових;
- розробити метод аналітико-числового дослідження перехідного осесиметричного термонапруженого стану в радіально-шаруватих тілах циліндричної форми, зумовленого змінюваним в часі тепловим навантаженням;
- дослідити особливості часової зміни температурних полів та напружено-деформованого стану в радіально-шаруватих тілах за різного виду нестационарного теплового навантаження, кількості, товщини та взаємного розташування складових;
- розробити аналітико-числову методику розв'язування із довільною, наперед заданою точністю квазістатичних задач термопружності для тіл із покриттями при мішаних умовах нагрівання;

- з'ясувати характерні особливості розподілу та часової трансформації температурних полів та термонапруженого стану плоскошаруватих тіл із покриттями, що перебувають в умовах змішаного нагріву різного роду;
- із використанням некласичного формулювання динамічної задачі теорії пружності та методу поліномів Лагерра розробити високопродуктивний математичний апарат для дослідження динамічної реакції плоскошаруватих тіл на високоінтенсивне локальне силове навантаження та апробувати його на двовимірних динамічних задачах теорії пружності, для яких відомі точні розв'язки, одержані іншими методами;
- дослідити на основі розробленого математичного апарату нестационарний процес поширення пружних хвиль в півпросторі з покриттям за осесиметричного та плоского навантаження;
- розробити методику дослідження та дослідити динамічну реакцію радіально-шаруватих тіл і середовищ циліндричної форми на змінюване в часі локальне силове навантаження.

**Об'єктом дослідження** є стратифіковані теплопровідні пружні тіла і середовища з плоско-паралельними та циліндричними границями поділу, на яких виконуються умови ідеального механічного та термомеханічного контакту складових.

**Предметом дослідження** є нестационарні двовимірні термонапружені та напружено-деформовані стани, а також розподіл температур в ізотропних термопружних неоднорідних тілах, зумовлені змінюваними в часі зовнішніми тепловими та силовими навантаженнями.

**Методи досліджень.** Вирішення поставлених у дисертаційній роботі завдань здійснено із використанням відомих моделей та рівнянь квазістатичної термопружності та динамічної теорії пружності із застосуванням методу інтегральних перетворень Фур'є, Ганкеля, та узагальнення методу поліномів Лагерра.

**Наукова новизна отриманих результатів.** В результаті проведених досліджень створено новий високоефективний аналітико-числовий метод

побудови точних розв'язків двовимірних нестационарних задач квазістатичної термopружності та динамічної пружності для тіл і середовищ плоско- та циліндрично-шаруватої структури зі змінними в часі крайовими умовами довільного типу, у тому числі змішаними. Метод апробований на широкому класі задач, важливих, як з погляду розвитку теорії розв'язування нестационарних задач механіки деформівного твердого тіла, так і з можливостей їх ефективного практичного використання. Під час виконання досліджень вперше отримано такі результати:

- побудовано аналітичні розв'язки двовимірних квазістатичних задач термopружності для плоскошаруватих тіл за довільної кількості складових;
- досліджено перехідний термонапружений стан вищезазначених структур із високою фізико-механічною та геометричною контрастністю компонентів;
- розроблено методику побудови рекурентного аналітичного розв'язку двовимірної осесиметричної задачі термopружності для багат шарових циліндричних тіл радіально-шаруватої структури;
- з використанням розробленої методики досліджено особливості часової зміни температурних полів та напружено-деформованих станів в радіально-шаруватих тілах за різного виду змінюваного в часі теплового навантаження;
- із використанням інтегрального перетворення Лагерра та методу рядів Неймана розроблено аналітико-числову методику розв'язування із довільно прогнозованою точністю квазістатичних задач термopружності для тіл з покриттями при мішаних умовах нагрівання довільного типу;
- вивчено особливості просторового розподілу та часової зміни термонапруженого стану безмежних та півбезмежних тіл із покриттями, що перебувають в умовах мішаного нагріву різного роду;
- із використанням неklasичного розщеплення рівнянь динамічної задачі теорії пружності для плоскошаруватих тіл і середовищ та методу поліномів Лагерра запропоновано високопродуктивний математичний апарат для дослідження динамічної реакції плоскошаруватих тіл на високоінтенсивне локальне силове навантаження;

- одержано розв'язки двовимірних осесиметричних динамічних задач теорії пружності для радіально-шаруватих тіл і середовищ циліндричної форми та досліджено процес поширення в них пружних хвиль, зумовлений змінюваними в часі зовнішніми силовими навантаженнями.

**Достовірність одержаних результатів** забезпечується коректністю та строгістю математичної постановки задач, використанням для побудови їх розв'язків добре апробованих методів математичної фізики, контрольованою точністю обчислень, зіставленням отриманих результатів у часткових і граничних випадках із відомими розв'язками; хорошим узгодженням числових результатів із фізикою явищ, які розглядаються.

**Практичне та теоретичне значення отриманих результатів.** Розроблений в дисертаційній роботі метод дає змогу здійснювати достовірний та належно точний розрахунок нестационарних фізико-механічних полів в кусково-однорідних тілах і середовищах, у тому числі із різними масштабами товщини та високою контрастністю фізико-механічних параметрів складових. Створена методика розв'язування змішаних нестационарних задач для кусково-однорідних тіл дає змогу адекватніше та точніше моделювати термопружні та пружні процеси, які відбуваються в реальних умовах експлуатації чи виготовлення сучасних композитних матеріалів та елементів конструкцій та може бути поширена на квазістатичні задачі термопружності для тіл із включеннями та тріщинами, квазістатичні контактні задачі, задачі із фрикційним локальним теплоутворенням, а також на широкий клас двовимірних динамічних задач зі змішаними крайовими умовами. Розроблений метод, крім того, може слугувати, як тестовий при розробці та налагодженні сучасних програмних комплексів дослідження складних перехідних процесів в неоднорідних об'єктах.

Отримані результати можуть бути використані на підприємствах енергетичної, транспортної галузей, енерго-, машино- та приладобудування при проектуванні нових композитних елементів конструкцій та приладів, застосовані під час неруйнівного контролю та діагностики багат шарових споруд та конструкцій тривалої експлуатації, при розрахунках міцності та екологічної

безпеки газо- та нафтодобувного обладнання, для аналізу мікро- і мезоструктур і розробки нанотехнологій.

**Особистий внесок здобувача.** Усі наведені в роботі основні наукові результати, моделі та методи отримані автором самостійно. У спільних публікаціях [1-3, 9-11, 13, 16, 18-21, 25, 28] співавторам належить участь у постановці задач, аналізі результатів та формулюванні висновків. Науковому консультанту, окрім того, належить вибір напрямів наукових досліджень та загальне керівництво роботами. У роботах [8, 12, 14, 17, 22-24, 26, 27] співавтори брали участь у числових розрахунках. У спільних із О.В. Галазюк працях [4-7] співавтору належить побудова схем методу поліномів Лагерра, відповідні числові розрахунки та участь в аналізі числових результатів.

**Апробація результатів дисертації.** Основні положення роботи доповідалися та обговорювалися на III-VIII Міжнародних симпозіумах «Mechanika Zniszczenia Materialov i Konstrukcij» (Польща, Augustow, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015); 7-му та 10-му Міжнародних симпозіумах українських інженерів-механіків у Львові (2005, 2011); VII, VIII та IX Міжнародних наукових конференціях «Математичні проблеми механіки неоднорідних структур», (Львів, 2006, 2010, 2014); Міжнародній науково-технічній конференції «Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій» (Дніпропетровськ, 2007); Акустичному симпозіумі “Консонанс-2007” (Київ, 2007); VI Міжнародній науковій конференції «Актуальні проблеми механіки деформівного твердого тіла (Донецьк–Мелекіно, 2010); Міжнародному симпозіумі «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (Росія, Ярополец, 2011); VII та VIII Міжнародних симпозіумах «Mechanics of Materials and Structures» (Польща, Augustow, 2011, 2013); Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки деформівного твердого тіла, диференціальні та інтегральні рівняння» (Одеса, 2013); Міжнародній науковій конференції «Турбулентность и волновые процессы» (Росія, Москва, 2013); Міжнародних наукових конференціях «Сучасні проблеми механіки» (Київ, 2013, 2015).

У повному обсязі дисертаційна робота доповідалася на науковому семінарі кафедри механіки Львівського національного університету імені Івана Франка МОН України (керівник – чл.-кор. НАНУ, д.т.н., проф. О.Є. Андрейків); розширеному науковому семінарі відділу термомеханіки (керівник – чл.-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф. Р.М. Кушнір) та загальноінститутському науковому семінарі за напрямом «Механіка взаємозв’язаних полів» Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України (керівник – д.ф.-м.н., проф. О.Р. Гачкевич); науковому семінарі відділу термопружності Інституту механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України (керівник – д.ф.-м.н., проф. В.Г. Карнаухов); науковому семінарі кафедри теоретичної та прикладної механіки Київського національного університету імені Тараса Шевченка МОН України (керівник – д.ф.-м.н., проф. Жук Я.О).

**Публікації.** Основний зміст дисертації викладено у 28-ми наукових статтях та 34-ох тезах та матеріалах конференцій. Серед них 10 статей [1, 3, 15, 17, 19, 21, 23, 26-28] у рецензованих міжнародних журналах, що входять до ISI Master Journal List та (або) зареєстровані у міжнародній наукометричній базі Scopus, 4 статті [9-11, 16] у рецензованих іноземних наукових виданнях, 14 статей [2, 4-8, 12-14, 18, 20, 22, 24, 25] у фахових виданнях у галузі фізико-математичних наук з переліку ДАК МОН України. Праці [29–62] опубліковані у збірниках статей, матеріалах міжнародних наукових конференцій, конгресів та симпозіумів. Праці [15, 41, 42] опубліковані автором одноосібно.

Дисертаційна робота складається із вступу, семи розділів, висновків та списку використаних джерел.

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дисертаційної роботи; окреслено зв’язок дисертації з науково-дослідними темами; сформульовано мету та завдання досліджень; висвітлено наукову новизну, достовірність і практичне значення отриманих результатів; подано інформацію про публікації за темою дисертації та особистий внесок у них здобувача, апробацію результатів дисертації, її структуру та обсяг.

У **першому розділі** здійснено огляд робіт, що стосуються математичного моделювання термопружних та пружних процесів в однорідних та неоднорідних тілах.

У результаті аналізу літературних джерел з'ясоване місце дисертаційної роботи у даній проблематиці та сформульовано мету і перелік завдань роботи.

У **другому розділі** на відміну від класичного способу визначення коефіцієнтів розкладу в ряди за поліномами Лагерра функції  $f(t)$ , показано, що таке визначення можливе із задачі Коші, якій задовольняє функція  $f(t)$ , при цьому алгоритм визначення коефіцієнтів розкладу абсолютно ідентичний до алгоритму застосування методу інтегральних перетворень, що дало підстави сформулювати означення інтегрального перетворення Лагерра.

Розглянуто дві типові задачі Коші, розв'язки яких відповідають часовій поведінці розв'язків задач математичної фізики параболічного та гіперболічного типів та одержано їх рекурентні розв'язки в просторі зображень за Лагерром. Одночасно проведено теоретичне обґрунтування та числову ілюстрацію застосування уведеного в аргумент поліномів Лагерра масштабного множника. На конкретному прикладі показано відмінність інтегрального перетворення Лагерра від одного із способів обернення інтегрального перетворення Лапласа.

Із застосуванням інтегрального перетворення Лагерра початково-крайові задачі теплопровідності в одновимірному випадку прямокутної та полярної систем координат зведено до трикутних послідовностей звичайних диференційних рівнянь. Знайдено загальні розв'язки цих послідовностей у вигляді алгебричних згорток та показано спосіб одержання їх фундаментальних розв'язків в двох системах координат. На прикладі одновимірної нестационарної задачі теплопровідності для багатошарової плити продемонстровано застосування запропонованого методу до задач для структурно-неоднорідних тіл.

Аналогічні викладки зроблені і для випадку хвильового рівняння. Для зручності числової реалізації фундаментальні розв'язки одержано також в інтегральній формі.

Розроблено методику розв'язування систем парних інтегральних рівнянь, які виникають при застосуванні методу інтегральних перетворень до задач із змішаними крайовими умовами. При цьому, шляхом розкладу невідомої функції в ряд Неймана із довільними коефіцієнтами розкладу, вдається задовольнити умови на одному із інтервалів зміни крайових умов, а самі коефіцієнти знаходяться із нескінчених систем лінійних алгебричних рівнянь. Ця методика поширена на випадок трикутних послідовностей парних інтегральних рівнянь, характерних для трансформованих за Лагерром нестационарних задач зі змішаними крайовими умовами. При цьому вдалося з'ясувати умови на відомі вхідні функції при яких послідовності нескінчених систем лінійних алгебричних рівнянь є квазірегулярними і, відповідно, дають змогу застосовувати до них метод редукції.

У **третьому розділі** одержано точні замкнуті розв'язки квазістатичних двовимірних задач термopружності для кусково-однорідних тіл із плоскопаралельними границями поділу для довільної кількості складових, їх довільної відносної товщини та контрастності фізико-механічних властивостей.

Виявлено, що зміною взаємного розташування та кількості ізолюючих (кераміка) та зміцнюючих (алюмінієвий стоп) шарів можна досягнути значного зменшення внутрішніх температурних напружень за незмінності теплоізолюючих властивостей композитного тіла.

Встановлено, що урахування відносної товщини покриття слід обов'язково пов'язувати із його відносними термомеханічними характеристиками (контрастністю), в окремих випадках значні зміни в остаточних результатах спостерігаються в діапазоні відносної товщини покриття  $10^{-4}$ - $10^{-5}$ , що вимагає певного перегляду класичних уявлень механіки композитів.

З'ясовавно вплив товщини зовнішнього ізолюючого покриття на часову трансформацію внутрішніх температурних напружень в півбезмежній неоднорідній плиті при її торцьовому нагріві та виявлено, що збільшення товщини покриття призводить не лише до покращення теплоізолюючих властивостей композитного тіла, а й до підвищення рівня напружень поблизу поверхні поділу матеріалів, що

може викликати втрату адгезії, відшарування та руйнування теплоізолюючих шарів

В **четвертому розділі** роботи розроблений метод поширено на випадок квазістатичних задач термопружності радіально-шаруватих тіл циліндричної форми. При цьому одержано відповідні розв'язки трансформованих задач та систем алгебричних рівнянь, які відповідають граничним умовам та умовам спряження.

Досліджено особливості часової трансформації температурних полів та напружено-деформованого стану в радіально-шаруватих тілах за різного виду теплового навантаження та при різних кількостях складових, їх відносних товщин та взаємного розташування та запропоновано використання розробленої методики до числового аналізу квазістатичного термонапруженого стану циліндричних тіл із функційно-градієнтних матеріалів.

В **п'ятому розділі** розроблено метод побудови аналітичних розв'язків плоскої та осесиметричної задач нестационарної теплопровідності для тіл з плоско-паралельними покриттями за змішаних умов нагрівання (охолодження) в довільній комбінації.

Із використанням запропонованого методу досліджено перехідні термонапружені стани в шарі та півпросторі із покриттям за змішаних умов нагрівання 1-3-го та 2-3-го роду. При цьому виявлено, що найнебезпечнішими стосовно можливого руйнування ділянками є області, розташовані поблизу лінії поділу крайових умов.

Одержано розв'язок змішаної квазістатичної задачі термопружності для півбезмежної плити із двостороннім покриттям та здійснено регуляризацію процедури числового обернення інтегрального перетворення Фур'є.

В **шостому розділі** із використанням некласичного розщеплення рівнянь руху пружного середовища здійснено нове формулювання динамічної задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл із плоско-паралельними границями поділу. На основі запропонованого методу розроблено аналітичну методику

побудови точних розв'язків динамічних задач теорії пружності для плоско-шаруватих тіл із довільною кількістю складових, їх товщини та контрастності.

Досліджено особливості процесу нестационарних коливань композитного шаруватого тіла, залежно від кількості складових та за незмінності об'ємного відношення матеріалів та встановлено при цьому ефект "розмивання" напруженого стану та проведено числову апробацію розробленої методики на динамічній задачі для півпростору із покриттям.

В останньому – **сьомому розділі** розроблено аналітичну методику дослідження процесу поширення пружних хвиль в радіально-шаруватих тілах циліндричної форми. Проведено порівняльний аналіз за результатами якого виявлено хороше співпадіння одержаних в частковому одновимірному випадку розв'язків, із розв'язками, одержаними із використанням інтегрального перетворення Лапласа.

Здійснено числовий аналіз задачі про нестационарні коливання простору із системою циліндричних вкладок, вперше одержано та числово апробовано розв'язки динамічних двовимірних осесиметричних задач теорії пружності для простору із циліндричною порожниною та шаруватого циліндра.

У **висновках** коротко сформульовано отримані результати та наведено основні підсумки дисертаційної роботи.

*Автор щиро вдячний науковому консультанту - доктору фізико-математичних наук, професору Георгію Теодоровичу Сулиму за постійну увагу та всебічну підтримку під час виконання роботи та першому вчителю - кандидату фізико-математичних наук, доценту Віталію Аполлоновичу Галазюку за створення ним основ методу поліномів Лагерра, спонукання до роботи та батьківську опіку.*

## РОЗДІЛ 1

### ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

Застосування новітніх технологій в машино-, приладобудуванні, енергетиці та інших галузях вимагає створення та широкого використання принципово нових матеріалів з прогнозованими експлуатаційними можливостями та пристосовуваністю до змінних умов експлуатації.

Особливе місце серед такого роду матеріалів займають стратифіковані матеріали, фізико-механічні властивості яких задаються, як функції просторових координат. Вивчення особливостей трансформації фізико-механічних полів та глобального поведіння таких матеріалів, викликаних реальними умовами експлуатації є актуальною проблемою сучасної механіки.

Найпростішою, з точки зору технології виготовлення, моделлю стратифікованого середовища є кусково-однорідне, або шарувате середовище. Незважаючи на відносну простоту цієї моделі дослідження перехідних процесів у кусково-однорідних елементах конструкцій, викликаних температурними та силовими чинниками є важливою науково-технічною проблемою. Це стало причиною значного інтересу вітчизняних і зарубіжних вчених до таких досліджень, розробки ефективних методів їх проведення, а також використання при цьому сучасних засобів математичного моделювання і обчислювальної техніки. При цьому постає завдання максимального спрощення математичних моделей складових конструкцій за умови збереження їх адекватності реальним процесам, що відбуваються під час виготовлення та функціонування таких об'єктів.

Внаслідок комплексного характеру зазначена проблема охоплює широкий спектр задач механіки деформівного твердого тіла [2]. Для її вирішення необхідно використовувати, зокрема, основи термодинаміки нерівноважних процесів, сучасні моделі термомеханіки та динаміки, аналітичні та числові методи розв'язування виникаючих у результаті такого математичного

моделювання початково-крайових задач.

Дисертаційна робота стосується двох напрямків сучасних наукових досліджень неоднорідних тіл – квазістатичної термopружності неоднорідних та, зокрема, шаруватих тіл та середовищ та динамічних задач теорії пружності для структурно-неоднорідних об'єктів. Оскільки, з огляду на сучасний стан досліджень, це загалом різні проблеми, в основному із-за способів їх вирішення, то вважаємо за доцільне розглянути кожен з них по-черзі, виокремивши основні напрямки.

**Квазістатична термopружність.** Основні результати з моделювання термopружних процесів та розроблення методик розв'язування відповідних задач відображені в низці монографій та статей. Так, достатньо повно систематизовані основні результати досліджень термонапруженого стану тіл, проведене термодинамічне обґрунтування основних рівнянь механіки взаємозв'язаних полів в матеріалах та елементах конструкцій у тому числі і неоднорідних, розвиток яких спричинений потребами сучасної техніки внаслідок її експлуатації в умовах статичних та змінних в часі температурних навантажень у монографіях Б. Болі [13], Я.Й. Бурака [19], О.Р. Гачкевича [38-41], В.Т. Грінченка, А.Ф. Улітка [63, 64], Я.О. Жука, І.К. Сенченкова [77-79], В.Г. Карнаухова [89-91], Г. Карслоу [92], А.Д. Коваленка [99, 100], Ю.М. Коляно і О.М. Кулика [107], А.В. Ликова [144], Г.О. Мотовиловця [156], Г.О. Мотовиловця і В.І. Козлова [157], В. Новацького [162, 163], Г. Паркуса [169], Я.С. Підстригача [175], Я.С. Підстригача і Ю.М.Коляно [183], Б.Ю. Победрі [178], Ю.М. Подільчука [179], Ю.С. Постольника [198], І.О. Прусова [207, 208], В.Л.Рвачова [210], а також у працях [7, 10, 23, 26, 29, 36, 37, 44, 71, 73, 78, 82, 83, 86, 98, 102, 105, 111, 119, 140, 153, 154, 158, 167, 194-196, 228, 230, 235, 243, 254-257, 263, 267-269, 275, 277, 278, 280, 295].

В переважній більшості згаданих робіт в якості математичного апарату використовується метод інтегральних перетворень. Для просторових задач – за просторовою змінною, а для нестационарних та, відповідно, квазістатичних задач

ще й за часовою змінною. Цей метод дає усунути з розгляду часткову похідну за змінною перетворення та досить просто одержати розв'язок трансформованої задачі. Труднощі, зазвичай, виникають при оберненні інтегрального перетворення – відтворенні оригіналу. Особливо це відчутно при оберненні інтегрального перетворення Лапласа – класичного методу, що використовується у початково-крайових задачах. Однак, у випадку задач для однорідних тіл і середовищ, внаслідок розроблення широкого класу методів та методик та великого об'єму довідкових матеріалів обернення інтегрального перетворення Лапласа стало стандартною процедурою, що зумовило значний розвиток квазістатичної та динамічної термопружності.

**Термопружність неоднорідних тіл.** Із-за бурхливого розвитку нових технологій виробництва та застосування композиційних матеріалів в останніх десятиліттях минулого століття, надзвичайно важливими з точки зору можливостей практичного застосування стали задачі термопружності структурно-неоднорідних тіл та середовищ. Методам визначення і дослідження пружної рівноваги тіл неоднорідної та кусково-однорідної структури при силовому і температурному навантаженнях присвячені монографії Ю.М. Коляно [103], І.Б. Колчина [101], В.О. Ломакіна [141], І. Неміша [160], Я.С. Підстригача, В.О. Ломакіна і Ю.М. Коляно [185], М.О. Шульги [252], а також праці [22, 24, 30, 66, 67, 74, 77, 106, 117, 122-128, 142, 143, 188, 199, 243, 264, 271, 272-274, 283-285, 292-294, 304, 307-309].

Математичне моделювання напружено-деформованого стану шаруватих тіл, тіл з тонкими покриттями та включеннями, використовуючи різні спрощуючі припущення відобразилося в працях О.Є. Андрейківа [5], В.В. Болотіна [14], Є.І. Григолюка [50], Д.В. Гриліцького [58, 59], О.О. Євтушенка [76], О.В. Максимука [150], Р.М. Мартиняка [151, 152], В.В. Панасюка [168], Б.Л. Пелеха [172], Г.Я. Попова [191, 192], В.Г. Піскунова [174], Я.Г. Савули [216, 217], Г.Т. Сулима [227], М.В. Хая [240, 241], Л.П. Хорошуна [242], Р.М. Швеця [246, 249], В.А. Шевчука [251], та інших. При застосуванні числових методів до задач

термопружності для таких тіл, використовують такі математичні моделі, в яких відповідні процеси в тонкому шарі описуються рівняннями теорії пластин і оболонок. У випадках, коли елементи неоднорідного тіла не вдається описати за допомогою теорій пластин чи оболонок доводиться використовувати просторові постановки.

Відзначимо, що у працях Я.С. Підстригача [175, 176], його монографіях у співавторстві з Ю.М.Коляно [183, 184] викладені основи теорії і методи розв'язування задач термопружності для тіл з різними тонкими включеннями. Велика увага тут приділена вивченню температурних полів і напружень у тілах зі стержневими, круговими, сферичними, циліндричними та оболонковими включеннями, тобто з такими неоднорідностями, один з характерних розмірів яких істотно менший двох інших. Схема розв'язування задач пружної рівноваги тіл з тонкими неоднорідностями полягає у поданні включення (розрізу, тріщини) поверхнею (лінією) розривів параметрів теплофізичного і напружено-деформованого стану тіла. Таким чином, власне включення з розгляду виключається, а його наявність моделюється деякими умовами взаємодії, що є по суті умовами неідеального контакту вздовж цієї поверхні (лінії), тобто певною математичною залежністю між функціями температури, теплових потоків, напружень і переміщень на граничних з дефектом поверхнях середовища (матриці).

Умови термомеханічної взаємодії з матрицею є узагальненням умов пружної взаємодії на випадок температурного поля. Вибір умов теплової взаємодії при цьому зумовлюється необхідною мірою точності урахування температурного поля. Як правило, найпростіші термомеханічні умови взаємодії поєднуються з найпростішими тепловими [185, 186]. Подальшого розвитку і узагальнення такі дослідження набули у роботах Д.В. Гриліцького, Г.Т. Сулима [58, 59], Г.Т.Сулима [227], Я.М. Пастернака, Г.Т. Сулима [172] та інших. При цьому задачі термопружності зводяться до розв'язування систем інтегральних рівнянь відносно стрибків напружень або переміщень на лінії, що моделює

включення або тріщину, у випадку, коли права частина рівняння визначається заданим силовим навантаженням і температурним полем.

Основи механіки композиційних матеріалів і розрахунку неоднорідних і, зокрема, шаруватих тіл та елементів конструкцій, розглядаються в монографіях В.В. Болотіна і Ю.М. Новичкова [14], Я.М. Григоренка, А.Т. Василенка та ін. [67], О.М. Гузя, Я.М. Григоренка, І.Ю. Бабича та ін. [70], Б.Л. Пелеха [173], І.Ф. Образцова і Г.Г. Онанова [164], Я.С. Підстригача і Р.М. Швеця [187] та ін.

У монографії Я.М.Григоренка [55] вперше розглянуто теорію і методи розв'язування задач статички тонких шаруватих оболонок обертання із довільним контуром, складених з ізотропних та анізотропних шарів при нерівномірних силових та температурних навантаженнях. Вивід розв'язувальних рівнянь здійснено у зручній для застосування числових методів формі. Розділення змінних проводиться шляхом розкладу всіх чинників у ряди Фур'є. Викладено та обґрунтовано вибір у якості числового методу розв'язування крайових задач методу дискретної ортогоналізації Годунова. Розроблено алгоритм, який передбачає автоматизацію всього процесу розв'язування задач. В роботі Г.Я.Попова [193] викладено спосіб розв'язування задач механіки для шаруватих середовищ, який ґрунтується на використанні інтегральних перетворень і функцій Гріна відповідних одновимірних крайових задач для рівнянь з неперервними коефіцієнтами.

У монографії Я.М.Григоренка, А.Т.Василенка і Н.Д.Панкратової [56] цей числово-аналітичний підхід розвинуто до розв'язування задач статички пружних неоднорідних анізотропних тіл. Він базується на сумісному використанні аналітичних перетворень, які дозволяють провести часткове розділення змінних у вихідних рівняннях та числового методу дискретної ортогоналізації розв'язування крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь. За допомогою такого підходу проведено, зокрема, дослідження полів напружень і переміщень у порожнистих шаруватих тілах.

У випадках, коли елементи неоднорідного тіла не вдається описати за

допомогою теорій пластин чи оболонок доводиться використовувати просторові постановки.

Традиційний підхід до побудови розв'язків задач термопружності і пружності кусково-однорідних тіл ґрунтується на розгляді відповідних рівнянь для кожного елемента композита з подальшим узгодженням розв'язків через умови спряження елементів (умови ідеального чи неідеального контакту, умови взаємодії через тонкий проміжковий шар, тощо). До переваг цього підходу слід віднести насамперед відносну простоту вихідних співвідношень та їх аналогічність для кожного елемента, а до недоліків - необхідність розгляду громіздких систем рівнянь, що виникають після урахування крайових умов та умов спряження, розмірність яких збільшується із збільшенням числа елементів композита.

Поряд з традиційними підходами до розв'язання задач для кусково-однорідних тіл Я.С.Підстригачем і Ю.М.Коляно був запропонований підхід, який ґрунтується на використанні апарату узагальнених функцій для їх опису як цілісних структур. Ними та їх учнями і співробітниками О.М. Куликом, Є.Г. Грицьком, Л.С. Гульчевським, Є.Г. Іваником, Р.М. Кушніром, І.М. Махоркіним, В.С. Поповичем, Б.В. Процюком, М.М. Семеракон, Ф.В. Семеракон та іншими в рамках цього підходу розроблена та апробована на цілому класі задач термопружності методика, за вихідні для якої вибираються рівняння термопружності неоднорідного тіла. При цьому шукані (температура, компоненти вектора переміщень) і задані (фізико-механічні характеристики матеріалу тіла, питому потужність джерел тепла та інші) величини та функції подаються за допомогою характеристичних функцій областей, які займають складові тіла, і підставляються у рівняння термопружності неоднорідного тіла. В результаті, замість системи диференціальних рівнянь термопружності для кожної складової кусково-однорідного тіла і умов контакту на поверхнях поділу отримуються частково-вироджені диференціальні рівняння термопружності з розривними коефіцієнтами, які внаслідок рівності для цього випадку похідних в

класичному та узагальненому сенсі забезпечують виконання ідеального термомеханічного контакту на поверхнях поділу. Найбільш повно результати таких досліджень систематизовані і представлені в монографіях Я.С. Підстригача, В.О. Ломакіна і Ю.М. Коляно [185], Я.С. Підстригача, Ю.М. Коляно і М.М. Семерака [184], Ю.М. Коляно і О.М. Кулика [108], Ю.М. Коляно [103], а також приведені у працях [122-128, 130-132, 200-205, 276, 277] та інших.

Зауважимо, що використання апарату узагальнених функцій при розв'язуванні задач механіки відображено також у монографіях В.А. Лазаряна і С.І. Конашенка [136], І.Ф. Образцова і Г.Г. Онанова [164, 165]. Основи теорії узагальнених функцій із застосуваннями до розв'язування задач математичної фізики висвітлені у монографіях В.С. Владімірова [27, 28].

Розв'язування отриманих рівнянь, як правило, здійснюється за допомогою методу інтегральних перетворень і способів побудови розв'язків звичайних диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами. Подібну методику дослідження термомеханічних процесів в кусково-неоднорідних тілах, яка також базується на рівняннях термопружності неоднорідного тіла, але зводиться до побудови розв'язків граничних інтегральних рівнянь, розроблено в працях В.І. Лавренюка, В.О. Ломакіна та їх учнів [113, 135, 142, 143].

Для усунення обмежень щодо умов контакту на поверхнях поділу кусково-однорідного тіла, а також використання в якості вихідних рівнянь термопружності однорідного тіла, Ю.М. Коляно, О.М. Куликом і Р.М. Кушніром запропонована інша методика [107] одержання частково-вироджених рівнянь термопружності тіл кусково-однорідної структури. В її основу покладена математична постановка узагальненої задачі спряження для відповідних диференціальних рівнянь однорідних тіл зі сталими коефіцієнтами, подібно до того, як це робиться для задачі Коші. Вона полягає у продовженні шуканих та заданих функцій на всю область, яку займає кусково-однорідне тіло. При цьому враховуються зв'язки між узагальненими й класичними похідними, а також умови контакту на поверхнях

поділу, які можуть бути не лише ідеальними, але й більш загального вигляду (зокрема, враховувати тонкі різнорідні прошарки між складовими тіла, проковзування шарів, фрикційне теплоутворення і т.п.).

Всі ці підходи показали свою високу ефективність в двох випадках – просторових статичних задачах та квазістатичних одновимірних задачах. При розгляді початково-крайових просторових (у тому числі двовимірних) задач термopужності та пружності вказані підходи при застосуванні класичного методу інтегрального перетворення Лапласа приводять до значних труднощів обчислювального характеру, оскільки дисперсійне рівняння та його корені, що використовується при оберненні інтегрального перетворення Лапласа залежить від кількості шарів неоднорідного тіла, а у випадку дво- та трьохвимірних задач ще й від параметра обраного інтегрального перетворення за просторовою змінною. Обернення інтегрального перетворення Лапласа та інтегрального перетворення за просторовою змінною (Фур'є, Ганкеля, тощо) в таких випадках доводиться проводити числовим способом. Таку реалізацію інтегрального перетворення Лапласа можна знайти в працях Р.М. Кушніра, Б.В. Процюка [125, 131], Б.В. Процюка [200-205], N. Noda [288-291], Y. Sugano [304], Y. Tanigawa [307-309] та інших [ ]. Зазначимо, що вказаний підхід, внаслідок значної громіздкості викладок не дає можливості належного обґрунтування необхідних математичних прийомів та методик обернення інтегрального перетворення Лапласа, що суттєво впливає на точність та, головне, достовірність одержаних результатів.

До розв'язування задач механіки деформівного твердого тіла і, зокрема, термopужності застосовуються також різні числові методи, зокрема метод скінченних елементів та метод граничних елементів [8, 15, 25, 112, 147, 231, 245, 301]. В основі цього методу лежать інтегральні співвідношення, які пов'язують значення шуканої функції всередині області з її значенням на границі. З цих співвідношень отримують граничні інтегральні рівняння, які розв'язують шляхом поділу границі тіла на елементи з подальшою апроксимацією функцій на них

наближеними виразами та розв'язуванням відповідних систем алгебраїчних рівнянь, порядок яких залежить від кількості складових частин тіла.

**Задачі термопружності зі змішаними крайовими умовами.** Задачі механіки зі змішаними крайовими умовами займають особливе місце в наукових дослідженнях принаймні з, двох причин: по-перше, змішані крайові умови з погляду адекватного моделювання найбільше відповідають реальним умовам теплового чи силового навантажування, а, по-друге, складають окрему проблему теорії і практики застосування рівнянь математичної фізики. Це спричинило бурхливий розвиток методів розв'язування змішаних задач термопружності і пружності до класу яких, окрім задач мішаного нагрівання, належать також контактні задачі, задачі для тіл і середовищ із тонкими локальними неоднорідностями тощо. Ці методи найбільш повно відображені в працях Н.Д. Вайсфельд [20], В.Т. Грінченка [61], Д.В. Гриліцького [58], С.О. Калоєрова [87], Е.М. Карташова [93], Г.С. Кіта [95-97], В.Д. Кубенка [116], Р.М. Мартиняка [151], В.В. Михаськіва [154], І.А. Мотовиловця [156], З.Т. Назарчука [159], М.М. Николишина [161], В.К. Опанасовича [167], В.В. Панасюка [168], Г.Я. Попова [191], В.Г. Попова [189, 190], М.П. Саврука [212], І. Снеддона [223, 302], Г.Т. Сулима [227], В.Л. Рвачова [210], А.Ф. Улітка [234], М.В. Хая [240] та інших [9, 60, 75, 87, 96, 97, 113, 118, 121, 171, 189, 190, 232, 234, 237, 238].

У випадку наявності змішаних крайових умов та нестационарності задачі застосування інтегрального перетворення за просторовою змінною та інтегрального перетворення Лапласа за часовою змінною приводить до так званих парних (дуальних) інтегральних рівнянь [302], які містять як незалежну змінну параметр перетворення за Лапласом. В роботі [93] такі дуальні інтегральні рівняння зведені до рівнянь Фредгольма 2-го роду, тут же запропонована схема отримання розв'язку цих рівнянь з використанням методу послідовних наближень. В цій же роботі можна знайти синтез результатів, заснованих на методах теорії потенціалу. Всі зазначені розв'язки отримані для безмежних або напівбезмежних однорідних об'єктів. В роботі [282] за допомогою інтегральних

перетворень Лапласа і Ханкеля змішана задача нестационарної теплопровідності для пластини теж зведена до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Наближений розв'язок цього рівняння пропонується шукати у вигляді ряду за степенями параметра перетворення Лапласа, остаточні формули і будь-який числовий аналіз відсутні. Інших результатів з точними, математично обґрунтованими методами розв'язування нестационарних змішаних задач теплопровідності кусково-однорідних тіл в сучасній літературі немає.

**Задачі динамічної пружності шаруватих тіл.** Закономірності перехідних (динамічних) процесів враховуються в багатьох сучасних інженерних дослідженнях: при розробці та розрахунках технічних споруд та виробів (включаючи розрахунки їх міцності, вибір оптимальних параметрів та режимів експлуатації, подовження ресурсу їх роботи та ін.), проектуванні композитних матеріалів із заданими властивостями. створенні геологічного обладнання, яке працює в умовах високоінтенсивного вибухового силового навантаження (зокрема для гідророзриву газonosних пластів).

Дослідження дисертаційної роботи, пов'язані із вивченням нестационарних коливань пружних кусково-однорідних тіл спираються на загальні методи динамічної теорії пружності. Основи і подальший розвиток цих методів відображені у великій кількості монографій та статей, серед яких, зокрема, слід відзначити праці В.Т. Грінченка [61, 62], О.М. Гузя, В.Д. Кубенка [68, 69], Г.С. Кіта, М.В. Хая [95], В.Д. Кубенка [115, 116], Я.С. Підстригача, О.П. Піддубняка [181], В.З. Партона [170], З.Т. Назарчука [159], В.В. Михаськіва [286], В.Б. Поручикова [197], В.Г. Попова [189, 190, 298], М.П. Саврука [213, 214], В.М. Сеймова [218], І.Т. Селєзова [219, 220], Л.І. Слепяна [221,222], J.D. Achenbach [253], S.-C. Chou [259], K.F. Graff [265], I.H. Pao [296, 297], та інші роботи [110, 166, 180, 253, 258, 259, 265, 266, 279, 296-299, 311, 312, 314-318]. Проте, у переважній більшості цих робіт розглядають або одновимірні нестационарні задачі, або просторові задачі динамічної теорії пружності при усталеному режимі, у тому числі для неоднорідних тіл і середовищ.

В монографії А.Е. Бабаєва [6] розроблено аналітичний метод розв'язування нестационарних задач пружності для структурно-неоднорідних тіл циліндричної форми, який дає змогу зводити їх до систем інтегральних рівнянь Вольтера із спізнюючим аргументом. Із використанням розробленого методу досліджені, зокрема, розв'язки одновимірних та двовимірних плоских динамічних задач теорії пружності для багат шарових циліндрів.

В монографії А.Г. Горшкова, Д.В. Тарлаковського [45] із використанням теорії узагальнених сферичних хвиль та методів інтегральних перетворень одержано низку точних розв'язків динамічних задач теорії пружності для тіл із системою сферичних поверхонь відбиття.

Інших математично обґрунтованих методів дослідження нестационарної динамічної реакції неоднорідних і, зокрема, шаруватих тіл на змінюване в часі зовнішнє силове навантаження, особливо в двовимірних осесиметричних випадках та для тіл, один із розмірів яких значно перевищує решту, в сучасній літературі немає.

Поряд із традиційним підходом до розв'язування початково-крайових задач математичної фізики з 80-х років минулого століття завдяки працям В.А. Галазюка та його учнів [31-35] почав розвиватися новий метод поліномів Лагерра чи як його ще називають метод інтегрального перетворення Лагерра (Чебишева-Лагерра). Він ґрунтується на класичній теоремі Веєрштрасса про розвинення кусково-неперевної на певному інтервалі функції у ряд за поліномами (у даному випадку на півбезмежному інтервалі у ряд за поліномами Лагерра). Основною перевагою цього підходу є простота обернення - підсумовування ряду. Окрім того, при застосуванні методу поліномів Лагерра до класичних початково-крайових задач математичної фізики утворюються трикутні послідовності [34], що дозволяє одразу записати їх загальний розв'язок [35] і тим самим створити загальний алгоритм знаходження коефіцієнтів розкладу.

У результаті аналізу літературних джерел з'ясоване місце дисертаційної роботи у даній проблематиці та сформульовано мету і перелік завдань роботи.

### **Висновки до розділу 1.**

- опубліковані дослідження квазістатичного просторового термонапруженого стану шаруватих тіл використовують числовий спосіб спільного обернення інтегрального перетворення Лапласа та інтегрального перетворення Фур'є (Ханкеля) без належного теоретичного обґрунтування;
- прямі числові методи дослідження вказаних задач зазнають значних труднощів у випадку малої відносної товщини складових та високої контрастності їх фізико-механічних властивостей;
- незважаючи на велике практичне зацікавлення, в сучасній літературі відсутні розв'язки квазістатичних задач термopружності неоднорідних тіл зі змішаними крайовими умовами;
- існує потреба в нових ефективних методах дослідження нестационарного процесу поширення пружних хвиль в кусково-однорідних тілах з плоско-паралельними границями поділу;
- надзвичайно мало уваги приділено двовимірним, особливо осесиметричним динамічним задачам теорії пружності для однорідних та, особливо, неоднорідних тіл обмежених циліндричними границями.

## РОЗДІЛ 2

# ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПОЛІНОМІВ ЛАГЕРРА ДО ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗАДАЧ МЕХАНІКИ І ТЕРМОМЕХАНІКИ ШАРУВАТИХ ТІЛ

### 2.1. Наближення функцій поліномами Лагерра

#### 2.1.1. Визначення коефіцієнтів розкладу за Лагерром із задачі Коші

Поліномами Лагерра називають послідовність многочленів виду [1]

$$L_0(x) = 1; L_1(x) = 1 - x; L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2); \mathbf{K}, \quad (2.1)$$

де кожен наступний визначається за двома попередніми за рекурентною формулою [1]

$$L_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1}((2n+1-x)L_n(x) - nL_{n-1}(x)), n = 1, 2, \mathbf{K}. \quad (2.2)$$

Поліноми Лагерра володіють властивістю ортогональності [1], тобто

$$\int_0^{\infty} \exp(-x) L_n(x) L_m(x) dx = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \quad (2.3)$$

Завдяки цій властивості, а також функціональній повноті [226] поліномів Лагерра, довільну функцію  $f(x)$ , яка задовольняє умові

$$\|f\|^2 = \int_0^{\infty} \exp(-x) |f(x)|^2 dx < \infty \quad (2.4)$$

можна розкласти в ряд за поліномами Лагерра

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n L_n(x), \quad (2.5)$$

де

$$f_n = \int_0^{\infty} \exp(-x) f(x) L_n(x) dx, \quad (2.6)$$

Якщо в формулах (2.5), (2.6) зробити заміну змінної  $x = \lambda t$ , де  $\lambda > 0$  - деяка стала, то отримаємо

$$f(t) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} f_n L_n(\lambda t); \quad (2.7)$$

$$f_n = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda t) f(t) L_n(\lambda t) dt. \quad (2.8)$$

Формулу (2.8) тепер можна розглядати як певне інтегральне перетворення функції  $f(t)$ , формулу (2.7) як формулу обернення цього перетворення. Число (параметр)  $\lambda$  при цьому можна використовувати як масштабний множник – при великих значеннях  $t$  обирати  $\lambda$  малим, а при малих значеннях  $t$  - великим, так, щоб добуток  $\lambda t$  знаходився в межах  $[0, 10]$ .

Очевидно, що за відомої функції  $f(t)$  після обчислення інтегралів (2.8) можна відшукати всі коефіцієнти ряду (2.7). Проте в нашому випадку функція  $f(t)$  є власне шуканою, а заданою - задача Коші, розв'язком якої є функція  $f(t)$ . Покажемо на простих прикладах, як наблизити задану функцію поліномами Лагерра з використанням задачі Коші, якій вона відповідає. Оскільки в подальших дослідженнях розглядатимуться параболічні та гіперболічні задачі математичної фізики виокремимо їх характерні розв'язки.

*а) коливні процеси (гіперболічні рівняння)*

Розглянемо типовий фундаментальний розв'язок гіперболічного рівняння  $f(t) = \sin(at)$ , де  $a$  - деяке дійсне число. Цій функції відповідає задача Коші

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + a^2 f = 0; \quad f(0) = 0, \quad \dot{f}(0) = a. \quad (2.9)$$

Застосуємо до цього рівняння інтегральне перетворення (2.6), тобто помножимо рівняння (2.9) на ядро перетворення  $\exp(-\lambda t)L_n(\lambda t)$  та виконаємо почленне інтегрування частинами на проміжку  $[0; +\infty)$ .

Для подальших викладок використаємо відомі формули диференціювання поліномів Лагерра [1]

$$\frac{dL_n(\lambda\tau)}{d\tau} = -\lambda \sum_{k=0}^{n-1} L_k(\lambda\tau); \quad \frac{d^2 L_n(\lambda\tau)}{d\tau^2} = -\lambda^2 \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) L_k(\lambda\tau). \quad (2.10)$$

Враховуючи (2.10) легко встановити формули диференціювання

$$\frac{d}{dt}(\exp(-\lambda t)L_n(\lambda t)) = -\lambda \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^n L_k(\lambda t); \quad (2.11)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\exp(-\lambda t)L_n(\lambda t)) = \lambda^2 \exp(-\lambda t) \sum_{k=0}^n (n-k+1) L_k(\lambda t). \quad (2.12)$$

Враховуючи, що

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{d^2 f}{dt^2} \exp(-\lambda t) L_n(\lambda t) dt &= \left\{ \frac{df}{dt} [\exp(-\lambda t) L_n(\lambda t)] \right\} \Big|_0^\infty - \left\{ f \frac{d}{dt} [\exp(-\lambda t) L_n(\lambda t)] \right\} \Big|_0^\infty + \\ &+ \int_0^\infty f(t) \frac{d^2}{dt^2} [\exp(-\lambda t) L_n(\lambda t)] dt, \end{aligned} \quad (2.13)$$

формули диференціювання (2.11), (2.12) та початкові умови, одержимо

$$\lambda^2 \sum_{k=0}^n (n-k+1) f_k + a^2 f_n - a = 0, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K}. \quad (2.14)$$

Тут враховано, що

$$\int_0^\infty f(t) \frac{d^2}{dt^2} [\exp(-\lambda t) L_n(\lambda t)] dt = \lambda^2 \sum_{k=0}^n (n-k+1) \int_0^\infty f(t) \exp(-\lambda t) L_k(\lambda t) dt =$$

$$= \lambda^2 \sum_{k=0}^n (n-k+1) f_k. \quad (2.15)$$

В послідовності (2.14) залишимо зліва лише доданки із  $f_n$ , а решту перенесемо в праву частину

$$(\lambda^2 + a^2) f_n = a - \lambda^2 \sum_{k=0}^{n-1} (n-k+1) f_k, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K} \quad \left( \sum_{k=0}^{-1} \equiv 0 \right) \quad (2.16)$$

і, відповідно,

$$f_n = \frac{a - \lambda^2 \sum_{k=0}^{n-1} (n-k+1) f_k}{\lambda^2 + a^2}, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K} \quad (2.17)$$

Формули (2.17) назвемо рекурентним розв'язком послідовностей рівнянь (2.14). Очевидно, що засобами дискретного аналізу розв'язок (2.17) можна записати у явному вигляді, проте, на практиці, для числової реалізації процедури знаходження коефіцієнтів розкладу в рядах типу (2.7) цілком достатньо рекурентного розв'язку.

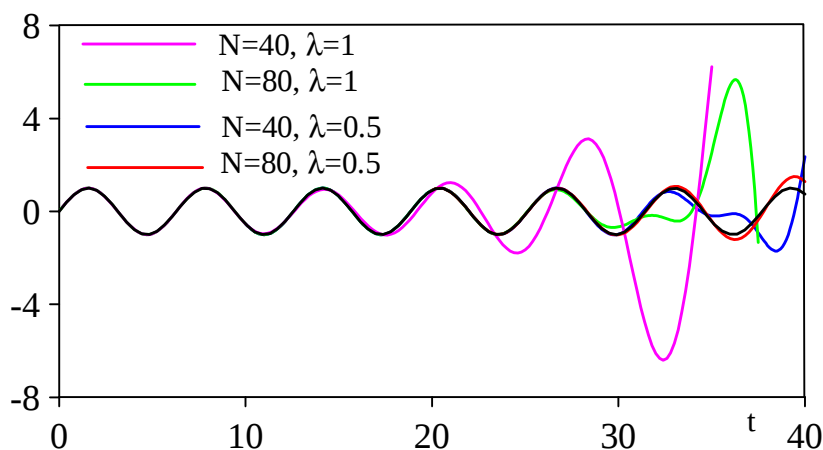


Рис.2.1. Наближення функції  $\sin(at)$  за розв'язком задачі Коші.

Числовий експеримент проводився для  $a = 1$  (рис. 2.1.). при цьому в ряді (2.7) утримувалась різна кількість доданків ( $N = 40$  і  $N = 80$ ) та вибирались різні значення масштабного множника  $\lambda$ . Як видно з рисунку, при значеннях  $t \leq 10$

наближення одержані при утриманні 40 та 80 членів ряду практично збігаються із функцією  $\sin(t)$ . З ростом  $t$  наближення одержане при  $N = 40$ ,  $\lambda = 1$  дає значну похибку. Збільшення доданків до  $N = 80$  покращує збіжність, проте лише до значень  $t < 30$ . Зменшення масштабного множника до значення  $\lambda = 0.5$  при утриманні 40 членів ряду продовжує інтервал хорошої збіжності наближення і оригінала десь до  $t = 35$ . І, нарешті, одночасне збільшення доданків та корекція масштабного множника приводить до задовільної збіжності на всьому інтервалі. Слід зазначити, що правильною корекцією масштабного множника та збільшенням кількості утримуваних членів ряду (2.7) можна досягти довільної точності наближення на довільному інтервалі зміни  $t$ .

*b) квазістатичні процеси (параболічні рівняння)*

Розглянемо тепер функцію  $f(t) = 1 - \exp(-at)$ , яка досить добре описує квазістатичні процеси і є розв'язком задачі Коші

$$\frac{df}{dt} + af = a; \quad f(0) = 0.$$

Поступаючи як і в попередньому випадку одержимо послідовність рівнянь

$$\lambda \sum_{k=0}^n f_k + af_n = \frac{a}{\lambda} \delta_{0,n}; \quad (\lambda + a) f_n = \frac{a}{\lambda} \delta_{0,n} - \lambda \sum_{k=0}^{n-1} f_k \quad (2.18)$$

та відповідний рекурентний розв'язок

$$f_0 = \frac{a}{\lambda(\lambda + a)}; \quad f_n = -\frac{\lambda}{\lambda + a} \sum_{k=0}^{n-1} f_k, \quad n = 1, 2, 3, \mathbf{K}.$$

Як видно з результатів числового експерименту, результати якого наведені на рисунку 2.2., у випадку квазістатичної задачі при утриманні 40 доданків в ряді (2.7) точність наближення можна регулювати лише масштабним множником  $\lambda$ .

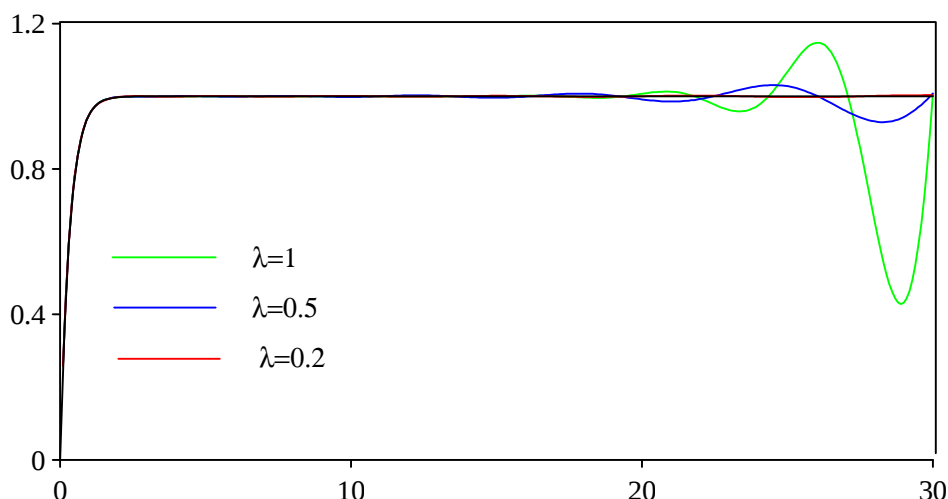


Рис.2.2. Наближення функції  $1 - \exp(-at)$  за розв'язком задачі Коші.

Ці результати можна також обґрунтувати теоретично. Зокрема використуючи відомі рекурентні співвідношення для поліномів Лагерра, формулу Крістофеля-Дарбу [1]

$$\sum_{n=0}^N \frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)} L_n^\alpha(\lambda t) L_n^\alpha(\lambda \tau) = \frac{(N+1)!}{\Gamma(N+\alpha+1)} \frac{L_N^\alpha(\lambda \tau) L_{N-1}^\alpha(\lambda t) - L_N^\alpha(\lambda t) L_{N-1}^\alpha(\lambda \tau)}{\tau - t}$$

та методологію праці [226] можна довести наступну теорему

**ТЕОРЕМА.** Якщо неперервна функція  $F(\tau)$  є абсолютно інтегрованою на проміжку  $[0; +\infty)$ , то є справедливою оцінка

$$|F(\tau) - S_N(\tau, F)| \leq M(\lambda \tau) \cdot o(N^{-3/2}), \quad (2.19)$$

де

$$S_N(\tau, F) = \lambda \sum_{n=0}^N F_n L_n(\lambda \tau); \quad F_n = \int_0^\infty \exp(-\lambda \tau) F(\tau) L_n(\lambda \tau) d\tau;$$

$$M(\lambda \tau) = \exp(\lambda \tau / 2) \cdot (\lambda \tau)^{-3/4}. \quad (2.20)$$

Як видно, в оцінку (2.19) входить обмежуюча функція  $M(x)$ , графік якої подано на рисунку 2.3. Очевидно, що значення цієї функції не впливає на

теоретичну оцінку збіжності ряду за Лагерром, проте може впливати на практичну збіжність при числовій реалізації.

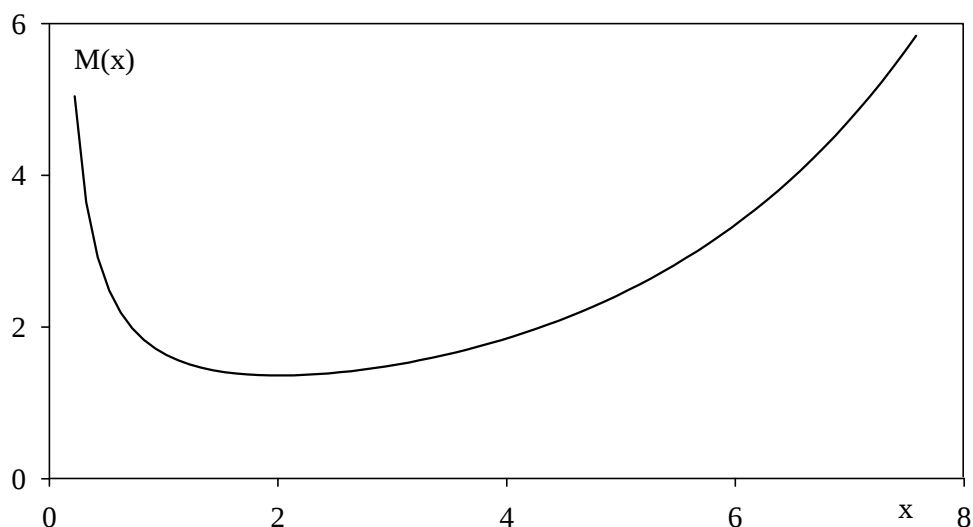


Рис. 2.3 Графічна табуляція функції  $M(x)$

Оскільки ця функція необмежено зростає при  $x \rightarrow 0$  і  $x \rightarrow \infty$ , то зміною значення параметра  $\lambda$  (зміною аргументу в функції  $M(x)$ ) можна керувати її максимальним значенням, а отже оптимізувати числову процедуру підсумовування ряду за поліномами Лагерра.

### 2.1.2. Ряд за поліномами Лагерра та інтегральне перетворення Лапласа

В літературі відомим є метод обернення інтегрального перетворення Лапласа з використанням поліномів Лагерра [4, 138]. Зокрема, якщо відома трансформанта за Лапласом від функції  $f(t) \leftrightarrow F(s)$ , то для знаходження оригіналу використовують формулу

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n L_n(t), \text{ де } f_n = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left[ \frac{1}{z} F\left(\frac{1}{z}\right) \right] \Bigg|_{z=1}. \quad (2.21)$$

Покажемо відмінність методу поліномів Лагерра та методу обернення перетворення Лапласа з використанням поліномів Лагерра на прикладі функції  $f(t) = \cos(at)$ .

Зображенням функції  $f(t)$  за Лапласом є функція [1]  $F(s) = \frac{s}{s^2 + a^2}$ , а тому для знаходження коефіцієнтів розкладу за рядом Лагерра згідно (2.21) слід використовувати формулу

$$f_n = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left[ \frac{1}{1 + z^2 a^2} \right] \Big|_{z=1}. \quad (2.22)$$

Метод поліномів Лагерра, як було показано вище, ґрунтується на використанні задачі Коші (чи початково-крайової задачі в складніших випадках) для шуканої функції. Очевидно, що для  $f(t)$  на інтервалі  $[0; +\infty)$  задача Коші має вигляд:

$$f'' + a^2 f = 0; \quad f(0) = 1; \quad f'(0) = 0. \quad (2.23)$$

Застосовуючи інтегральне перетворення Лагерра до задачі Коші (2.23) при  $\lambda = 1$  так само, як це було зроблено в попередньому підрозділі, прийдемо до рекурентного розв'язку:

$$f_n = \frac{n+1}{1+a^2} - \frac{1}{1+a^2} \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1) f_m, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K}. \quad (2.24)$$

Крім того, за стандартною процедурою знаходження коефіцієнтів рядів Фур'є,  $f_n$  знаходяться за формулою:

$$f_n = \int_0^{\infty} \cos(at) \exp(-t) L_n(t) dt.$$

Обчисливши інтеграл [47] знайдемо, що

$$f_n = \exp\left(\frac{p n i}{2}\right) \frac{a^n}{2} \left[ \frac{(1+ia)^{n+1} + (-1)^n (1-ia)^{n+1}}{(1+a^2)^{n+1}} \right] \quad (2.25)$$

Очевидно, що формули (2.22), (2.24), (2.25) дають ті самі значення коефіцієнтів розкладу (в цьому можна переконатись безпосередньою підстановкою

$n = 0, 1, 2, \mathbf{K}$ ), проте кожна з них відрізняється алгоритмом визначення цих коефіцієнтів. Зокрема, спосіб (2.25) вимагає аналітичного виразу для  $f(t)$ , а способи (2.22) і (2.24) лише початкової чи початково-крайової задачі, якій задовольняє  $f(t)$ .

Відмінність між способом (2.22) і (2.24) полягає в тому, що при застосуванні інтегрального перетворення Лагерра не конче знати всі його трансформанти, а достатньо одержати рекурентні співвідношення між ними, які легко реалізуються чисельно. В той же час, обернення інтегрального перетворення Лапласа з використанням рядів Лагерра вимагає додаткового аналітичного опрацювання формули (2.22), що при досить громіздких виразах для  $F(s)$  може становити окрему математичну проблему.

## **2.2. Застосування методу поліномів Лагерра до нестационарного рівняння теплопровідності та хвильового рівняння**

### **2.2.1. Зведення початково-крайової задачі теплопровідності до послідовності крайових задач.**

Розглянемо початково-крайову задачу для рівняння нестационарної теплопровідності:

$$\Delta T = a^2 \partial_t T; \quad (2.21)$$

$$T(\vec{r}, 0) = u; \quad (2.22)$$

$$\mathbf{L}T = h, \text{ на } S \quad (2.23)$$

в області  $D$  обмеженій поверхнею  $S$ . Тут  $\Delta$  - оператор Лапласа у вибраній системі координат,  $\mathbf{L}$  - диференціальний оператор, що визначає тип крайових умов,  $h$  - задана на  $S$  функція.

Розв'язок задачі (2.53)-(2.55) будемо шукати в класі функцій, що належать простору  $L_2(0, \infty; \lambda \exp(-\lambda t))$ , тобто виконується умова

$$\|T(\mathbf{r}, t)\|^2 = \lambda \int_0^\infty \exp(-\lambda t) |T(\mathbf{r}, t)|^2 dt < \infty,$$

де  $\lambda > 0$  деяке число (масштабний множник, використання якого обґрунтовано вище).

Тоді як і в попередньому підрозділі, у відповідність функції  $T(\mathbf{r}, t)$  можна поставити ряд за ортогональними поліномами Лагерра:

$$T(\mathbf{r}, t) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} T_n(\mathbf{r}) L_n(\lambda t), \quad (2.24)$$

де

$$T_n(\mathbf{r}) = \int_0^\infty \exp(-\lambda t) T(\mathbf{r}, t) L_n(\lambda t) dt. \quad (2.25)$$

Знову ж таки, надалі формулу (2.24) будемо розглядати як інтегральне перетворення функції  $T(\mathbf{r}, t)$  за змінною  $t$ , а ряд (2.25) як формулу обернення цього перетворення.

Застосовуючи до рівняння (2.21) інтегральне перетворення (2.25), аналогічно до результатів попереднього підрозділу, одержимо

$$\Delta T_n = -a^2 u + \lambda a^2 \sum_{k=0}^n T_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (2.26)$$

Після перенесення доданку при  $k = n$  з правої частини рівняння (2.26) до лівої прийдемо до трикутної послідовності рівнянь Гельмгольца з чисто уявним параметром:

$$\Delta T_n - \lambda a^2 T_n = -a^2 u + \lambda a^2 \sum_{k=0}^{n-1} T_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (2.27)$$

Застосування інтегрального перетворення (2.25) до крайової умови (2.23) дасть нам послідовність крайових умов на функції  $T_n(\mathbf{r})$ :

$$\mathbf{L}^* T_n = h_n, \text{ на } S, (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.28)$$

де  $\mathbf{L}^*$  і  $h_n$  - відповідно диференціальний оператор  $\mathbf{L}$  та функція  $h$  перетворені згідно формули (2.25).

Таким чином, вихідна початково-крайова задача (2.21)-(2.23) шляхом застосування інтегрального перетворення Лагерра звелась до послідовності крайових задач (2.27), (2.28), яка є трикутною: з ростом індекса  $n$  права частина рівнянь (2.27) поповнюється розв'язками, одержаними за попереднього значення індекса  $n$ .

Слід зазначити, що при  $n=0$  інтегральне перетворення (2.25) можна розглядати як інтегральне перетворення Лапласа з параметром перетворення  $\lambda$ . Цей факт зручно використовувати для асимптотичних оцінок розв'язку задачі (2.27)-(2.28) при  $t \rightarrow 0$  і  $t \rightarrow \infty$ , скориставшись при цьому теоремами про граничне значення для інтегрального перетворення Лапласа [1]. А саме,

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(\mathbf{r}, t) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_0(\mathbf{r}); \quad \lim_{t \rightarrow \infty} T(\mathbf{r}, t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} T_0(\mathbf{r}) \quad (2.29)$$

Розглянемо рівняння (2.26) і запишемо його розв'язок у вигляді

$$T_n(\mathbf{r}) = T_n^0(\mathbf{r}) + T_n^*(\mathbf{r}), \quad (2.30)$$

де  $T_n^*(\mathbf{r})$  - частковий розв'язок послідовності рівнянь (2.27), а  $T_n^0(\mathbf{r})$  - загальний розв'язок однорідної послідовності

$$\Delta T_n - \omega^2 T_n = \omega^2 \sum_{k=0}^{n-1} T_k, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.31)$$

де  $\omega^2 = \lambda a^2 > 0$ .

Частковий розв'язок  $T_n^*(\mathbf{r})$  при конкретному заданні функції  $u(\mathbf{r})$  будуватиметься традиційними методами і процедура його знаходження, зазвичай не викликає принципових труднощів, а тому, в подальшому, будемо вважати його відомим.

Загальний розв'язок послідовності (2.31) будемо шукати у вигляді алгебричної згортки двох послідовностей

$$T_n^0(\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^n [A_{n-j} G_j(\mathbf{r}) + B_{n-j} W_j(\mathbf{r})], \quad (2.32)$$

де  $A_k$  і  $B_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) - довільні сталі. Підставивши вираз (2.64) в рівняння (2.63) та згрупувавши члени біля сталих  $A_i$  та  $B_i$  знайдемо:

$$\begin{aligned} & A_0 [\Delta G_0(\mathbf{r}) - \omega^2 G_0(\mathbf{r})] + A_1 [\Delta G_1(\mathbf{r}) - \omega^2 G_1(\mathbf{r}) - \omega^2 G_0(\mathbf{r})] + \dots \\ & + A_n [\Delta G_n(\mathbf{r}) - \omega^2 G_n(\mathbf{r}) - \omega^2 \sum_{j=0}^{n-1} G_j(\mathbf{r})] + B_0 [\Delta W_0(\mathbf{r}) - \omega^2 W_0(\mathbf{r})] + \\ & + B_1 [\Delta W_1(\mathbf{r}) - \omega^2 W_1(\mathbf{r}) - \omega^2 W_0(\mathbf{r})] + \dots + B_n \left[ \Delta W_n(\mathbf{r}) - \omega^2 W_n(\mathbf{r}) - \omega^2 \sum_{j=0}^{n-1} W_j(\mathbf{r}) \right] = 0, \end{aligned}$$

звідки, внаслідок довільності сталих  $A_k$  і  $B_k$  одержимо, що

$$\Delta G_n - \omega^2 G_n = \omega^2 \sum_{j=0}^{n-1} G_j; \quad \Delta W_n - \omega^2 W_n = \omega^2 \sum_{j=0}^{n-1} W_j. \quad (2.33)$$

Отримані послідовності рівнянь співпадають з послідовностями рівнянь (2.31), а тому в якості функцій  $G_j(\mathbf{r})$  і  $W_j(\mathbf{r})$  можна взяти лінійно незалежні фундаментальні системи розв'язків трикутної послідовності рівнянь (2.31).

Слід зазначити, що ґрунтовне дослідження послідовностей (2.31) можна знайти у роботі [35]. Там же наводяться основні теореми про існування та єдиність розв'язку таких послідовностей.

**2.2.2. Фундаментальні розв'язки трикутних послідовностей звичайних диференціальних рівнянь у декартовій та полярній системах координат в одновимірному випадку.**

Розглянемо одновимірний випадок в прямокутній системі координат ( $\Delta = d_{xx}^2$ ,  $\mathbf{r} \rightarrow x$ ) і запишемо розв'язок рівняння (2.31) при  $n = 0$ :

$$T_0^0(x) = a_{0,0} \exp(-\omega x) + b_{0,0} \exp(\omega x).$$

З цього розв'язку та структури послідовності (2.31) видно, що функції  $G_j(x)$  та  $W_j(x)$  можна шукати, зокрема, методом невизначених коефіцієнтів, згідно з яким подамо ці функції у вигляді:

$$G_j(x) = \exp(-\omega x) \sum_{k=0}^j a_{j,k} x^k, \quad W_j(x) = \exp(\omega x) \sum_{k=0}^j b_{j,k} x^k. \quad (2.34)$$

Підставивши подання (2.34) у послідовності (2.33) та згрупувавши члени при однакових степенях  $x$  одержимо рекурентні співвідношення для визначення невідомих  $a_{j,p}$  та  $b_{j,p}$ :

$$a_{j,k+1} = \frac{(k+2)a_{j,k+2} + \omega^2 \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}}{2\omega(k+1)}; \quad b_{j,k+1} = -\frac{(k+2)b_{j,k+2} + \omega^2 \sum_{m=k}^{j-1} b_{m,k}}{2\omega(k+1)}. \quad (2.35)$$

У формулах (2.35)  $j = 1, 2, \dots$ ;  $k = 0, 1, \dots, j-1$ , а всі  $a_{j,k}$  і  $b_{j,k}$  при  $k > j$  тотожно рівні нулю. Зокрема, діагональні елементи визначаються формулами

$$a_{j,j} = \frac{\omega a_{j-1,j-1}}{2j}; \quad b_{j,j} = \frac{\omega b_{j-1,j-1}}{2j} \quad (2.36)$$

Крім того, всі  $a_{j,0}$  і  $b_{j,0}$  залишаються довільними, що є природнім, оскільки фундаментальних розв'язків є безліч. Це зручно використовувати при нормуванні функцій  $G_j(x)$  та  $W_j(x)$  (задаванні їх значення на границі).

Структуру співвідношень (2.35) можна спростити увівши розв'язки (2.34) у вигляді

$$G_j(x) = \exp(-\omega x) \sum_{k=0}^j a_{j,k} \frac{(\omega x)^k}{k!}, \quad W_j(x) = \exp(\omega x) \sum_{k=0}^j a_{j,k} \frac{(-\omega x)^k}{k!}. \quad (2.37)$$

Тоді рекурентні співвідношення відносно  $a_{j,k}$  набудуть вигляду:

$$a_{j,k+1} = 0,5 \left( a_{j,k+2} - \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k} \right). \quad (2.38)$$

Розглянемо тепер циліндричну систему координат  $(\Delta = r^{-1} \partial_r (r \partial_r), \mathbf{r} \rightarrow r)$

$$r^{-1} \partial_r (r \partial_r) G_j - w^2 G_j = w^2 \sum_{k=0}^{j-1} G_k; \quad r^{-1} \partial_r (r \partial_r) W_j - w^2 W_j = w^2 \sum_{k=0}^{j-1} W_k \quad (2.39)$$

і розглянемо його при  $j = 0$ :

$$r^{-1} \partial_r (r \partial_r) G_0 - w^2 G_0 = 0; \quad r^{-1} \partial_r (r \partial_r) W_0 - w^2 W_0 = 0. \quad (2.40)$$

Лінійно незалежні розв'язки цих рівнянь, як відомо [27] мають вигляд

$$G_0(r) = a_{0,0} I_0(wr), \quad W_0(r) = b_{0,0} K_0(wr), \quad (2.41)$$

З цих розв'язків та структури послідовності (2.39), поступаючи подібно випадку декартової системи координат, функції  $G_j(r)$  та  $W_j(r)$  подамо у вигляді:

$$G_j(r) = \sum_{k=0}^j a_{j,k} \left( \frac{wr}{2} \right)^k \frac{I_k(wr)}{k!}, \quad W_j(r) = \sum_{k=0}^j a_{j,k} \left( \frac{-wr}{2} \right)^k \frac{K_k(wr)}{k!}, \quad (2.42)$$

Після підстановки (2.42) в (2.39) та нескладних викладок одержимо рекурентні співвідношення відносно  $a_{j,k}$ :

$$a_{j,k+1} = \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k} \quad (2.43)$$

при довільних  $a_{j,0}$ .

### 2.2.3. Нестационарна одновимірна задача теплопровідності для багатошарової плити.

На тестовому прикладі одновимірної задачі нестационарної теплопровідності для багатошарової плити продемонструємо запропонований метод застосування інтегрального перетворення Лагерра до задач для шаруватих тіл. Розглянемо початково-крайову задачу теплопровідності для неоднорідного тіла, що складається з  $M$  плоско-паралельних шарів завтовшки  $h_i$  та коефіцієнтами теплопровідності і температуропровідності  $\lambda_T^{(i)}, a_T^{(i)}, i = \overline{1, M}$ . У безрозмірних змінних і величинах  $\gamma = x / H, \tau = a_T^{(0)} t / H^2$  задача теплопровідності формулюється у вигляді

$$\partial_{\gamma\gamma}^2 T^{(i)} = a_T^{(i)} \partial_{\tau} T^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (2.44)$$

$$T^{(i)} = 0, \tau = 0, \quad i = \overline{1, M}; \quad (2.45)$$

$$k_1^{(1)} \partial_{\gamma} T^{(1)} - k_2^{(1)} T^{(1)} = -q^{(1)}(\tau), \quad \gamma = 0; \quad (2.46)$$

$$k_1^{(M)} \partial_{\gamma} T^{(M)} + k_2^{(M)} T^{(M)} = q^{(M)}(\tau), \quad \gamma = 1; \quad (2.47)$$

$$T^{(i)} = T^{(i+1)}, \quad \lambda_T^{(i)} \partial_{\gamma} T^{(i)} = \lambda_T^{(i+1)} \partial_{\gamma} T^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad (2.48)$$

де  $a_T^{(i)} = a_T^{(0)} / a_T^{(i)}$ ,  $\lambda_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)} / \lambda_T^{(0)}$  – безрозмірні коефіцієнти температуро- і теплопровідності  $i$ -го шару;  $\gamma_i = x_i / H$  – безрозмірні координати поверхонь

поділу шарів;  $H \equiv \sum_{i=1}^M h_i$ ;  $a_0, \lambda_T^{(0)}$  – деякі «опорні» параметри, що вибираються із

міркувань зручності числового аналізу. Умови (2.46), (2.47) дають змогу врахувати на поверхнях  $\gamma = 0$  і  $\gamma = 1$  довільну комбінацію крайових умов 1-го, 2-го чи 3-го роду.

Застосування до рівнянь теплопровідності (2.44) інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною дає трикутну послідовність звичайних диференціальних рівнянь

$$d_{\gamma\gamma}^2 T_n^{(i)} - \beta_i^2 T_n^{(i)} = \beta_i^2 \sum_{m=0}^{n-1} T_m^{(i)}, \quad \beta_i = \sqrt{\lambda d_T^{(i)}}, \quad i = \overline{1, M}, \quad (2.49)$$

де  $T_n^{(i)}(\gamma) = \int_0^\infty \exp(-\lambda\tau) T^{(i)}(\gamma, \tau) L_n(\lambda\tau) d\tau$  – зображення за Лагерром.

З використанням результатів попереднього підрозділу загальний розв'язок послідовності (2.49) одержано у вигляді

$$T_n^{(i)}(\gamma) = \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i)} G_j^{(i)}(\gamma) + B_{n-j}^{(i)} W_j^{(i)}(\gamma) \right], \quad i = \overline{1, M}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.50)$$

де  $G_j^{(i)}(\gamma) = \exp(-\beta_i \gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^i \frac{(\beta_i \gamma)^k}{k!}$ ,  $W_j^{(i)}(\gamma) = \exp(\beta_i \gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^i \frac{(-\beta_i \gamma)^k}{k!}$ , а кое-

фіцієнти  $a_{j,k}^i$  задовольняють рекурентним співвідношенням

$$a_{j,k+1}^i = 0,5 \left( a_{j,k+2}^i - \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^i \right). \quad (2.51)$$

Для визначення сталих  $A_{n-j}$  і  $B_{n-j}$  слугують крайові умови (2.46), (2.47) та умови спряження (2.48), які після застосування інтегрального перетворення Лагерра набувають вигляду

$$k_1^{(1)} \partial_\gamma T_n^{(1)} - k_2^{(1)} T_n^{(1)} = -q_n^{(1)}, \quad \gamma = 0; \quad (2.52)$$

$$k_1^{(M)} \partial_\gamma T_n^{(M)} + k_2^{(M)} T_n^{(M)} = q_n^{(M)}, \quad \gamma = 1; \quad (2.53)$$

$$T_n^{(i)} = T_n^{(i+1)} \quad \lambda_T^{(i)} \partial_\gamma T_n^{(i)} = \lambda_T^{(i+1)} \partial_\gamma T_n^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (2.54)$$

Підстановка в умову (2.52) розв'язку (2.50) призводить для кожного  $n = 0, 1, 2, \dots$  до рівняння

$$\sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(1)} \left( k_1^{(1)} d_\gamma G_j^{(1)}(0) - k_2^{(1)} G_j^{(1)}(0) \right) + B_{n-j}^{(1)} \left( k_1^{(1)} d_\gamma W_j^{(1)}(0) - k_2^{(1)} W_j^{(1)}(0) \right) \right] = -\bar{q}_n^{(1)} \quad (2.55)$$

Залишимо в лівій частині лише доданки при  $j = 0$ , а решту перенесемо в праву частину. В результаті одержимо рекурентне рівняння

$$A_n^{(1)} b_{1,1} + B_n^{(1)} b_{1,2} = -\bar{q}_n^{(1)} - \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(1)} \left( k_1^{(1)} d_\gamma G_j^{(1)}(0) - k_2^{(1)} G_j^{(1)}(0) \right) + B_{n-j}^{(1)} \left( k_1^{(1)} d_\gamma W_j^{(1)}(0) - k_2^{(1)} W_j^{(1)}(0) \right) \right], \quad (2.56)$$

у якому коефіцієнти  $b_{1,1}$  і  $b_{1,2}$  лівої частини не залежать від  $n$  і мають структуру

$$b_{1,1} = k_1^{(1)} d_\gamma G_0^{(1)}(0) - k_2^{(1)} G_0^{(1)}(0); \quad b_{1,2} = k_1^{(1)} d_\gamma W_0^{(1)}(0) - k_2^{(1)} W_0^{(1)}(0).$$

Поступаючи так само з рештою умов (2.53), (2.54) одержимо системи лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР)

$$[b_{k,l}] \{A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, \dots, A_n^{(l)}, B_n^{(l)}, \dots, A_n^{(M)}, B_n^{(M)}\}^T = \{c_{n,k}\}^T, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.57)$$

в яких матриця  $[b_{k,l}]$  не залежить від номера  $n$ , а стовпчик вільних членів зі збільшенням  $n$  поповнюється попередніми розв'язками. Елементарними перетвореннями СЛАР (2.57) зведено до трикутного вигляду і записано її точний рекурентний розв'язок для довільної кількості шарів

$$\begin{aligned} B_n^{(M)} &= \frac{c_{n,2M}^*}{b_{2M,2M}^*}; \quad A_n^{(M)} = \frac{1}{b_{2M,2M}^*} \left( c_{n,2M-1}^* - B_n^{(M)} b_{2M-1,2M}^* \right); \\ B_n^{(i)} &= \frac{1}{b_{2i,2i}^*} \left( c_{n,2i}^* - B_n^{(i+1)} b_{2i,2i+2}^* - A_n^{(i+1)} b_{2i,2i+1}^* \right), \quad i = \overline{M-1, 1}; \\ A_n^{(i)} &= \frac{1}{b_{2i-1,2i-1}^*} \left( c_{n,2i-1}^* - B_n^{(i)} b_{2i-1,2i}^* \right), \quad i = \overline{M-1, 1}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

У формулах (2.58) коефіцієнти  $b_{i,j}^*$  та  $c_{n,i}^*$  пов'язані рекурентними співвідношеннями із відповідними коефіцієнтами  $b_{i,j}$  та  $c_{n,i}$  систем (2.57).

Остаточний розв'язок задачі (8) - (12) має вигляд ряду

$$T^{(i)}(g, t) = l \sum_{n=0}^{\infty} T_n^{(i)}(g) L_n(l t). \quad (2.59)$$

Важливо, що розв'язок (2.59) задовольняє рівнянням (8) за довільної кількості членів ряду (2.44). З другого боку, збільшення їхньої кількості дає можливість як завгодно точно задовольнити початкові умови (2.45) та апроксимувати із заданою точністю функції  $q^{(1)}(t)$  та  $q^{(M)}(t)$ , щоб задовольнити із заданою точністю крайові умови (2.46), (2.47). Внаслідок точного розв'язування систем (2.57) умови спряження виконуються теж точно. Тому все вищесказане поряд із відомою теоремою про коректність задач математичної фізики для параболічного рівняння теплопровідності дає підстави стверджувати, що отримано розв'язки, які із наперед заданою точністю визначають нестационарне температурне поле в шаруватій плиті із довільною кількістю складових, причому точність розв'язку достатньо контролювати лише за точністю задовольнення початкових умов та крайових умов на межі тіла.

#### 2.2.4. Застосування методу поліномів Лагерра до хвильового рівняння.

Суттєвою перевагою методу поліномів Лагерра над іншими методами математичної фізики, зокрема методом інтегрального перетворення Лапласа, є простота формули обернення - підсумовування ряду. Досліднику слід розробити лише алгоритм знаходження коефіцієнтів розкладу, який є типовим навіть для задач різного типу. Розглянемо зараз гіперболічний тип рівнянь, а саме хвильове рівняння

$$\Delta U = c^{-2} \partial_{tt}^2 U \quad (2.60)$$

і застосуємо до нього інтегральне перетворення Лагерра (2.8). Вважаючи початкові умови нульовими після описаних вище викладок одержимо послідовності рівнянь

$$\Delta U_n - \omega^2 U_n = \omega^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1) U_m, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K}, \quad (2.61)$$

де  $\omega^2 = c^{-2} \lambda^2$ . Поступаючи так само, як у випадку задачі теплопровідності можна показати, що загальний розв'язок трикутної послідовності (2.45) можна подати у вигляді алгебричної згортки

$$U_n(\mathbf{r}) = \sum_{j=0}^n [A_{n-j} G_j(\mathbf{r}) + B_{n-j} W_j(\mathbf{r})], \quad (2.62)$$

де  $A_{n-j}, B_{n-j}$  - набір сталих, що використовується для задовольняння крайовим умовам, а  $G_j(\mathbf{r})$  та  $W_j(\mathbf{r})$  - лінійно незалежні фундаментальні системи розв'язків послідовності (2.61).

Оскільки в подальших дослідженнях ми будемо використовувати прямокутну та циліндричну системи координат, то подамо спосіб визначення цих фундаментальних розв'язків в цих координатах в одновимірному випадку

а) прямокутна система координат

В цьому випадку фундаментальні розв'язки повинні задовольняти рівнянням

$$d_{xx}^2 G_j - \omega^2 G_j = \omega^2 \sum_{k=0}^{j-1} (j-k+1) G_k, \quad d_{xx}^2 W_j - \omega^2 W_j = \omega^2 \sum_{k=0}^{j-1} (j-k+1) W_k. \quad (2.63)$$

Рівняння (2.63) відрізняються від рівнянь (2.33) лише наявністю множника  $(j-k+1)$  в правій частині. Тому подавши їх у вигляді

$$G_j(x) = \exp(-\omega x) \sum_{k=0}^j a_{j,k} \frac{(\omega x)^k}{k!}, \quad W_j(x) = \exp(\omega x) \sum_{k=0}^j a_{j,k} \frac{(-\omega x)^k}{k!}, \quad (2.64)$$

одержимо рекурентні співвідношення

$$a_{j,k+1} = 0,5 \left( a_{j,k+2} - \sum_{m=k}^{j-1} (j-m+1) a_{m,k} \right) \quad (2.65)$$

при довільних  $a_{j,0}$ .

Відповідно, у випадку циліндричної системи координат, фундаментальні розв'язки послідовностей рівнянь (2.61) мають вигляд

$$G_j(r) = \sum_{k=0}^j a_{j,k} \left( \frac{wr}{2} \right)^k \frac{I_k(wr)}{k!}, \quad W_j(r) = \sum_{k=0}^j a_{j,k} \left( \frac{-wr}{2} \right)^k \frac{K_k(wr)}{k!}, \quad (2.66)$$

а відповідні рекурентні співвідношення

$$a_{j,k+1} = \sum_{m=k}^{j-1} (j-m+1) a_{m,k}. \quad (2.67)$$

#### 2.2.4. Інтегральні подання фундаментальних розв'язків.

Часом, із міркувань покращення збіжності числових розрахунків чи можливості отримання замкнутого розв'язку, фундаментальні послідовності зручно подати в іншій формі, використавши при цьому розв'язок вихідних рівнянь із використанням інтегрального перетворення Лапласа.

Покажемо це на прикладі хвильового рівняння в циліндричній системі координат. Фундаментальним розв'язкам в просторі оригіналів відповідає рівняння

$$\partial_{\rho\rho}^2 U + \rho^{-1} \partial_{\rho} U = c^{-2} \partial_{tt}^2 U \quad (2.68)$$

з відповідними нульовими початковими умовами.

Застосуємо до рівняння (2.52) інтегральне перетворення Лапласа. В результаті, за нульових початкових умов, одержимо

$$\partial_{\rho\rho}^2 \bar{U} + \rho^{-1} \partial_{\rho} \bar{U} - s^2 c^{-2} \bar{U} = 0, \quad (2.69)$$

де  $\bar{U}(\rho, s) = \int_0^{\infty} U(\rho, t) \exp(-st) dt$  - зображення функції  $U(\rho, t)$  за Лапласом.

Загальний розв'язок (2.53) має вигляд

$$\bar{U}(\rho, s) = A(s) I_0(c^{-1} s \rho) + B(s) K_0(c^{-1} s \rho) \quad (2.70)$$

Для прикладу виберемо другий фундаментальний розв'язок (його ми будемо використовувати в подальших дослідженнях) та покладемо, що  $B(s) = 1/s$  (ми це вправі зробити, оскільки фундаментальних розв'язків є безліч і ми можемо вибрати довільний з них).

За таблицями обернення перетворення Лапласа [1] знайдемо, що

$$U(\rho, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < c^{-1} \rho \\ \operatorname{arcch}(ct / \rho), & t > c^{-1} \rho \end{cases} \quad (2.71)$$

За відомим  $U(\rho, t)$  знайдемо інтегральне подання фундаментального розв'язку рівняння (2.45), який прямує до нуля при  $\rho \rightarrow \infty$  (аналог  $W_j(\rho)$ ):

$$W_j(\rho) = \int_{c^{-1} \rho}^{\infty} \exp(-\lambda t) \operatorname{arcch}(ct / \rho) L_j(\lambda t) dt. \quad (2.72)$$

Подібним чином можна знаходити інтегральні подання фундаментальних розв'язків в інших системах координат та для інших задач, наприклад, теплопровідності.

## 2.3 Метод рядів Неймана при розв'язуванні послідовностей парних інтегральних рівнянь

### 2.3.1 Метод рядів Неймана при розв'язуванні класичних парних інтегральних рівнянь.

Розглянемо систему парних інтегральних рівнянь наступного виду:

$$\int_0^{\infty} x^b (1 + f(x)) g(x) J_u(xa) dx = F(a), \quad 0 \leq a < 1 \quad (2.73)$$

$$\int_0^{\infty} g(x) J_u(xa) dx = 0, \quad 1 \leq a < \infty \quad (2.74)$$

Тут  $g(x)$  - шукана функція,  $b$  - задане число, таке, що  $-2 < b < 2$ ,  $J_u(xa)$  - функція Бесселя I-го роду порядку  $u$  ( $u > -1$ ),  $F(a)$  і  $f(x)$  - задані функції, причому  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

Рівняння (2.74) продовжимо на весь проміжок  $[0, \infty)$ :

$$\int_0^{\infty} g(x) J_0(xa) dx = j(a) S_+(1-a), \quad 1 \leq a < \infty \quad (2.75)$$

де  $j(a)$  - деяка невідома функція, задана на проміжку  $[0, 1)$ , а  $S_+(1-a)$  - одинична асиметрична функція Хевісайда.

Розв'язок рівняння (2.75) після застосування оберненого перетворення Ханкеля знайдемо у вигляді:

$$g(x) = x \int_0^1 a j(a) J_u(xa) da \quad (2.76)$$

З означення функції Бесселя знайдемо

$$J_u(xa) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{xa}{2}\right)^{2m+u}}{m! \Gamma(m+u+1)} = \frac{2^m a^u}{x^m} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a^{2m} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+m+u}}{m! \Gamma(m+u+1)} \quad (2.77)$$

Величину  $\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+m+u}$  розкладемо в ряд Неймана [1]:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+m+u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2m+2n+u+m}{n!} \Gamma(2m+n+u+m) J_{2m+2n+u+m}(x) \quad (2.78)$$

З формули (2.77) після нескладних перетворень отримаємо:

$$J_u(xa) = \frac{2^m a^u}{x^m \Gamma(u+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+u+m) \Gamma(k+u+m)}{k!} {}_2F_1(-k, k+m+u; u+1; a^2) J_{2k+u+m}(x) \quad (2.79)$$

де  $\Gamma(x)$  - гамма-функція, а  ${}_2F_1(a, b, c, z)$  - гіпергеометрична функція Гауса, яку можна виразити через ортогональні поліноми Якобі у вигляді:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(-k, k+m+u; u+1; a^2) &= \frac{k!}{(u+1)_k (2k+u+m)} \times \\ &\times \left[ (k+u+m) P_k^{(u,m)}(1-2a^2) + (k+u) P_{k-1}^{(u,m)}(1-2a^2) \right] \end{aligned} \quad (2.80)$$

Далі, підставимо вираз (2.80) в формулу (2.79) і згрупуємо члени біля  $P_k^{(u,m)}(1-2a^2)$ . Тоді, після врахування рекурентного співвідношення для функцій Бесселя [1]:

$$J_{h-1}(x) + J_{h+1}(x) = \frac{2h J_h(x)}{x}, \quad (2.81)$$

остаточно отримаємо:

$$J_u(xa) = \frac{2^{m+1} a^u}{x^{m+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+u+m+1) \frac{\Gamma(k+u+m+1)}{\Gamma(k+u+1)} P_k^{(u,m)}(1-2a^2) J_{2k+u+m+1}(x). \quad (2.82)$$

З урахуванням співвідношення (2.80) формула (2.76) набуде вигляду:

$$g(x) = x^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} a_k J_{2k+u+m+1}(x), \quad (2.83)$$

де

$$a_k = 2^{m+1} (2k + u + m + 1) \frac{\Gamma(k + u + m + 1)}{\Gamma(k + u + 1)} \int_0^1 a^{u+1} j(a) P_k^{(u, m)}(1 - 2a^2) da \quad (2.84)$$

Підставивши формулу (2.83) в рівняння (2.74) та перейшовши до почленного інтегрування легко пересвідчитись, що рівняння (2.58) задовольняється тотожно при довільних коефіцієнтах  $a_k$  (що є природнім внаслідок довільності функції  $j(a)$ ).

Покладемо  $m = -\frac{b}{2}$  і підставимо подання (2.83) в рівняння (2.73). Після обчислення деяких квадратур та врахування формули (2.80) прийдемо до співвідношення:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(k + u + m + 1)}{\Gamma(k + u + 1)} P_k^{(u, m)}(1 - 2a^2) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{n=0}^{\infty} (2n + u + m + 1) \frac{\Gamma(n + u + m + 1)}{\Gamma(n + u + 1)} \times \\ & \times P_n^{(u, \frac{b}{2})}(1 - 2a^2) \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x} J_{2k+u+m+1}(x) J_{2n+u+m+1}(x) dx = 2^{-\frac{b}{2}} a^{-u} F(a), \quad 0 \leq a < 1 \end{aligned} \quad (2.85)$$

Зазначимо, що коли  $a$  змінюється від 0 до 1, величина  $1 - 2a^2$  пробігає змінюється від -1 до 1, тобто аргумент в поліномах Якобі знаходиться на проміжку ортогональності. Використовуючи цей факт проведемо заміну  $1 - 2a^2 = g$ , помножимо рівність (2.85) на  $(1 - g)^u (1 + g)^{\frac{b}{2}} P_m^{(u, \frac{b}{2})}(g)$  і виконаємо інтегрування в межах від -1 до 1. Враховуючи ортогональність поліномів Якобі після очевидних спрощень одержимо

$$\begin{aligned} & \frac{a_m}{2m + \frac{b}{2} + u + 1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x} J_{2k+u+\frac{b}{2}+1}(x) J_{2m+u+\frac{b}{2}+1}(x) dx = \\ & = 2^{1-\frac{b}{2}} \frac{m!}{\Gamma\left(m + \frac{b}{2} + 1\right)} \int_0^1 a^{u+1} (1 - a^2)^{\frac{b}{2}} F(a) P_m^{(u, \frac{b}{2})}(1 - 2a^2) da \end{aligned} \quad (2.86)$$

Якщо ввести позначення:

$$\tilde{a}_m = a_m \left( 2m + \frac{b}{2} + u + 1 \right)^{-\frac{1}{2}}; \quad (2.87)$$

$$b_{km} = 2 \left( 2k + \frac{b}{2} + u + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left( 2m + \frac{b}{2} + u + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \frac{f(x)}{x} J_{2k+u+\frac{b}{2}+1}(x) J_{2m+u+\frac{b}{2}+1}(x) dx; \quad (2.88)$$

$$c_m = \frac{\left( 2m + \frac{b}{2} + n + 1 \right)^{\frac{1}{2}} m!}{2^{\frac{b}{2}-1} \Gamma\left(m + \frac{b}{2} + 1\right)} \int_0^1 a^{u+1} (1-a^2)^{\frac{b}{2}} F(a) P_m^{(u, \frac{b}{2})}(1-2a^2) da, \quad (2.89)$$

то співвідношення (2.86) можна записати як нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь з симетричною матрицею відносно невідомих  $a_k$

$$a_m + \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{km} = c_m, \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (2.90)$$

Якщо функція  $F(a)$  представлена через інтеграл Ханкеля:

$$F(a) = \int_0^\infty x \bar{F}(x) J_u(xa) dx, \quad 0 \leq a < 1, \quad (2.91)$$

де

$$\bar{F}(x) = \int_0^1 a F(a) J_u(xa) da, \quad (2.92)$$

то компоненти  $c_m$  матимуть вигляд:

$$c_m = 2 \left( 2m + \frac{b}{2} + u + 1 \right) \int_0^\infty x^{-\frac{b}{2}} \bar{F}(x) J_{2m+u+\frac{b}{2}+1}(x) dx. \quad (2.93)$$

### 2.3.2 Узагальнення методу рядів Неймана на трикутну послідовність парних інтегральних рівнянь та умови квазірегулярності одержаних послідовностей безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь

Розглянемо тепер трикутну послідовність парних інтегральних рівнянь відносно невідомої функції  $F_n(x)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ):

$$\int_0^{\infty} x^b [1 + f(x)] F_n(x) J_u(xr) dx = g_n(r) + \sum_{j=1}^n \int_0^{\infty} F_{n-j}(x) G_j(x) J_u(xr) dx, \quad 0 \leq r < 1 \quad (2.94)$$

$$\int_0^{\infty} F_n(x) J_u(xr) dx = 0, \quad r > 1, \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.95)$$

при  $2 < b < -2$ ,  $u > -1$ ,  $\frac{b}{2} + u > 1$ , де  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $G(x)$  - задані функції, а суму в правій частині рівності (2.94) будемо вважати рівною нулю при  $n = 0$ .

Розв'язок послідовності (2.94), (2.95), згідно з результатами попереднього підрозділу будемо шукати у вигляді ряду Неймана:

$$F_n(x) = x^{-\frac{b}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^n J_{2k+m}(x), \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.96)$$

при  $m = \frac{b}{2} + u + 1$ . Послідовність рівнянь (2.95) при цьому задовольняється тотожно при довільних коефіцієнтах розкладу, а самі коефіцієнти визначаються за допомогою послідовності нескінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь (ПНСЛАР):

$$\tilde{a}_m^n + \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{a}_k^n b_{km} = c_m^n, \quad (2.97)$$

де

$$\tilde{a}_m^n = a_m^n (2m + m)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.98)$$

$$b_{km} = 2\sqrt{2k+m} \sqrt{2m+m} \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} J_{2k+m}(t) J_{2m+m}(t) dt, \quad (2.99)$$

$$c_m^n = 2\sqrt{2m+m} \int_0^\infty \left[ \frac{g_n(t)}{t^{\frac{b}{2}}} + \sum_{j=1}^n \frac{F_{n-1}(t)G_j(t)}{t^{1+\frac{b}{2}}} \right] J_{2k+m}(t) dt, \quad (2.100)$$

$$\bar{g}_n(t) = \int_0^\infty r g_n(r) J_u(tr) gr. \quad (2.101)$$

Покажемо, що має місце теорема.

Теорема. Нехай неперервні на проміжку  $[0, \infty)$  функції  $f(t)$  і  $t^{-b}G_j(t)$ , ( $j=1, 2, \dots$ ) поводитись себе при  $t \rightarrow 0$ , як  $t^l$ , де  $l > -(2b+u+2)$  і зникають на нескінченності як  $t^{-h}$ , де  $h \geq 1$ , а функції  $g_n(r)$  і  $\partial_r g_n(r)$ , ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) є обмеженими на проміжку  $[0, 1)$ . Тоді розв'язок ПНСЛАР (2.97) можна знайти методом редукції.

Доведення. Використовуючи формулу підсумовування:

$$\sum_{k=0}^\infty (2k+m) J_{2k+m}(t) J_{2k+m}(z) = \frac{tz}{2} \int_0^1 x J_{m-1}(tx) J_{m-1}(zx) dx \quad (2.102)$$

легко показати справедливості співвідношення

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty (b_{km})^2 &= 4 \sum_{k=0}^\infty \sum_{m=0}^\infty (2k+m)(2m+m) \left[ \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} J_{2k+m}(t) J_{2m+m}(t) dt \right]^2 = \\ &= \int_0^1 x \int_0^1 y M^2(x, y) dy dx, \end{aligned} \quad (2.103)$$

де введено позначення:

$$M(x, y) = \int_0^\infty t f(t) J_{\frac{b}{2}+u}(xt) J_{\frac{b}{2}+u}(yt) dt \quad (2.104)$$

Якщо функція  $f(t)$  поводить себе при  $t \rightarrow \infty$  як  $t^{-h}$ , де  $h \geq 1$ , то інтеграл (2.88), як відомо з теорії розривних інтегралів Вебера-Шафхейтліна [21], при  $h > 1$  є неперервною функцією від змінних  $x$  і  $y$ , при  $x > 0$  і  $y > 0$ , а при  $x \rightarrow 0$ , або  $y \rightarrow 0$  функція  $M(x, y)$  веде себе, як  $t^{\frac{b}{2}+u}$ , але, оскільки  $\frac{b}{2} + u > -1$ , то інтеграл в

правій частині рівності (2.104) буде існувати принаймні як невластний. Якщо ж  $h=1$ , то функція  $M(x, y)$  при  $x \rightarrow y$  матиме логарифмічну особливість, яка є інтегрованою. Таким чином, якщо функція  $f(t)$  задовольняє умовам теореми, то має місце наступне співвідношення:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} (b_{km})^2 < \infty \quad (2.105)$$

Праву частину послідовності (2.97) представимо у вигляді:

$$c_m^n = c_{m,1}^n + c_{m,2}^n \quad (2.106)$$

$$c_{m,1}^n = 2\sqrt{2m+m} \int_0^{\frac{b}{t^2}} \frac{\bar{g}_n(t)}{t^{\frac{b}{2}}} J_{2k+m}(t) dt,$$

$$c_{m,2}^n = 2\sqrt{2m+m} \sum_{j=1}^n \int_0^{\frac{b}{t^{1+\frac{b}{2}}}} \frac{F_{n-j}(t) G_j(t)}{t^{1+\frac{b}{2}}} J_{2k+m}(t) dt,$$

Далі знайдемо, що:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} (c_{m,1}^n)^2 &= 2 \int_0^1 x \left[ \int_0^{\frac{b}{t^2}} \bar{g}_n(t) J_{u+\frac{b}{2}}(xt) dt \right]^2 dx = \frac{2^{1-\frac{b}{2}}}{\Gamma\left(\frac{b}{2}+1\right)} \int_0^1 x^{-b-2u-1} \times \\ &\times \left[ \partial_x x^b \int_0^x r^{1+u} g_n(r) \left(1 - \frac{r^2}{x^2}\right)^{\frac{b}{2}} dr \right]^2 dx = \frac{2^{1-\frac{b}{2}}}{\Gamma\left(\frac{b}{2}+1\right)} \int_0^1 x^{1+b} \times \\ &\times \left\{ (2+b+u) \left[ \int_0^1 t^{1+u} g_n(tx) (1-t^2)^{\frac{b}{2}} dt \right]^2 + x^2 \left[ \int_0^1 t^{2+u} g_n'(tx) (1-t^2)^{\frac{b}{2}} dt \right]^2 \right\} dx. \end{aligned} \quad (2.107)$$

Якщо функції  $g_n(r)$  задовольняють умовам теореми, то інтеграли в формулі (2.107) існують і є скінченними, а тому є справедливою умова:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (c_{m,1}^n)^2 < \infty \quad (2.108)$$

Аналогічно знайдемо, що:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (c_{m,2}^n)^2 = 2 \sum_{j=1}^n \int_0^1 x \left[ \int_0^{\infty} F_{n-j} t^{-\frac{b}{2}} G_j(t) J_{\frac{b}{2}+u}(xt) dt \right]^2 dx \quad (2.109)$$

Далі, використовуючи представлення (2.109) та нерівність Коші, отримаємо:

$$\begin{aligned} \left[ \int_0^{\infty} F_{n-j} t^{-\frac{b}{2}} G_j(t) J_{\frac{b}{2}+u}(xt) dt \right]^2 &= \left[ \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{n-j} \int_0^{\infty} t^{-b} G_j(t) J_{2k+m}(t) J_{\frac{b}{2}+u}(tx) dt \right]^2 \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_k^{n-j})^2}{(2k+m)} + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+m) \left[ \int_0^{\infty} t^{-b} G_j(t) J_{2k+m}(t) J_{\frac{b}{2}+u}(tx) dt \right]^2 = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{a}_k^{n-j})^2 + 0,5 \int_0^1 y \left[ \int_0^{\infty} t^{1-b} G_j(t) J_{\frac{b}{2}+u}(yt) J_{\frac{b}{2}+u}(tx) dt \right]^2 dy \end{aligned} \quad (2.110)$$

З врахуванням співвідношення (2.110) формула (2.109) набуде вигляду:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (c_{m,2}^n)^2 \leq 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{a}_k^{n-j})^2 + \sum_{j=1}^n \int_0^1 x \int_0^1 y M_1^2(x, y) dy dx, \quad (2.111)$$

де

$$M_1(x, y) = \int_0^{\infty} t^{1-b} G_j(t) J_{\frac{b}{2}+u}(xt) J_{\frac{b}{2}+u}(yt) dt$$

Тепер, якщо функція  $t^{1-b} G_j(t)$ , ( $j=1, 2, \dots$ ) задовольняє умовам теореми, то аналогічно до того, як це робилось вище можна показати, що повторний інтеграл в правій частині рівності (2.111) існує і є скінченним. Позначимо через  $M_c$  його значення і остаточно отримаємо:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (c_{m,2}^n)^2 \leq 2 \sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{a}_k^{n-j})^2 + M_c \quad (2.112)$$

За допомогою нерівності Мінковського встановимо наступне співвідношення:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (c_m^n)^2 \leq \sum_{m=0}^{\infty} (c_{m,1}^n + c_{m,2}^n)^2 \leq \sum_{m=0}^{\infty} (c_{m,1}^n)^2 + \sum_{m=0}^{\infty} (c_{m,2}^n)^2 + 2 \left( \sum_{m=0}^{\infty} (c_{m,1}^n)^2 \sum_{m=0}^{\infty} (c_{m,2}^n)^2 \right) \quad (2.113)$$

Крім того при  $n=0$ :

$$\sum_{m=0}^{\infty} (c_m^0)^2 = \sum_{m=0}^{\infty} (c_{m,1}^0)^2 < \infty$$

а тому, оскільки умова (2.108) виконується для всіх  $n$ , розв'язок системи (2.97) при  $n=0$  може бути отриманий методом редукції, причому виконуватиметься умова:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k^0)^2 < \infty. \quad (2.114)$$

Нерівність (2.112) дасть нам тепер:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (c_{m,2}^1)^2 \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} (\tilde{a}_k^0)^2 + M_c < \infty,$$

звідки за допомогою співвідношень (2.108), (2.114) знайдемо:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (c_m^1)^2 < \infty. \quad (2.115)$$

Виконання умови (2.115) дозволяє нам застосовувати метод редукції до системи (2.97) при  $n=1$ , причому отриманий розв'язок знову ж таки буде задовольняти умові:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k^1)^2 < \infty. \quad (2.116)$$

Продовживши аналогічні міркування переконаємось, що права частина в послідовності (2.97) така, що:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (c_m^n)^2 < \infty, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2.117)$$

а, отже, розв'язок ПНСЛАР (2.97), що задовольняє умові

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k^n)^2 < \infty, \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2.118)$$

може бути знайдений методом редукції. Таким чином теорема доведена.

Зауваження. Слід зазначити, що умова обмеженості функції  $\partial_r g_n(r)$  не є необхідною умовою. Покладемо, наприклад:

$$g_n(r) = f_n S(1-r),$$

звідки отримаємо:

$$\partial_r g_n(r) = -f_n d(1-r).$$

Але при цьому  $\bar{g}_n(x) = f_n \int_0^1 r J_u(rx) dr$  і, зокрема, при  $u=0$ :

$$\bar{g}_n(x) = f_n x^{-1} J_1(x) \quad c_{m,1}^n = 2 \left( 2m + \frac{b}{2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} f_n \int_0^\infty x^{-1-\frac{b}{2}} J_1(x) J_{2m+\frac{b}{2}+1}(x) dx = d_n d_{0m}$$

Очевидно, що умова  $(c_{m,1}^n)^2 < \infty$  виконуватиметься при  $n=0,1,2,\dots$ . Тому для кожного конкретного випадку, при якому  $g_n(r)$  не задовольняє умовам теореми, доцільно безпосередньо розглядати рівність (2.44) і перевіряти умову (2.46).

## Висновки до розділу 2

- На відміну від класичного способу визначення коефіцієнтів розкладу в ряди за поліномами Лагерра функції  $f(t)$ , показано, що таке визначення можливе із задачі Коші, якій задовольняє функція  $f(t)$ , при цьому алгоритм визначення коефіцієнтів розкладу абсолютно ідентичний до алгоритму застосування методу інтегральних перетворень, що дало підстави сформулювати означення інтегрального перетворення Лагерра.
- Розглянуто дві типові задачі Коші, розв'язки яких відповідають часовій поведінці розв'язків задач математичної фізики параболічного та гіперболічного типів та одержано їх рекурентні розв'язки в просторі зображень за Лагерром. Одночасно проведено теоретичне обґрунтування та числову ілюстрацію застосування введеного в аргумент поліномів Лагерра

масштабного множника. На конкретному прикладі показано відмінність інтегрального перетворення Лагерра від одного із способів обернення інтегрального перетворення Лапласа.

- Із застосуванням інтегрального перетворення Лагерра початково-крайові задачі теплопровідності в одновимірному випадку прямокутної та полярної систем координат зведено до трикутних послідовностей звичайних диференціальних рівнянь. Знайдено загальні розв'язки цих послідовностей у вигляді алгебричних згорток та показано спосіб одержання їх фундаментальних розв'язків в двох системах координат.
- На прикладі одновимірної нестационарної задачі теплопровідності для багатошарової плити продемонстровано застосування запропонованого методу до задач для структурно-неоднорідних тіл.
- Викладки аналогічні до результатів другого підрозділу зроблені і для випадку хвильового рівняння. Для зручності числової реалізації фундаментальні розв'язки одержано також в інтегральній формі.
- Розроблено методику розв'язування систем парних інтегральних рівнянь, які виникають при застосуванні методу інтегральних перетворень до задач із змішаними крайовими умовами. При цьому, шляхом розкладу невідомої функції в ряд Неймана з довільними коефіцієнтами розкладу, вдається задовольнити умови на одному із інтервалів зміни крайових умов, а самі коефіцієнти знаходяться із нескінчених систем лінійних алгебричних рівнянь. Ця методика поширена на випадок трикутних послідовностей парних інтегральних рівнянь, характерних для трансформованих за Лагерром нестационарних задач зі змішаними крайовими умовами. При цьому вдалося з'ясувати умови на відомі вхідні функції при яких послідовності нескінчених систем лінійних алгебричних рівнянь є квазірегулярними і, відповідно, дають змогу застосовувати до них метод редукції.

## РОЗДІЛ 3

### КВАЗІСТАТИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ПЛОСКО- ШАРУВАТИХ ТІЛ І СЕРЕДОВИЩ

#### 3.1 Нестационарні двовимірні задачі теплопровідності для плоско- шаруватих тіл і середовищ

##### 3.1.1 Нестационарна осесиметрична задача теплопровідності для плоскошаруватої плити

Розглянемо композит, віднесений до циліндричної системи координат  $r, z$  ( $0 \leq r < \infty; 0 \leq z \leq H$ ), що складається з  $M$  шарів різної товщини та з різними фізико-механічними властивостями. При цьому вважатимемо, що між шарами виконуються умови ідеального теплового контакту. В момент часу  $t=0$  на його граничній поверхні  $z=0$  починає діяти джерело тепла інтенсивності  $q(r, t)$ , а на граничній поверхні  $z=H$  відбувається теплообмін за законом Ньютона із середовищем нульової температури. Вважаючи початкову температуру композита рівною нулю, температурне поле в ньому визначимо розв'язком початково-крайової задачі:

$$\partial_{rr}^2 T^{(i)} + r^{-1} \partial_r T^{(i)} + \partial_{zz}^2 T^{(i)} = a_i^{-1} \partial_t T^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (3.1)$$

$$T^{(i)}(r, z, 0) = 0, \quad i = \overline{1, M}; \quad (3.2)$$

$$\lambda_T^{(1)} \partial_z T^{(1)} = -q(r, t), \quad z = 0; \quad (3.3)$$

$$\lambda_T^{(M)} \partial_z T^{(M)} + \upsilon_M T^{(M)} = 0, \quad z = H; \quad (3.4)$$

$$T^{(i)} = T^{(i+1)}, \quad z = z_i, \quad i = \overline{1, M-1}; \quad (3.5)$$

$$\lambda_T^{(i)} \partial_z T^{(i)} = \lambda_T^{(i+1)} \partial_z T^{(i+1)}, \quad z = z_i, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad (3.6)$$

де  $T^{(i)}(r, z, t)$  - температурне поле в  $i$ -му шарі,  $\lambda_T^{(i)}$ ,  $a_i$  - відповідно, коефіцієнти тепло- і теплопровідності  $i$ -го шару,  $\upsilon$  - коефіцієнт тепловіддачі з

поверхні  $z = H$ ,  $z_i = \sum_{k=1}^i h_k$ , а  $h_i$  - товщина  $i$ -го шару.

Введемо в розгляд безрозмірні змінні і величини  $\rho = r/d$ ,  $\gamma = z/d$ ,  $\tau = a_0 t / d^2$ ,  $\mathfrak{a}_i = a_i / a_0$ ,  $\mathfrak{\lambda}_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)} / \lambda_T^{(0)}$ ,  $Bi = \upsilon d / \lambda_T^{(0)}$ ,  $q^*(\rho, \tau) = q(r, t) / \lambda_T^{(0)}$ ,  $\gamma_i = z_i / d$ ,  $\mathfrak{h}_i = h_i / d$ , де  $a_0$ ,  $\lambda_T^{(0)}$  - деякі «опорні» характеристики,  $d$  - лінійний розмір (вибираються з міркувань зручності при числовому аналізі задачі). В термінах цих змінних і величин початково-крайова задача (3.1)-(3.6) набуде вигляду

$$\partial_{\rho\rho}^2 T_n^{(i)} + \rho^{-1} \partial_\rho T_n^{(i)} + \partial_{\gamma\gamma}^2 T_n^{(i)} = \mathfrak{a}_i^{-1} \partial_\tau T_n^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (3.7)$$

$$T_n^{(i)} = 0, \tau = 0, \quad i = \overline{1, M}; \quad (3.8)$$

$$\mathfrak{\lambda}_T^{(1)} \partial_\gamma T_n^{(1)} = -q^*(\rho, \tau), \quad \gamma = 0; \quad (3.9)$$

$$\partial_\gamma T_n^{(M)} + Bi T_n^{(M)} = 0, \quad \gamma = \gamma_M; \quad (3.10)$$

$$T_n^{(i)} = T_n^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad (3.11)$$

$$\mathfrak{\lambda}_T^{(i)} \partial_\gamma T_n^{(i)} = \mathfrak{\lambda}_T^{(i+1)} \partial_\gamma T_n^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (3.12)$$

Застосуємо до рівнянь (3.7), крайових умов (3.9), (3.10) та умов спряження (3.11), (3.12) інтегральне перетворення Лагерра за змінною  $\tau$ . Згідно результатів попереднього розділу, врахувавши нульові початкові умови (3.8) одержимо трикутну послідовність крайових задач

$$\partial_{\rho\rho}^2 T_n^{(i)} + \rho^{-1} \partial_\rho T_n^{(i)} + \partial_{\gamma\gamma}^2 T_n^{(i)} - \lambda \mathfrak{a}_i^{-1} T_n^{(i)} = \lambda \mathfrak{a}_i^{-1} \sum_{m=0}^{n-1} T_m^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (3.13)$$

$$\mathfrak{\lambda}_T^{(1)} \partial_\gamma T_n^{(1)} = -q_n(\rho), \quad \gamma = 0; \quad (3.14)$$

$$\partial_\gamma T_n^{(M)} + Bi T_n^{(M)} = 0, \quad \gamma = \gamma_M; \quad (3.15)$$

$$T_n^{(i)} = T_n^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}; \quad (3.16)$$

$$\mathfrak{\lambda}_T^{(i)} \partial_\gamma T_n^{(i)} = \mathfrak{\lambda}_T^{(i+1)} \partial_\gamma T_n^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}, \quad (3.17)$$

$$\text{де } T_n^{(i)}(\rho, \gamma) = \int_0^\infty \exp(-\lambda\tau) T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) L_n(\lambda\tau) d\tau, \quad q_n(\rho) = \int_0^\infty \exp(-\lambda\tau) q(\rho, \tau) L_n(\lambda\tau) d\tau.$$

З огляду на осьову симетрію задачі, застосуємо до рівняння (3.13) та умов (3.14)-(3.15) інтегральне перетворення Ганкеля за радіальною змінною  $\rho$  [223]. В результаті одержимо:

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - \omega_i^2 \bar{T}_n^{(i)} = \beta_i \sum_{m=0}^{n-1} \bar{T}_m^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (3.18)$$

$$\lambda_T^{(1)} d_{\gamma} \bar{T}_n^{(1)} = -\bar{q}_n(\xi), \quad \gamma = 0; \quad (3.19)$$

$$\partial_{\gamma} \bar{T}_n^{(M)} + Bi \bar{T}_n^{(M)} = 0, \quad \gamma = \gamma_M; \quad (3.20)$$

$$\bar{T}_n^{(i)} = \bar{T}_n^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}; \quad (3.21)$$

$$\lambda_T^{(i)} d_{\gamma} \bar{T}_n^{(i)} = \lambda_T^{(i+1)} d_{\gamma} \bar{T}_n^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (3.22)$$

У формулах (3.18) - (3.22)  $\omega_i^2 = \xi^2 + \beta_i$ ,  $\beta_i = \lambda/d_i$ ,

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \int_0^\infty \xi \left[ \int_0^\infty \exp(-\lambda\tau) T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) L_n(\lambda\tau) d\tau \right] J_0(\xi\rho) d\rho \quad (3.23)$$

- зображення за Лагерром і Ганкелем,  $\xi$  - параметр перетворення за Ганкелем. Надалі подвійне інтегральне перетворення (3.23) будемо називати інтегральним перетворенням Ганкеля-Лагерра.

Загальний розв'язок трикутної послідовності (3.18) згідно результатів попереднього розділу подамо у вигляді алгебричної згортки:

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \gamma) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \gamma) \right], \quad i = \overline{1, M}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.24)$$

де

$$G_j(\xi, \gamma) = \exp(-\omega_i \gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^i \frac{(\omega_i \gamma)^k}{k!}; \quad W_j(\xi, \gamma) = \exp(\omega_i \gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^i \frac{(-\omega_i \gamma)^k}{k!}, \quad (3.25)$$

а коефіцієнти  $a_{j,k}^i(\xi)$  задовольняють рекурентним співвідношенням:

$$a_{j,k+1}^i = 0.5 \left( a_{j,k+2}^i - \frac{\beta_i}{\omega_i^2} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^i \right). \quad (3.26)$$

Безпосередня підстановка розв'язку (3.24) в умови (3.19)-(3.22) приводить до співвідношень:

$$\kappa_T^{(1)} \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(1)}(\xi) d_\gamma G_j^{(1)}(\xi, 0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi) d_\gamma W_j^{(1)}(\xi, 0) \right] = -\bar{q}_n(\xi); \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(M)}(\xi) \left( d_\gamma G_j^{(M)}(\xi, \gamma_M) - B_i G_j^{(M)}(\xi, \gamma_M) \right) + \right. \\ \left. + B_{n-j}^{(M)}(\xi) \left( d_\gamma W_j^{(M)}(\xi, \gamma_M) - B_i W_j^{(M)}(\xi, \gamma_M) \right) \right] = 0; \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) \right] = \\ = \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i+1)}(\xi) G_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) W_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) \right], \quad i = \overline{1, M-1}; \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \kappa_T^{(i)} \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i)}(\xi) d_\gamma G_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) d_\gamma W_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) \right] = \\ = \kappa_T^{(i+1)} \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i+1)}(\xi) d_\gamma G_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) d_\gamma W_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) \right], \quad i = \overline{1, M-1}; \end{aligned} \quad (3.30)$$

В рівностях (3.27)-(3.29) залишимо в правій частині доданки при  $j=0$ , а решту перенесемо в праву частину:

$$A_n^{(1)}(\xi)d_\gamma G_0^{(1)}(\xi, 0) + B_n^{(1)}(\xi)d_\gamma W_0^{(1)}(\xi, 0) = -\frac{\bar{q}_n(\xi)}{\lambda_T^{(1)}} - \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(1)}(\xi)d_\gamma G_j^{(1)}(\xi, 0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi)d_\gamma W_j^{(1)}(\xi, 0) \right]; \quad (3.31)$$

$$A_n^{(M)}(\xi) \left( d_\gamma G_0^{(M)}(\xi, \gamma_M) - B_i G_0^{(M)}(\xi, \gamma_M) \right) + B_n^{(M)}(\xi) \left( d_\gamma W_0^{(M)}(\xi, \gamma_M) - B_i W_0^{(M)}(\xi, \gamma_M) \right) = - \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(M)}(\xi) \left( d_\gamma G_j^{(M)}(\xi, \gamma_M) - B_i G_j^{(M)}(\xi, \gamma_M) \right) + B_{n-j}^{(M)}(\xi) \left( d_\gamma W_j^{(M)}(\xi, \gamma_M) - B_i W_j^{(M)}(\xi, \gamma_M) \right) \right]; \quad (3.32)$$

$$A_n^{(i)}(\xi) G_0^{(i)}(\xi, \gamma_i) + B_n^{(i)}(\xi) W_0^{(i)}(\xi, \gamma_i) - A_n^{(i+1)}(\xi) G_0^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) - B_n^{(i+1)}(\xi) W_0^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) = - \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) \right] + \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(i+1)}(\xi) G_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) W_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) \right], \quad i = \overline{1, M-1}; \quad (3.33)$$

$$\lambda_T^{(i)} \left[ A_n^{(i)}(\xi) d_\gamma G_0^{(i)}(\xi, \gamma_i) + B_n^{(i)}(\xi) d_\gamma W_0^{(i)}(\xi, \gamma_i) \right] - \lambda_T^{(i+1)} \left[ A_n^{(i+1)}(\xi) d_\gamma G_0^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) + B_n^{(i+1)}(\xi) d_\gamma W_0^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) \right] = - \lambda_T^{(i)} \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(i)}(\xi) d_\gamma G_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) d_\gamma W_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) \right] + \lambda_T^{(i+1)} \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(i+1)}(\xi) d_\gamma G_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) d_\gamma W_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) \right], \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (3.34)$$

Одержані співвідношення слугують для послідовного визначення невідомих  $A_n^{(i)}(\xi)$  та  $B_n^{(i)}(\xi)$ . Покладемо, що довільні сталі  $a_{j,0}$  у формулах (3.26) мають вигляд

$$a_{0,0}^i = 1, a_{0,0}^i \equiv 0, j = 1, 2, \dots, i = \overline{1, M}. \quad (3.35)$$

Тоді, відповідно:

$$\begin{aligned}
G_0^{(i)}(\xi, \gamma) &= \exp(-\omega_i \gamma), \quad d_\gamma G_0^{(i)}(\xi, \gamma) = -\omega_i \exp(-\omega_i \gamma), \\
W_0^{(i)}(\xi, \gamma) &= \exp(\omega_i \gamma), \quad d_\gamma W_0^{(i)}(\xi, \gamma) = \omega_i \exp(\omega_i \gamma).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Враховуючи вирази (3.36) співвідношення (3.31)-(3.34) запишемо у вигляді рекурентної послідовності систем лінійних алгебричних рівнянь

$$[b_{k,l}] \{A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, \dots, A_n^{(l)}, B_n^{(l)}, \dots, A_n^{(M)}\}^T = \{c_{n,k}\}^T, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.37}$$

В системах (3.37) структура матриці  $b_{k,l}$  має вигляд

$$\begin{pmatrix}
b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & & & & & \mathbf{L} \\
b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & 0 & & & \mathbf{L} \\
b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & 0 & & & \mathbf{L} \\
& & & & & & & \mathbf{L} \\
0 & \mathbf{L} & 0 & b_{2i,2i-1} & b_{2i,2i} & b_{2i,2i+1} & b_{2i,2i+2} & 0 \\
0 & \mathbf{L} & 0 & b_{2i+1,2i} & b_{2i+1,2i+1} & b_{2i+1,2i+2} & b_{2i+1,2i+2} & 0 \\
& & & & & & & \mathbf{L} \\
0 & & & \mathbf{L} & & 0 & b_{2M-1,2M-1} & b_{2M-1,2M} \\
0 & & & \mathbf{L} & & 0 & b_{2M,2M-1} & b_{2M,2M}
\end{pmatrix} \tag{3.38}$$

а її ненульові коефіцієнти обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}
b_{1,1} &= -\omega_1; \quad b_{1,2} = \omega_1; \quad b_{2i,2i-1} = e^{-\omega_i \gamma_i}; \quad b_{2i,2i} = e^{\omega_i \gamma_i}; \quad b_{2i,2i+1} = -e^{-\omega_{i+1} \gamma_i}; \\
b_{2i,2i+2} &= -e^{\omega_{i+1} \gamma_i}; \quad b_{2i+1,2i-1} = -\lambda_T^{(i)} \omega_i e^{-\omega_i \gamma_i}; \quad b_{2i+1,2i} = \lambda_T^{(i)} \omega_i e^{\omega_i \gamma_i}; \\
b_{2i+1,2i+1} &= \lambda_T^{(i+1)} \omega_i e^{-\omega_{i+1} \gamma_i}; \quad b_{2i+1,2i+2} = -\lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} e^{\omega_{i+1} \gamma_i}; \quad i = \overline{1, M-1} \\
b_{2M-1,2M} &= -(\omega_M + Bi) e^{-\omega_M \gamma_M}; \quad b_{2M,2M} = (\omega_M - Bi) e^{\omega_M \gamma_M}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Стовбець вільних членів в системах (3.37) - це права частина рівнянь (3.31)-(3.34), а отже його компоненти мають вигляд:

$$c_{n,1} = -\frac{\bar{q}_n(\xi)}{\lambda_T^{(1)}} - \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(1)}(\xi) d_\gamma G_j^{(1)}(\xi, 0) + B_{n-j}^{(1)}(\xi) d_\gamma W_j^{(1)}(\xi, 0) \right];$$

$$\begin{aligned}
c_{n,2M} = & - \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(M)}(\xi) \left( d_\gamma G_j^{(M)}(\xi, \gamma_M) - B_i G_j^{(M)}(\xi, \gamma_M) \right) + \right. \\
& \left. + B_{n-j}^{(M)}(\xi) \left( d_\gamma W_j^{(M)}(\xi, \gamma_M) - B_i W_j^{(M)}(\xi, \gamma_M) \right) \right]; \\
c_{n,2i} = & - \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) \right] + \\
& + \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(i+1)}(\xi) G_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) W_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) \right], \quad i = \overline{1, M-1}; \\
c_{n,2i+1} = & - \lambda_T^{(i)} \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(i)}(\xi) d_\gamma G_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) d_\gamma W_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) \right] + \\
& + \lambda_T^{(i+1)} \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(i+1)}(\xi) d_\gamma G_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) d_\gamma W_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) \right], \quad i = \overline{1, M-1}.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Матрицю  $[b_{k,l}]$  зведемо до діагонального вигляду. Для цього розглянемо перший верхній блок

$$\left( \begin{array}{cccc|c} -\omega_1 & \omega_1 & 0 & 0 & c_{n,1} \\ e^{-\omega_1 \gamma_1} & e^{\omega_1 \gamma_1} & -e^{-\omega_2 \gamma_1} & -e^{\omega_1 \gamma_1} & c_{n,2} \\ -\lambda_T^{(1)} \omega_1 e^{-\omega_1 \gamma_1} & \lambda_T^{(1)} \omega_1 e^{\omega_1 \gamma_1} & \lambda_T^{(2)} \omega_2 e^{-\omega_2 \gamma_1} & -\lambda_T^{(2)} \omega_2 e^{\omega_2 \gamma_1} & c_{n,3} \end{array} \right),$$

який після елементарних перетворень набуде вигляду

$$\left( \begin{array}{cccc|c} b_{1,1}^* & b_{1,2}^* & 0 & 0 & c_{n,1}^* \\ 0 & b_{2,2}^* & b_{2,3}^* & b_{2,4}^* & c_{n,2}^* \\ 0 & 0 & b_{3,3}^* & b_{3,4}^* & c_{n,3}^* \end{array} \right), \tag{3.41}$$

де

$$b_{1,1}^* = b_{1,1} = -\omega_1; \quad b_{1,2}^* = b_{1,2} = \omega_1;$$

$$\begin{aligned}
b_{2,2}^* &= 2\lambda_T^{(1)}\omega_1 \exp(\omega_1\gamma_1); \\
b_{2,3}^* &= \exp(-\omega_2\gamma_1)\left(\lambda_T^{(2)}\omega_2 - \lambda_T^{(1)}\omega_1\right); \\
b_{2,4}^* &= -\exp(\omega_2\gamma_1)\left(\lambda_T^{(2)}\omega_2 + \lambda_T^{(1)}\omega_1\right); \\
b_{3,3}^* &= \exp(-\omega_2\gamma_1)\left[\exp(-\omega_1\gamma_1)\left(\lambda_T^{(2)}\omega_2 - \lambda_T^{(1)}\omega_1\right) + \exp(\omega_1\gamma_1)\left(\lambda_T^{(2)}\omega_2 + \lambda_T^{(1)}\omega_1\right)\right]; \\
b_{3,4}^* &= -\exp(\omega_2\gamma_1)\left[\exp(-\omega_1\gamma_1)\left(\lambda_T^{(2)}\omega_2 + \lambda_T^{(1)}\omega_1\right) + \exp(\omega_1\gamma_1)\left(\lambda_T^{(2)}\omega_2 - \lambda_T^{(1)}\omega_1\right)\right]; \\
c_{n,1}^* &= c_{n,1}; \quad c_{n,2}^* = \lambda_T^{(1)}\omega_1 c_{n,2} + c_{n,3}; \\
c_{n,3}^* &= -2\lambda_T^{(1)}c_{n,1} - 2\lambda_T^{(1)}\omega_1 \operatorname{sh}(\omega_1\gamma_1)c_{n,2} + 2\operatorname{ch}(\omega_1\gamma_1)c_{n,3}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Поступимо так само із загальним блоком

$$\left( \begin{array}{cccc|c} b_{2i-1,2i-1}^* & b_{2i-1,2i}^* & 0 & 0 & c_{n,2i-1} \\ e^{-\omega_i\gamma_i} & e^{\omega_i\gamma_i} & -e^{-\omega_{i+1}\gamma_i} & -e^{\omega_{i+1}\gamma_i} & c_{n,2i} \\ -\lambda_T^{(i)}\omega_i e^{-\omega_i\gamma_i} & \lambda_T^{(i)}\omega_i e^{\omega_i\gamma_i} & \lambda_T^{(i+1)}\omega_{i+1} e^{-\omega_{i+1}\gamma_i} & -\lambda_T^{(i+1)}\omega_{i+1} e^{\omega_{i+1}\gamma_i} & c_{n,2i+1} \end{array} \right)$$

Провівши ті самі перетворення одержимо блок

$$\left( \begin{array}{cccc|c} b_{2i-1,2i-1}^* & b_{2i-1,2i}^* & 0 & 0 & c_{n,2i-1}^* \\ 0 & b_{2i,2i}^* & b_{2i,2i+1}^* & b_{2i,2i+2}^* & c_{n,2i}^* \\ 0 & 0 & b_{2i+1,2i+1}^* & b_{2i+1,2i+2}^* & c_{n,2i+1}^* \end{array} \right), \quad i = \overline{2, M-1}, \tag{3.43}$$

де

$$\begin{aligned}
b_{2i,2i}^* &= 2\lambda_T^{(i)}\omega_i \exp(\omega_i\gamma_i); \\
b_{2i,2i+1}^* &= \exp(-\omega_{i+1}\gamma_i)\left(\lambda_T^{(i+1)}\omega_{i+1} - \lambda_T^{(i)}\omega_i\right); \\
b_{2i,2i+2}^* &= -\exp(\omega_{i+1}\gamma_i)\left(\lambda_T^{(i+1)}\omega_{i+1} + \lambda_T^{(i)}\omega_i\right); \\
b_{2i+1,2i+1}^* &= \exp(-\omega_{i+1}\gamma_i)\left[\exp(-\omega_i\gamma_i)\left(\lambda_T^{(i+1)}\omega_{i+1} - \lambda_T^{(i)}\omega_i\right)b_{2i-1,2i}^* - \right. \\
&\quad \left. - \exp(\omega_i\gamma_i)\left(\lambda_T^{(i+1)}\omega_{i+1} + \lambda_T^{(i)}\omega_i\right)b_{2i-1,2i-1}^*\right];
\end{aligned}$$

$$b_{2i+1, 2i+2}^* = -\exp(\omega_{i+1}\gamma_i) \left[ \exp(-\omega_i\gamma_i) \left( \lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} + \lambda_T^{(i)} \omega_i \right) b_{2i-1, 2i}^* - \exp(\omega_i\gamma_i) \left( \lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} - \lambda_T^{(i)} \omega_i \right) b_{2i-1, 2i-1}^* \right]; \quad (3.44)$$

$$c_{n, 2i}^* = c_{n, 2i+1} + \lambda_T^{(i)} \omega_i c_{n, 2i};$$

$$c_{n, 2i+1}^* = -2\lambda_T^{(i)} \omega_i c_{n, 2i-1}^* + \lambda_T^{(i)} \omega_i \left( \exp(\omega_i\gamma_i) b_{2i-1, 2i-1}^* + \exp(-\omega_i\gamma_i) b_{2i-1, 2i}^* \right) c_{n, 2i} - \left( \exp(\omega_i\gamma_i) b_{2i-1, 2i-1}^* - \exp(-\omega_i\gamma_i) b_{2i-1, 2i}^* \right) c_{n, 2i+1}$$

Нарешті розглянемо останній блок

$$\left( \begin{array}{cc|c} b_{2M-1, 2M-1}^* & b_{2M-1, 2M}^* & c_{n, 2M-1}^* \\ -(\omega_M + Bi) e^{-\omega_M \gamma_M} & (\omega_M - Bi) e^{\omega_M \gamma_M} & c_{n, 2M} \end{array} \right), \quad (3.45)$$

який після перетворень набуде вигляду

$$\left( \begin{array}{cc|c} b_{2M-1, 2M-1}^* & b_{2M-1, 2M}^* & c_{n, 2M-1}^* \\ 0 & b_{2M, 2M}^* & c_{n, 2M}^* \end{array} \right), \quad (3.46)$$

при

$$\begin{aligned} b_{2M, 2M}^* &= (\omega_M + Bi) \exp(-\omega_M \gamma_M) b_{2M-1, 2M}^* + \\ &\quad + (\omega_M - Bi) \exp(\omega_M \gamma_M) b_{2M-1, 2M-1}^*; \\ c_{n, 2M}^* &= (\omega_M + Bi) \exp(-\omega_M \gamma_M) c_{n, 2M-1}^* + \\ &\quad + c_{n, 2M} b_{2M-1, 2M-1}^*. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Таким чином ми звели систему (3.37) до трикутної системи рівнянь:

$$\begin{pmatrix}
b_{1,1}^* & b_{1,2}^* & 0 & & \mathbf{L} & & 0 \\
& \mathbf{O} & & & & & \\
0 & & b_{2i-1, 2i-1}^* & b_{2i-1, 2i}^* & 0 & \mathbf{L} & 0 \\
0 & \mathbf{L} & 0 & b_{2i, 2i}^* & b_{2i, 2i+1}^* & b_{2i, 2i+2}^* & 0 \\
0 & & \mathbf{L} & 0 & b_{2i+1, 2i+1}^* & b_{2i+1, 2i+2}^* & 0 \\
& & & & \mathbf{O} & & \\
0 & & & \mathbf{L} & 0 & & b_{2M, 2M}^*
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
A_n^{(1)} \\
B_n^1 \\
\mathbb{M} \\
A_n^{(i)} \\
B_n^{(i)} \\
\mathbb{M} \\
B_n^{(M)}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
c_{n,1}^* \\
c_{n,2}^* \\
\mathbb{M} \\
c_{n,2i}^* \\
c_{n,2i+1}^* \\
\mathbb{M} \\
c_{n,2M}^*
\end{pmatrix}
\quad (3.48)$$

в якій коефіцієнти матриці та вільні члени визначаються рекурентними співвідношеннями (3.42), (3.44), (3.47).

З системи (3.48), використовуючи «зворотній хід», одержимо розв'язок

$$\begin{aligned}
A_n^{(M)} &= \frac{c_{n,2M-1}^*}{b_{2M,2M}^*} ; \\
B_n^{(i)} &= \frac{1}{b_{2i,2i}^*} \left( c_{n,2i}^* - B_n^{(i+1)} b_{2i, 2i+2}^* - A_n^{(i+1)} b_{2i, 2i+1}^* \right), \quad i = \overline{M-1, 1}; \\
A_n^{(i)} &= \frac{1}{b_{2i-1, 2i-1}^*} \left( c_{n,2i-1}^* - B_n^{(i)} b_{2i-1, 2i}^* \right), \quad i = \overline{M-1, 1}.
\end{aligned} \quad (3.49)$$

Послідовно знайшовши зі співвідношень (3.51) всі  $A_n^{(i)}$  і  $B_n^{(i)}$ , а, отже, і  $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma)$  остаточний розв'язок задачі (3.7)-(3.12) подамо у вигляді:

$$T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \xi \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) J_0(\xi \rho) d\xi \right] L_n(\lambda \tau). \quad (3.50)$$

### 3.1.2 Визначення нестационарного температурного поля в шаруватому півпросторі в плоскому випадку

Розглянемо шаруватий композит, що складається з  $M$  елементів (елементи з індексами до  $M - 1$  включно - плоско-паралельні шари товщиною  $h_i$ ,  $i = \overline{1, M - 1}$ , елемент з індексом  $M$  - півпростір). Уведемо в розгляд прямокутну систему координат  $x, y, z$  з центром на граничній поверхні, вісь  $x$  напрямимо у глиб композита. Вважатимемо, що з моменту часу  $t = 0$  композит починає нагріватися джерелами тепла, що рухаються по його граничній поверхні прямолінійно в додатному напрямку осі  $Ox$  з постійною швидкістю  $v$ . Тепловий контакт між шарами композита, як і в попередньому випадку будемо вважати ідеальним, а початкову температуру шаруватого півпростору рівною нулю. Крім того, припустимо, що розміри джерела тепла в напрямку перпендикулярному до напрямку руху значно більші за розміри в напрямку руху, а тому зміною температури в напрямку осі  $Oz$  знехтуємо (плоска задача).

Таким чином, задача полягає у відшуванні розв'язку нестационарної задачі теплопровідності:

$$\partial_{xx}^2 T^{(i)} + \partial_{yy}^2 T^{(i)} = a_i^{-1} \partial_t T^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (3.51)$$

$$T^{(i)}(x, y, 0) = 0, \quad i = \overline{1, M}; \quad (3.52)$$

$$\lambda_T^{(1)} \partial_y T^{(1)} = -q(x, t), \quad y = 0; \quad (3.53)$$

$$T^{(M)} = \partial_y T^{(M)} = 0, \quad y \rightarrow +\infty; \quad (3.54)$$

$$T^{(i)} = T^{(i+1)}, \quad y = y_i, \quad i = \overline{1, M - 1}; \quad (3.55)$$

$$\lambda_T^{(i)} \partial_y T^{(i)} = \lambda_T^{(i+1)} \partial_y T^{(i+1)}, \quad y = y_i, \quad i = \overline{1, M - 1}, \quad (3.56)$$

де  $T^{(i)}(x, y, t)$  - температурне поле в  $i$ -му шарі,  $\lambda_T^{(i)}$ ,  $a_i$  - відповідно, коефіцієнти

тепло- і температуропровідності  $i$ -го шару,  $y_i = \sum_{k=1}^i h_k$ , а  $h_i$  - товщина  $i$ -го шару,

$q(x, \tau) = Q(x + x_0 - vt) [S_+(x + x_0 + l - vt) - S_+(x + x_0 - l - vt)]$  - густина рухомого

джерела тепла  $x_0$  - початкове положення його центру,  $Q(x + x_0 - vt)$  розподіл густини джерел тепла по смузі нагріву.

Як і в попередньому розділі введемо в розгляд безрозмірні змінні і величини  $\alpha = x/d$ ,  $\gamma = y/d$ ,  $\tau = a_0 t / d^2$ ,  $\mathfrak{a}_i = a_i / a_0$ ,  $\mathfrak{k}_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)} / \lambda_T^{(0)}$ ,  $Bi = v d / \lambda_T^{(0)}$ ,  $q^*(\alpha, \tau) = Q(\alpha + \alpha_0 - v^* \tau) \left[ S_+(\alpha + \alpha_0 + l/d - v^* \tau) - S_+(\alpha + \alpha_0 - l/d - v^* \tau) \right] / (\mathfrak{k}_T^{(0)} d)$ ,  $\gamma_i = y_i / d$ ,  $\mathfrak{h}_i = h_i / d$ ,  $v^* = v a_0 / d$  - безрозмірна швидкість. В термінах цих змінних і величин початково-крайова задача (3.51)-(3.56) набуде вигляду

$$\partial_{\alpha\alpha}^2 T^{(i)} + \partial_{\gamma\gamma}^2 T^{(i)} = \mathfrak{a}_i^{-1} \partial_{\tau} T^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (3.57)$$

$$T^{(i)} = 0, \tau = 0, \quad i = \overline{1, M}; \quad (3.58)$$

$$\mathfrak{k}_T^{(1)} \partial_{\gamma} T^{(1)} = -q^*(\alpha, \tau), \quad \gamma = 0; \quad (3.59)$$

$$T^{(M)} = \partial_{\gamma} T^{(M)} = 0, \quad \gamma \rightarrow \infty; \quad (3.60)$$

$$T^{(i)} = T^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}; \quad (3.61)$$

$$\mathfrak{k}_T^{(i)} \partial_{\gamma} T^{(i)} = \mathfrak{k}_T^{(i+1)} \partial_{\gamma} T^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (3.62)$$

Застосуємо до рівнянь (3.57), крайових умов (3.59), (3.60) та умов спряження (3.61), (3.62) інтегральне перетворення Лагерра за змінною  $\tau$  та інтегральне перетворення Фур'є за змінною  $\alpha$ . Врахувавши нульові початкові умови (3.58) одержимо трикутну послідовність крайових задач

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - \omega_i^2 \bar{T}_n^{(i)} = \beta_i \sum_{m=0}^{n-1} \bar{T}_m^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (3.63)$$

$$\mathfrak{k}_T^{(1)} d_{\gamma} \bar{T}_n^{(1)} = -\bar{q}_n(\xi), \quad \gamma = 0; \quad (3.64)$$

$$\bar{T}_n^{(M)} = d_{\gamma} \bar{T}_n^{(M)} = 0, \quad \gamma \rightarrow \infty; \quad (3.65)$$

$$\bar{T}_n^{(i)} = \bar{T}_n^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}; \quad (3.66)$$

$$\mathfrak{k}_T^{(i)} d_{\gamma} \bar{T}_n^{(i)} = \mathfrak{k}_T^{(i+1)} d_{\gamma} \bar{T}_n^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (3.17)$$

У формулах (3.13) - (3.17)  $\omega_i^2 = \xi^2 + \beta_i$ ,  $\beta_i = \lambda/d_i$ ,

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \exp(-\lambda\tau) T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) L_n(\lambda\tau) d\tau \right] \exp(i\xi\alpha) d\alpha \quad (3.18)$$

- зображення за Лагерром і Фур'є,  $\xi$  - параметр перетворення за Фур'є. Надалі подвійне інтегральне перетворення (3.68) будемо називати інтегральним перетворенням Фур'є-Лагерра.

Трикутна послідовність крайових задач в зображеннях за Фур'є-Лагерром (3.63)-(3.67) повністю співпадає з послідовністю крайових задач в зображеннях за Ганкелем-Лагерром (3.18)-(3.22). Тому її загальний розв'язок має вигляд:

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \gamma) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \gamma) \right], \quad i = \overline{1, M}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.70)$$

де

$$G_j(\xi, \gamma) = \exp(-\omega_i \gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^i \frac{(\omega_i \gamma)^k}{k!}; \quad W_j(\xi, \gamma) = \exp(\omega_i \gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^i \frac{(-\omega_i \gamma)^k}{k!}, \quad (3.71)$$

а коефіцієнти  $a_{j,k}^i(\xi)$  знаходяться із рекурентних співвідношень:

$$a_{j,k+1}^i = 0.5 \left( a_{j,k+2}^i - \frac{\beta_i}{\omega_i^2} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^i \right). \quad (3.72)$$

Враховуючи умову на безмежності (3.65) та вигляд функцій  $G_j^{(M)}(\xi, \gamma)$  та  $W_j^{(M)}(\xi, \gamma)$  відразу отримаємо, що

$$B_n^{(M)} \equiv 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.73)$$

Безпосередня підстановка розв'язку (3.70) в умови (3.64), (3.66), (3.67) після викладок, ідентичних до викладок попереднього підрозділу приводить до системи

рівнянь:

$$[b_{k,l}] \{A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, \dots, A_n^{(l)}, B_n^{(l)}, \dots, A_n^{(M)}\}^T = \{c_{n,k}\}^T, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.24)$$

де структура матриці  $b_{k,l}$  має вигляд

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & & & & & & & \mathbf{L} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & 0 & & & & & \mathbf{L} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & 0 & & & & & \mathbf{L} \\ & & & & & & & & & \mathbf{L} \\ 0 & \mathbf{L} & 0 & b_{2i,2i-1} & b_{2i,2i} & b_{2i,2i+1} & b_{2i,2i+2} & 0 & & \mathbf{L} \\ 0 & \mathbf{L} & 0 & b_{2i+1,2i} & b_{2i+1,2i+1} & b_{2i+1,2i+2} & b_{2i+1,2i+2} & 0 & & \mathbf{L} \\ & & & & & & & & & \mathbf{L} \\ 0 & & & \mathbf{L} & & 0 & b_{2M-2,2M-3} & b_{2M-2,2M-2} & b_{2M-2,2M-1} & \\ 0 & & & \mathbf{L} & & 0 & b_{2M-1,2M-3} & b_{2M-1,2M-2} & b_{2M-1,2M-1} & \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

а її ненульові коефіцієнти та стовбець вільних членів обчислюються відповідно за формулами (3.39) та (3.40).

Аналогічно до осесиметричного випадку систему рівнянь (3.75) можна звести до трикутного виду (змін зазнає лише останній блок (3.45), а всі попередні викладки ідентичні)

$$\begin{pmatrix} b_{1,1}^* & b_{1,2}^* & 0 & & & & & & & \mathbf{L} & 0 \\ & \mathbf{O} & & & & & & & & & \\ 0 & & b_{2i-1,2i-1}^* & b_{2i-1,2i}^* & 0 & & \mathbf{L} & 0 & & & \\ 0 & \mathbf{L} & 0 & b_{2i,2i}^* & b_{2i,2i+1}^* & b_{2i,2i+2}^* & 0 & 0 & & & \\ 0 & & \mathbf{L} & 0 & b_{2i+1,2i+1}^* & b_{2i+1,2i+2}^* & 0 & 0 & & & \\ & & & & & & \mathbf{O} & & & & \\ 0 & & & \mathbf{L} & & 0 & b_{2M-1,2M-1}^* & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ B_n^1 \\ \mathbb{M} \\ A_n^{(i)} \\ B_n^{(i)} \\ \mathbb{M} \\ A_n^{(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n,1}^* \\ c_{n,2}^* \\ \mathbb{M} \\ c_{n,2i}^* \\ c_{n,2i+1}^* \\ \mathbb{M} \\ c_{n,2M-1}^* \end{pmatrix} \quad (3.76)$$

де

$$b_{1,1}^* = -\omega_1; \quad b_{1,2}^* = \omega_1$$

$$\begin{aligned}
b_{2i,2i}^* &= 2\lambda_T^{(i)} \omega_i \exp(\omega_i \gamma_i), \quad i = \overline{1, M-1}; \\
b_{2i,2i+1}^* &= \exp(-\omega_{i+1} \gamma_i) \left( \lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} - \lambda_T^{(i)} \omega_i \right), \quad i = \overline{1, M-1}; \\
b_{2i,2i+2}^* &= -\exp(\omega_{i+1} \gamma_i) \left( \lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} + \lambda_T^{(i)} \omega_i \right), \quad i = \overline{1, M-2}; \\
b_{2i+1,2i+1}^* &= \exp(-\omega_{i+1} \gamma_i) \left[ \exp(-\omega_i \gamma_i) \left( \lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} - \lambda_T^{(i)} \omega_i \right) b_{2i-1,2i}^* - \right. \\
&\quad \left. - \exp(\omega_i \gamma_i) \left( \lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} + \lambda_T^{(i)} \omega_i \right) b_{2i-1,2i-1}^* \right], \quad i = \overline{1, M-1}; \\
b_{2i+1,2i+2}^* &= -\exp(\omega_{i+1} \gamma_i) \left[ \exp(-\omega_i \gamma_i) \left( \lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} + \lambda_T^{(i)} \omega_i \right) b_{2i-1,2i}^* - \right. \\
&\quad \left. - \exp(\omega_i \gamma_i) \left( \lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} - \lambda_T^{(i)} \omega_i \right) b_{2i-1,2i-1}^* \right], \quad i = \overline{1, M-2};
\end{aligned} \tag{3.77}$$

З системи (3.76), використовуючи «зворотній хід», одержимо розв'язок

$$\begin{aligned}
A_n^{(M)} &= \frac{c_{n,2M-1}^*}{b_{2M,2M}^*}; \\
B_n^{(i)} &= \frac{1}{b_{2i,2i}^*} \left( c_{n,2i}^* - B_n^{(i+1)} b_{2i,2i+2}^* - A_n^{(i+1)} b_{2i,2i+1}^* \right), \quad i = \overline{M-1, 1}; \\
A_n^{(i)} &= \frac{1}{b_{2i-1,2i-1}^*} \left( c_{n,2i-1}^* - B_n^{(i)} b_{2i-1,2i}^* \right), \quad i = \overline{M-1, 1}.
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Послідовно знайшовши зі співвідношень (3.79) всі  $A_n^{(i)}$  і  $B_n^{(i)}$ , а, отже, за формулами (3.70) і  $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma)$  остаточний розв'язок задачі (3.57)-(3.62) подамо у вигляді:

$$T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \exp(-i\xi\alpha) d\xi \right] L_n(\lambda\tau). \tag{3.80}$$

### 3.2 Визначення напружено-деформованого стану плоско-шаруватих тіл

Розглянемо детально випадок шаруватої плити, оскільки він є більш загальним, внаслідок наявності граничних умов на двох поверхнях. Якщо ж розглядається півпростір із системою покриттів (шарів), то як і у випадку задачі теплопровідності, умова на безмежності скорочує у двовимірному випадку на дві одиниці кількість невідомих і, відповідно, дещо змінює систему алгебричних рівнянь в частині, яка відповідає умовам на зовнішній поверхні шару, який замінено на півпростір. Оскільки кожен фаховий дослідник легко справиться із такою зміною, то розглядати її детально не будемо.

Крім того, як це було показано на прикладі задач теплопровідності, формальна відмінність плоскої і осесиметричної задач полягає у різних інтегральних перетвореннях за просторовою змінною, що застосовуються до них. В трансформантах ця відмінність нівелюється, а тому знову ж таки, не будемо окремо детально вирізняти ту чи іншу задачу і, в подальших викладках, використовуватимемо позначення набла-оператора:  $\nabla^2 = \partial_{\alpha\alpha}^2$  для прямокутної системи координат і  $\nabla^2 = \partial_{\alpha\alpha}^2 + \alpha^{-1}\partial_{\alpha}$  для циліндричної системи координат.

Подальші дослідження напружено-деформованого стану шаруватих тіл ґрунтуються на некласичному розділенні рівнянь рівноваги пружного середовища.

$$(\kappa^2 - 1)\text{grad } \theta + \Delta \dot{\mathbf{U}} = \alpha_T (3\kappa^2 - 4)\text{grad } T, \quad (3.81)$$

де  $\theta = \text{div } \dot{\mathbf{U}}$  - об'ємне розширення,  $\dot{\mathbf{U}}$  - вектор пружного переміщення,  $\kappa^2 = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}$ ,  $\nu$  - коефіцієнт Пуассона,  $\alpha_T$  - коефіцієнт лінійного температурного розширення.

В двовимірних випадках, які ми надалі розглядатимемо, це розділення використовує об'ємне розширення, як основну ключову функцію. Рівняння на

об'ємне розширення в термопружності одержується шляхом дії на рівняння (3.81) оператором  $\text{div}$  і має вигляд

$$\Delta\theta = \alpha_T \frac{1+\nu}{1-\nu} \Delta T. \quad (3.82)$$

Якщо вважати, що  $\theta(\alpha, \gamma, \tau)$  знайдено із (3.82), інші рівняння рівноваги (3.81) міститимуть лише одну невідому і матимуть вигляд

$$\Delta \vec{U} = (1 - \kappa^2) \text{grad } \theta + \alpha_T (3\kappa^2 - 4) \text{grad } T. \quad (3.83)$$

Поступимо так само і у випадку шаруватого тіла, при цьому вважатимемо, що його гранична поверхня  $\gamma = 0$  вільна від навантажень, гранична поверхня  $\gamma = \gamma_M$  - жорстко закріплена, а на поверхнях поділу шарів виконуються умови ідеального механічного контакту.

Узагальнюючи попередні результати на кожен шар, та обираючи з двох рівнянь (3.83) рівняння на нормальну компоненту вектора переміщення одержимо систему  $2M$  рівнянь Пуассона відносно ключових функцій  $\theta^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \text{div} \vec{U}^{(i)}$  і  $w^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$

$$\Delta\theta^{(i)} = \alpha_T^{(i)} \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \Delta T^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (3.84)$$

$$\Delta w^{(i)} = (1 - \kappa_i^2) \partial_\gamma \theta^{(i)} + \alpha_T^{(i)} (3\kappa_i^2 - 4) \partial_\gamma T^{(i)}, \quad i = \overline{1, M} \quad (3.85)$$

при нульових початкових умовах:

$$\theta^{(i)}(\alpha, \gamma, 0) = w^{(i)}(\alpha, \gamma, 0) = 0, \quad i = \overline{1, M}; \quad (3.86)$$

крайових умовах:

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}(\alpha, 0) = 0; \quad (3.87)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}(\alpha, 0) = 0; \quad (3.88)$$

$$u^{(M)} = 0, \gamma = \gamma_M; \quad (3.89)$$

$$w^{(M)} = 0, \gamma = \gamma_M \quad (3.90)$$

і умовах спряження шарів:

$$u^{(i)}(\alpha, \gamma_i) = u^{(i+1)}(\alpha, \gamma_i), \quad i = \overline{1, M-1}; \quad (3.91)$$

$$w^{(i)}(\alpha, \gamma_i) = w^{(i+1)}(\alpha, \gamma_i), \quad i = \overline{1, M-1}; \quad (3.92)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(i)}(\alpha, \gamma_i) = \sigma_{\alpha\gamma}^{(i+1)}(\alpha, \gamma_i), \quad i = \overline{1, M-1}; \quad (3.93)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(i)}(\alpha, \gamma_i) = \sigma_{\gamma\gamma}^{(i+1)}(\alpha, \gamma_i), \quad i = \overline{1, M-1}, \quad (3.94)$$

де  $\Delta = \nabla^2 + \partial_{\gamma\gamma}^2$  - оператор Лапласа у вибраній системі координат,  $\kappa_i^2 = \frac{2(1-\nu_i)}{1-2\nu_i}$ ,

$\alpha_T^{(i)}, \nu_i$  - відповідно, коефіцієнт лінійного температурного розширення та коефіцієнт Пуассона матеріалу  $i$ -го шару.

Прийmemo, наприклад, що задача є осесиметричною. Тоді після застосування до рівнянь (3.84), (3.85) інтегрального перетворення Ганкеля-Лагерра одержимо послідовності звичайних диференціальних рівнянь

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{\theta}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{\theta}_n^{(i)} = \alpha_T^{(i)} \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \left( d_{\gamma\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{T}_n^{(i)} \right), \quad i = \overline{1, M}; \quad (3.95)$$

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{w}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{w}_n^{(i)} = -\frac{1}{1-2\nu_i} d_{\gamma} \bar{\theta}_n^{(i)} + \alpha_T^{(i)} \frac{2(1+\nu_i)}{1-2\nu_i} d_{\gamma} \bar{T}_n^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}. \quad (3.96)$$

Розв'язок рівняння (3.95) подамо у вигляді

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = C_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma) + D_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) + \alpha_T^{(i)} \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma). \quad (3.97)$$

Підставивши цей розв'язок в рівняння (3.96), після спрощень

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{w}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{w}_n^{(i)} = \frac{\xi}{1-2v_i} \left( -C_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma) + D_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) \right) + \alpha_T^{(i)} \frac{2(1+v_i)}{1-2v_i} d_{\gamma} \bar{T}_n^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}. \quad (3.98)$$

Далі, враховуючи те, що функція  $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma)$  задовольняє рівнянню

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{T}_n^{(i)} = \beta_i \sum_{m=0}^n \bar{T}_m^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}$$

де  $\beta_i = \lambda / d_T^{(i)}$  та очевидну формулу

$$\sum_{m=0}^n \left( \bar{T}_m^{(i)} - \bar{T}_{m-1}^{(i)} \right) = \bar{T}_n^{(i)}, \quad \left( \bar{T}_{-1}^{(i)} \equiv 0 \right),$$

розв'язок рівняння (3.98) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = & F_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma) + H_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) - \\ & - \frac{\gamma}{2(1-2v_i)} \left[ C_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma) + D_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) \right] + \frac{\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} \frac{1+v_i}{1-v_i} d_{\gamma} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \end{aligned} \quad (3.99)$$

де  $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - \bar{T}_{n-1}^{(i)}(\xi, \gamma)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $\bar{T}_0^{(i)}(\xi, \gamma) = \bar{T}_0^{(i)}(\xi, \gamma)$

Слід зазначити, що застосування інтегрального перетворення Лагерра до рівнянь (3.97), (3.98) не було обов'язковим, оскільки в ці рівняння не входить похідна за часовою змінною. Проте, без застосування цього перетворення, часткові розв'язки рівнянь були би значно складніші.

Для задовольняння крайовим умовам та умовам спряження і, відповідно, визначення невідомих  $C_n^{(i)}, D_n^{(i)}, F_n^{(i)}, H_n^{(i)}$  можна поступати по-різному. Перший спосіб - записати всі крайові умови та умови спряження через ключові функції та враховуючи (3.98) та (3.99) одержати необхідні рівняння; інший спосіб - визначити за відомими  $\bar{\theta}_n^{(i)}$  і  $\bar{w}_n^{(i)}$  ще одну трансформанту компоненти вектора

переміщення  $\bar{u}_n^{(i)}$ , потім всі трансформанти тензора напружень  $i$ , після застосування до крайових умов та умов спряження (3.87)-(3.94) інтегрального перетворення Ганкеля-Лагерра отримати системи рівнянь для визначення  $C_n^{(i)}, D_n^{(i)}, F_n^{(i)}, H_n^{(i)}$ . Зазначимо, що ці способи є приблизно однаковими, як з точки зору затрачених зусиль, так і, очевидно, остаточного результату, тому, оскільки нам все одно доведеться шукати явний вигляд трансформант вектора переміщення та тензора напружень використаємо другий спосіб.

Для визначення радіальної компоненти вектора переміщення  $u^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$  до співвідношення

$$\theta = \partial_\gamma w^{(i)} + \rho^{-1} \partial_\rho (\rho u^{(i)}) \quad (3.100)$$

застосуємо інтегральне перетворення Лагерра-Ганкеля. Одержимо:

$$\int_0^\infty \partial_\alpha (\alpha u_n^{(i)}(\alpha, \gamma)) J_0(\xi \alpha) d\alpha = \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - d_\gamma \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma).$$

Звідси, після інтегрування за частинами будемо мати

$$\bar{u}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \equiv \int_0^\infty \alpha u_n^{(i)}(\alpha, \gamma) J_1(\xi \alpha) d\alpha = \xi^{-1} (\bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - d_\gamma \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma)). \quad (3.101)$$

За відомими  $\bar{\theta}_n^{(i)}$ ,  $\bar{w}_n^{(i)}$  та  $\bar{u}_n^{(i)}$  із співвідношень Дюгамеля-Неймана визначаються всі компоненти тензора напружень. Задовольняння транспонованих крайових умов та умов спряження приводить до систем алгебричних рівнянь відносно невідомих  $C_n^{(i)}, D_n^{(i)}, F_n^{(i)}, H_n^{(i)}$

$$[d_{k,l}] \{C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, F_n^{(1)}, H_n^{(1)}, \dots, C_n^{(l)}, D_n^{(l)}, F_n^{(l)}, H_n^{(l)}, \dots, D_n^{(M)}, H_n^{(M)}\}^T = \{f_{n,k}\} \quad (3.102)$$

з матрицею  $[d_{k,l}]$ , що має структуру

$$\left( \begin{array}{ccccccccc}
 d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} & 0 & & & & & & \mathbf{L} & & 0 \\
 d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & d_{2,4} & 0 & & & & & & \mathbf{L} & & 0 \\
 & & & & & & \mathbf{L} & & & & & & \\
 0 & d_{4i-1,4i-3} & d_{4i-1,4i-2} & d_{4i-1,4i-1} & d_{4i-1,4i} & d_{4i-1,4i+1} & d_{4i-1,4i+2} & d_{4i-1,4i+3} & d_{4i-1,4i+4} & & & 0 \\
 0 & d_{4i,4i-3} & d_{4i,4i-2} & d_{4i,4i-1} & d_{4i,4i} & d_{4i,4i+1} & d_{4i,4i+2} & d_{4i,4i+3} & d_{4i,4i+4} & & & 0 \\
 0 & d_{4i+1,4i-3} & d_{4i+1,4i-2} & d_{4i+1,4i-1} & d_{4i+1,4i} & d_{4i+1,4i+1} & d_{4i+1,4i+2} & d_{4i+1,4i+3} & d_{4i+1,4i+4} & & & 0 \\
 0 & d_{4i+2,4i-3} & d_{4i+2,4i-2} & d_{4i+2,4i-1} & d_{4i+2,4i} & d_{4i+2,4i+1} & d_{4i+2,4i+2} & d_{4i+2,4i+3} & d_{4i+2,4i+4} & & & 0 \\
 & & & & & & \mathbf{L} & & & & & \\
 0 & & & & & & \mathbf{L} & & & & & \\
 0 & & & & & & \mathbf{L} & & & & & \\
 & & & & & & 0 & d_{4M-1,4M-3} & d_{4M-1,4M-2} & d_{4M-1,4M-1} & d_{4M-1,4M} & \\
 & & & & & & 0 & d_{4M,4M-3} & d_{4M,4M-2} & d_{4M,4M-1} & d_{4M,4M} & 
 \end{array} \right) \quad (3.103)$$

де

$$\begin{aligned}
 d_{1,1} &= 1; d_{1,2} = 1; d_{1,3} = -2\xi; d_{1,4} = 2\xi; d_{2,1} = \frac{(1-v_1)}{(1-2v_1)}; d_{2,2} = \frac{(1-v_1)}{(1-2v_1)}; d_{2,3} = -\xi; \\
 d_{2,4} &= -\xi; d_{4M-1,4M-3} = \frac{\gamma_M \exp(\xi\gamma_M)}{2(1-2v_M)}; d_{4M-1,4M-2} = \frac{\gamma_M \exp(-\xi\gamma_M)}{2(1-2v_M)}; \\
 d_{4M-1,4M-1} &= -\exp(\xi\gamma_M); d_{4M-1,4M} = -\exp(-\xi\gamma_M); \\
 d_{4M,4M-3} &= \exp(\xi\gamma_M) \frac{(3-4v_M) + \xi\gamma_M}{2(1-2v_M)}; d_{4M,4M-2} = \exp(-\xi\gamma_M) \frac{(3-4v_M) + \xi\gamma_M}{2(1-2v_M)}; \\
 d_{4M,4M-1} &= -\xi \exp(\xi\gamma_M); d_{4M,4M} = \xi \exp(-\xi\gamma_M); \\
 d_{4M-5,4M-3} &= \frac{\gamma_M \exp(-\xi\gamma_{M-1})}{2(1-2v_{M-1})}; d_{4M-5,4M-2} = -\exp(-\xi\gamma_{M-1}); \\
 d_{4i,4i-3} &= \frac{(3-4v_i) + \xi\gamma_i}{2(1-2v_i)} \exp(\xi\gamma_i); d_{4i,4i-2} = \frac{(3-4v_i) + \xi\gamma_i}{2(1-2v_i)} \exp(-\xi\gamma_i); \\
 d_{4i,4i-1} &= -\xi \exp(\xi\gamma_i); d_{4i,4i} = \xi \exp(-\xi\gamma_i); d_{4i,4i} = -\frac{(3-4v_{i+1}) + \xi\gamma_i}{2(1-2v_{i+1})} \exp(\xi\gamma_i); \\
 d_{4i,4i+1} &= -\frac{(3-4v_{i+1}) + \xi\gamma_i}{2(1-2v_{i+1})} \exp(-\xi\gamma_i); d_{4i,4i+2} = \xi \exp(\xi\gamma_i); d_{4i,4i+2} = -\xi \exp(-\xi\gamma_i); \\
 d_{4M-3,4M-7} &= \frac{-\#_{M-1} [(1-2v_{M-1}) + \xi\gamma_{M-1}]}{2(1+v_{M-1})(1-2v_{M-1})} \exp(\xi\gamma_{M-1}); \\
 d_{4M-3,4M-6} &= \frac{-\#_{M-1} [(1-2v_{M-1}) - \xi\gamma_{M-1}]}{2(1+v_{M-1})(1-2v_{M-1})} \exp(-\xi\gamma_{M-1});
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{4i+2,4i-3} &= \frac{\#_i [2(1-v_i) + \xi\gamma_i]}{(1+v_i)2(1-2v_i)} \exp(\xi\gamma_i); \quad d_{4i+2,4i-2} = \frac{\#_i [2(1-v_i) - \xi\gamma_i]}{(1+v_i)2(1-2v_i)} \exp(-\xi\gamma_i); \\
d_{4i+2,4i-1} &= -\frac{\#_i \xi \exp(\xi\gamma_i)}{(1+v_i)}; \quad d_{4i+2,4i} = -\frac{\#_i \xi \exp(-\xi\gamma_i)}{(1+v_i)}; \\
d_{4i+2,4i+1} &= -\frac{\#_{i+1} [2(1-v_{i+1}) + \xi\gamma_i]}{(1+v_{i+1})2(1-2v_{i+1})} \exp(\xi\gamma_i); \\
d_{4M-2,4M-7} &= \frac{\#_{M-1} [2(1-v_{M-1}) + \xi\gamma_{M-1}]}{(1+v_{M-1})2(1-2v_{M-1})} \exp(\xi\gamma_{M-1}); \\
d_{4M-2,4M-6} &= \frac{\#_{M-1} [2(1-v_{M-1}) - \xi\gamma_{M-1}]}{(1+v_{M-1})2(1-2v_{M-1})} \exp(-\xi\gamma_{M-1}); \\
f_{n,1} &= \frac{\xi^2 \alpha_T^{(1)}}{\beta_1(1-v_1)} \#_n^{(1)}(\xi, 0); \quad f_{n,2} = \xi \frac{\alpha_T^{(1)}}{\beta_1} \frac{1+v_1}{1-2v_1} d_\gamma \#_n^{(1)}(\xi, 0); \\
f_{n,4M-1} &= \frac{\alpha_T^{(M)}}{\beta_M} \frac{1+v_M}{1-v_M} Bi \#_n^{(M)}(\xi, \gamma_M); \quad f_{n,4M} = \xi^2 \frac{\alpha_T^{(M)}}{\beta_M} \frac{1+v_M}{1-2v_M} \#_n^{(M)}(\xi, \gamma_M); \\
f_{n,4i-1} &= \left[ \frac{\alpha_T^{(i+1)}}{\beta_{i+1}} \frac{1+v_{i+1}}{1-v_{i+1}} \frac{\lambda_T^{(i)}}{\lambda_T^{(i+1)}} - \frac{\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} \frac{1+v_i}{1-v_i} \right] d_\gamma \#_n^{(i)}(\xi, \gamma_i), \quad i = \overline{1, M-1}; \\
f_{n,4i} &= \xi^2 \left[ \frac{\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} \frac{1+v_i}{1-2v_i} - \frac{\alpha_T^{(i+1)}}{\beta_{i+1}} \frac{1+v_{i+1}}{1-2v_{i+1}} \right] \#_n^{(i)}(\xi, \gamma_i), \quad i = \overline{1, M-1}; \\
f_{n,4i+1} &= \left[ \frac{\#_{i+1} \alpha_T^{(i+1)}}{\beta_{i+1}(1-v_{i+1})} - \frac{\#_i \xi^2 \alpha_T^{(i)}}{\beta_i(1-v_i)} \right] \#_n^{(i)}(\xi, \gamma_i), \quad i = \overline{1, M-1}; \\
f_{n,4i+2} &= \left[ \frac{\#_i}{(1+v_i)} \frac{\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} \frac{1+v_i}{1-2v_i} \frac{\lambda_T^{(i+1)}}{\lambda_T^{(i+1)}} - \frac{\#_{i+1}}{(1+v_{i+1})} \frac{\alpha_T^{(i+1)}}{\beta_{i+1}} \frac{1+v_{i+1}}{1-2v_{i+1}} \right] d_\gamma \#_n^{(i)}(\xi, \gamma_i), \\
&\quad i = \overline{1, M-1};
\end{aligned}$$

Системи (3.102), враховуючи їх структуру, можна, подібно до задачі теплопровідності, привести до трикутного виду, проте, зважаючи на те, що вони не мають трикутного вигляду (дискретний параметр перетворення за Лагерром  $n$  тут входить опосередковано) процедуру їх розв'язування можна здійснювати чисельно.

Остаточний розв'язок задачі (3.84)-(3.94) подається у вигляді:

$$\theta^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \xi \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) J_0(\xi \alpha) d\xi \right] L_n(\lambda \tau); \quad (3.104)$$

$$w^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \xi \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) J_0(\xi \alpha) d\xi \right] L_n(\lambda \tau); \quad (3.105)$$

Інші компоненти вектора переміщень та тензора напружень визначаються формулами

$$u^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \left[ \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - d_\gamma \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \right] J_1(\xi \alpha) d\xi \right] L_n(\lambda \tau); \quad (3.106)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda E_i \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \xi \left( \frac{v_i \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma)}{(1+v_i)(1-2v_i)} + \frac{1}{(1+v_i)} d_\gamma \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\alpha_T^{(i)}}{1-2v_i} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \right) J_0(\xi \alpha) d\xi \right] L_n(\lambda \tau); \quad (3.107)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda E_i \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \xi \left( \frac{v_i \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma)}{(1+v_i)(1-2v_i)} - \frac{\alpha_T^{(i)}}{1-2v_i} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \right) J_0(\xi \alpha) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{1}{1+v_i} \int_0^{\infty} \left( \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - d_\gamma \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \right) \left( \xi J_0(\xi \alpha) - \alpha^{-1} J_1(\xi \alpha) \right) d\xi \right] L_n(\lambda \tau); \quad (3.108)$$

$$\sigma_{\alpha\gamma}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = 2\lambda E_i \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \left( \frac{(1-v_i) d_\gamma \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma)}{(1-2v_i)} - \xi^2 \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha_T^{(i)} \frac{1+v_i}{1-2v_i} d_\gamma \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \right) J_1(\xi \alpha) d\xi \right] L_n(\lambda \tau). \quad (3.109)$$

### 3.3 Числові розрахунки термонапруженого стану в шаруватих тілах

#### 3.3.1 Напружено-деформований стан в багатошарових тілах

Числовий аналіз проводився для періодичних композитів, виготовлених з  $\text{Al}_2\text{O}_3$  (кераміки) та алюмінієвого стопу, фізико-механічні характеристики яких подано у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Фізико-механічні властивості складових

|                                       | Алюмінієвий стоп      | Кераміка ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) |
|---------------------------------------|-----------------------|--------------------------------------|
| $a_i$ [ $\text{м}^2/\text{сек}$ ]     | $90.6 \times 10^{-6}$ | $11.9 \times 10^{-6}$                |
| $\lambda_T^{(i)}$ [ $\text{Вт/м К}$ ] | $22.2 \times 10$      | $3.6 \times 10$                      |
| $\alpha_T^{(i)}$ [ $1/\text{К}$ ]     | $23.6 \times 10^{-6}$ | $8.0 \times 10^{-6}$                 |
| $E_i$ [ $\text{Гпа}$ ]                | $7.0 \times 10$       | $34.3 \times 10$                     |
| $\nu_i$                               | 0.33                  | 0.22                                 |

Вибір цих матеріалів зумовлено двома причинами: по-перше вони широко використовуються в сучасній інженерній практиці як елементи композитних матриць, а по-друге істотні відмінності практично усіх фізико-механічних властивостей дозволяють виявити більшість основних механічних ефектів, що відбуваються при нагріванні неоднорідних тіл. При цьому враховувалось два основних порядки розміщення шарів: перший, коли шари з парними індексами виготовлені з алюмінієвого стопу, а з непарними із  $\text{Al}_2\text{O}_3$  та другий випадок, коли шари з непарними індексами виготовлені з алюмінієвого стопу, а з парними із  $\text{Al}_2\text{O}_3$ . І в першому, і у другому випадках при обезрозмірюванні за базові величини  $\lambda_T^{(0)}, a_0, \alpha_T^{(0)}, E_0$  були взяті відповідні параметри алюмінієвого стопу. Розрахунки проводились при заданні постійного теплового потоку на границі композита  $q(r, t) = q^* S_+(R - r) S_+(t)$  та при  $Bi = 1$ .

За формулами (3.50) було розраховано безрозмірне температурне поле  $T^* = T(\rho, \gamma, \tau) R / q^*$  в трьохшаровому композиті з відносними товщинами шарів  $h_1 = 0,4; h_2 = 0,2; h_3 = 0,4$ . Виявилось, що при утриманні 30 членів ряду за Лагерром відносна похибка в розрахунках не перевищує 1%. На рис. 3.3 а) подано

результат розрахунку безрозмірного температурного поля по осі  $\rho = 0$  для різних значень змінної  $\tau$  у першому випадку розміщення шарів, а на рис. 3.3 б) у другому випадку.

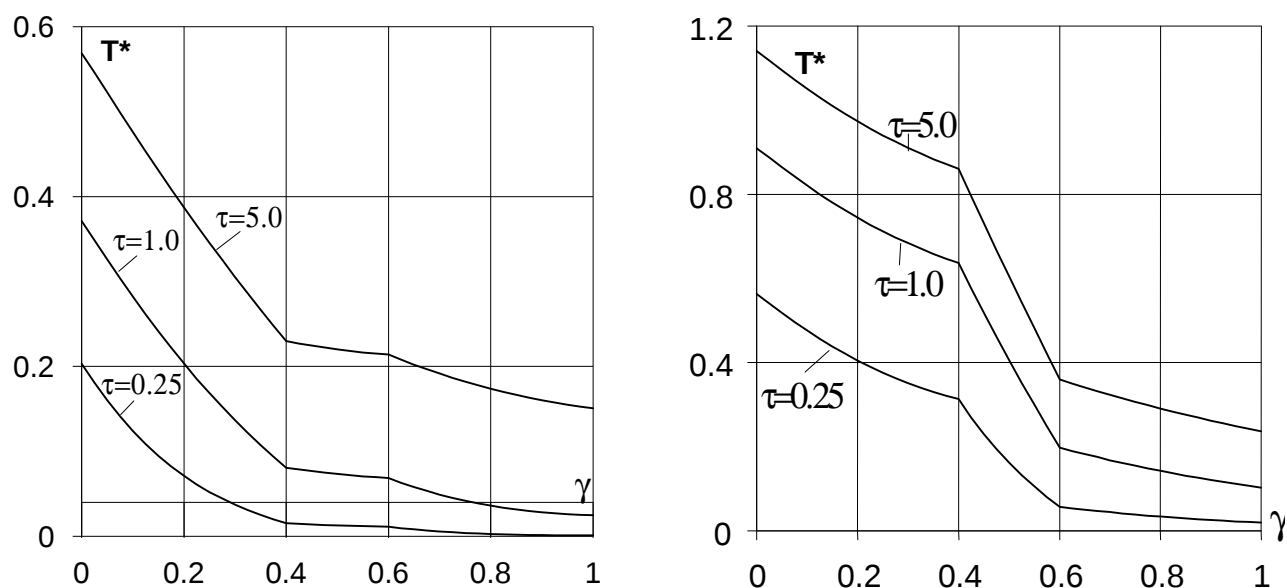


Рис 3.3. Температурне поле трьохшарової плити

а) шар кераміки зовні

б) шар кераміки всередині

Як видно з наведених результатів зміна температури за глибиною в кожному шарі як у першому, так і у другому випадках розміщення шарів з ростом часу приймає практично лінійний характер, що пояснюється невеликою відносною товщиною шарів. У першому випадку найбільшого перепаду температур зазнають зовнішні шари композиту, а у другому випадку – внутрішні.

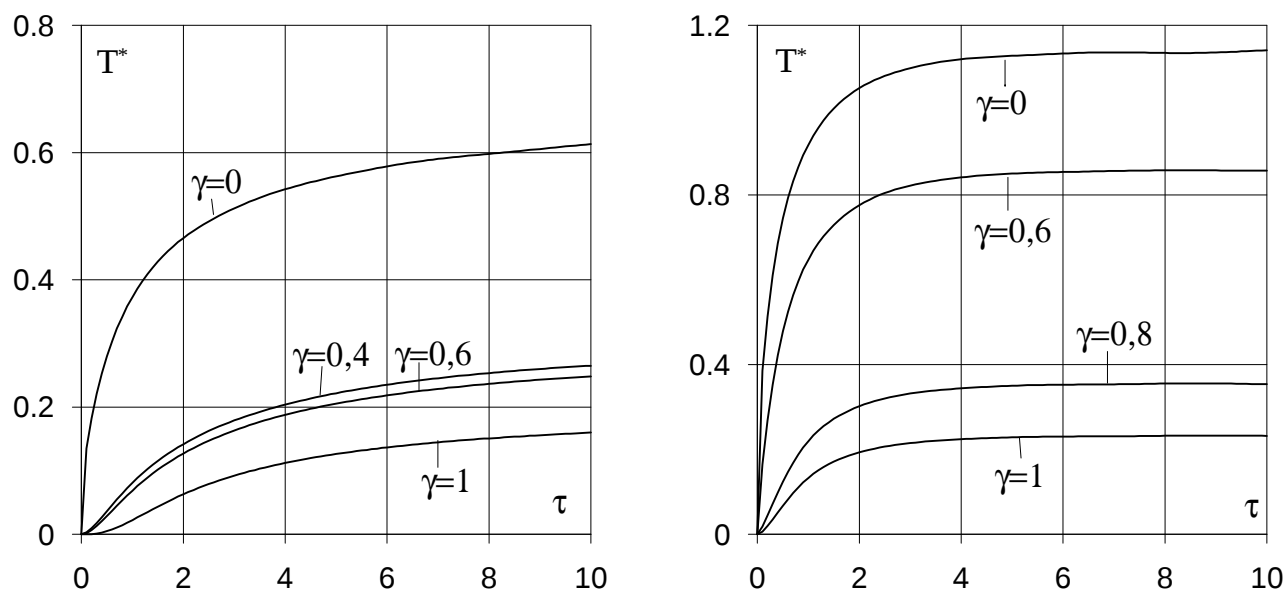


Рис. 3.4 Температура різних точок осі симетрії трьохшарової плити

а) шар кераміки зовні

б) шар кераміки всередині

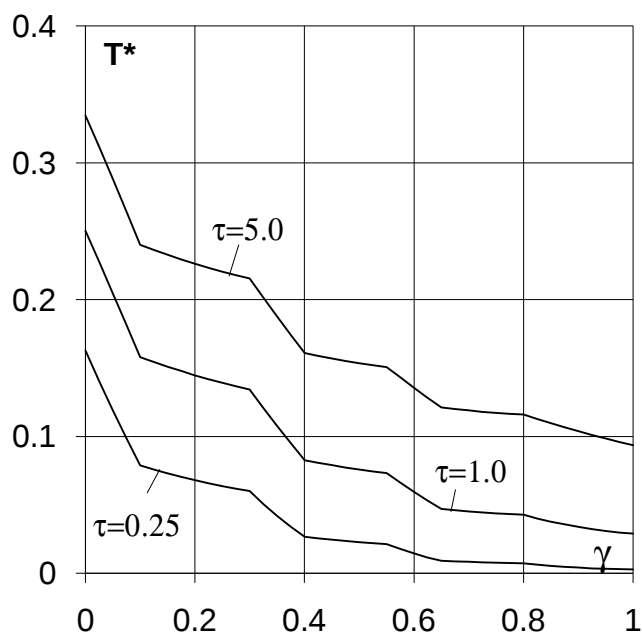


Рис. 3.5. Температурне поле семишарової плити

Про тривалість перехідного процесу, залежно від розміщення шарів можна судити з рис. 3.4 а) та б), де зображено температурне поле по осі  $\rho = 0$  для різних точок композита залежно від часу. Як в першому, так і у другому випадках температура набуває максимального значення в стаціонарному режимі, проте у першому випадку розміщення шарів тривалість перехідного періоду значно більша.

З метою апробації методики на більшій кількості шарів було проведено числовий аналіз температурного поля в семишаровій плиті для першого випадку розміщення шарів, результати якого зображено на рис. 3.5. Як видно з рисунку характер розподілу температури по осі симетрії композита практично такий, як і для трьохшарового тіла. Відмінність у більшій кількості характерних «зламів» на лініях поділу матеріалів та у зниженні температури на поверхні плити. Це пояснюється наявністю у композиті більшої кількості шарів з вищим коефіцієнтом теплопровідності.

Результати числового аналізу безрозмірних дотичних напружень  $\sigma_{\rho\gamma}^* = \sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}(\alpha, \gamma_1, \tau) / 2E_1$  на лінії поділу першого і другого матеріалу в різні моменти часу подано на рис. 3.6. а) та б), відповідно для першого та другого випадку розміщення шарів.

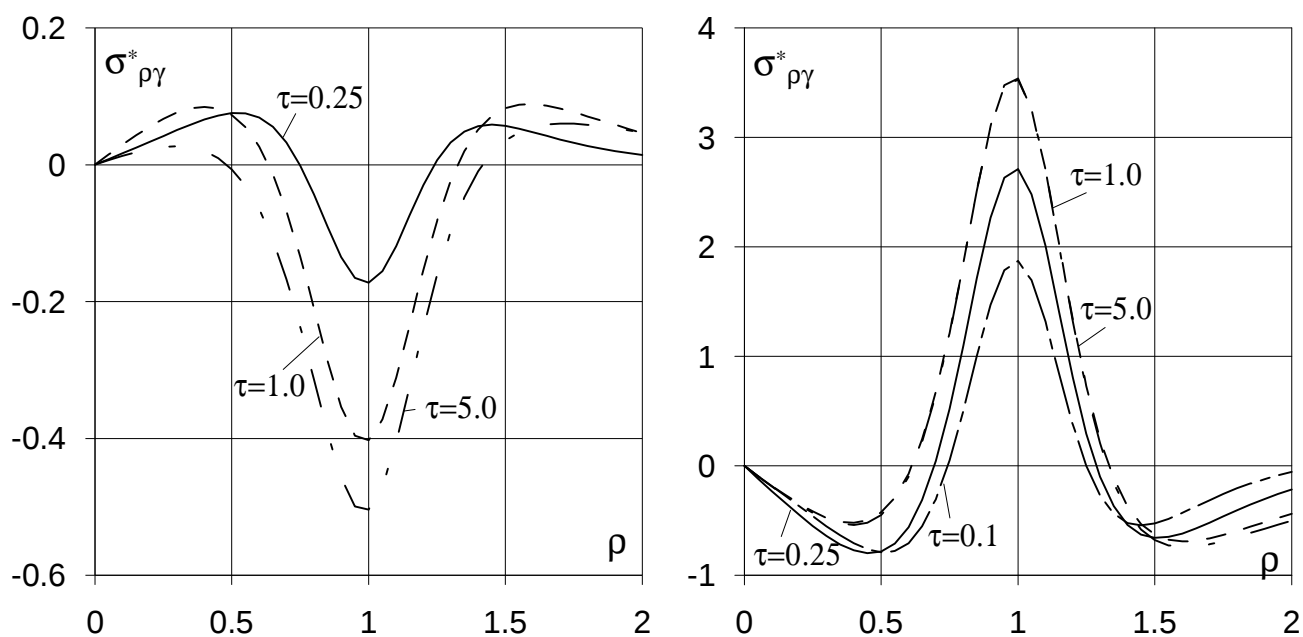


Рис. 3.6. Дотичні напруження на поверхні розділу матеріалів тришарового композита

а) шар кераміки зовні

б) шар кераміки всередині

Результати розрахунку дотичних напружень на лінії розділу другого і третього шару для різних випадків розміщення шарів подано на рис. 3.7 а) та б).

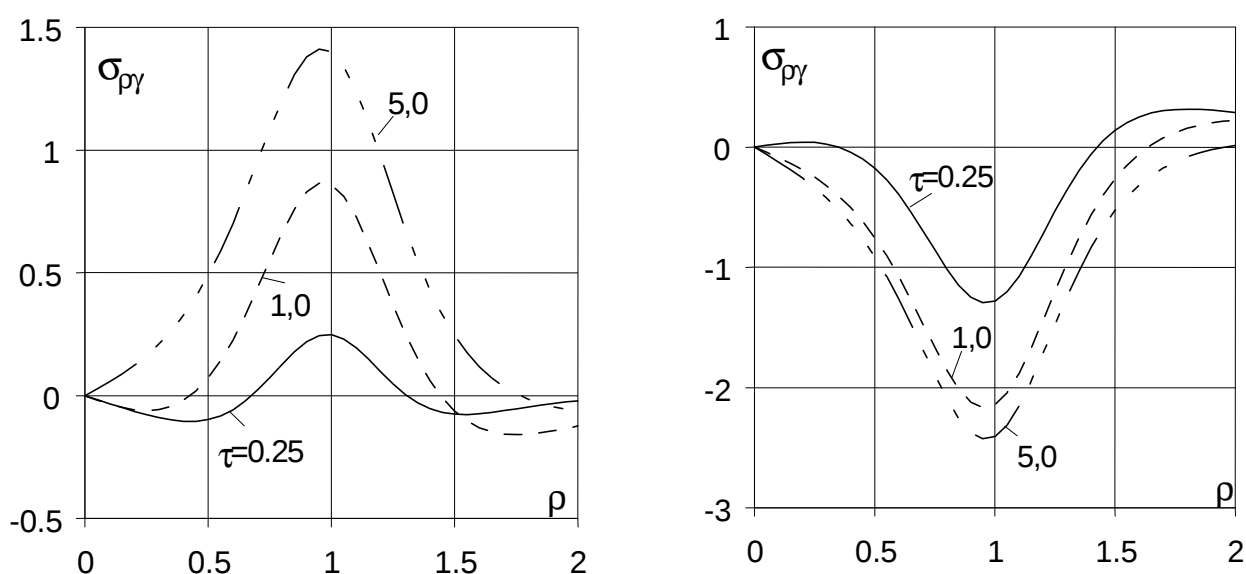


Рис. 3.7. Дотичні напруження на поверхні розділу матеріалів тришарового композита

а) шар кераміки зовні

б) шар кераміки всередині

Як видно з наведених результатів тенденції поведінки вказаних напружень зберігаються – тривалість перехідного процесу у другому випадку розміщення шарів є значно меншою, а максимальні за модулем напруження значно вищими.

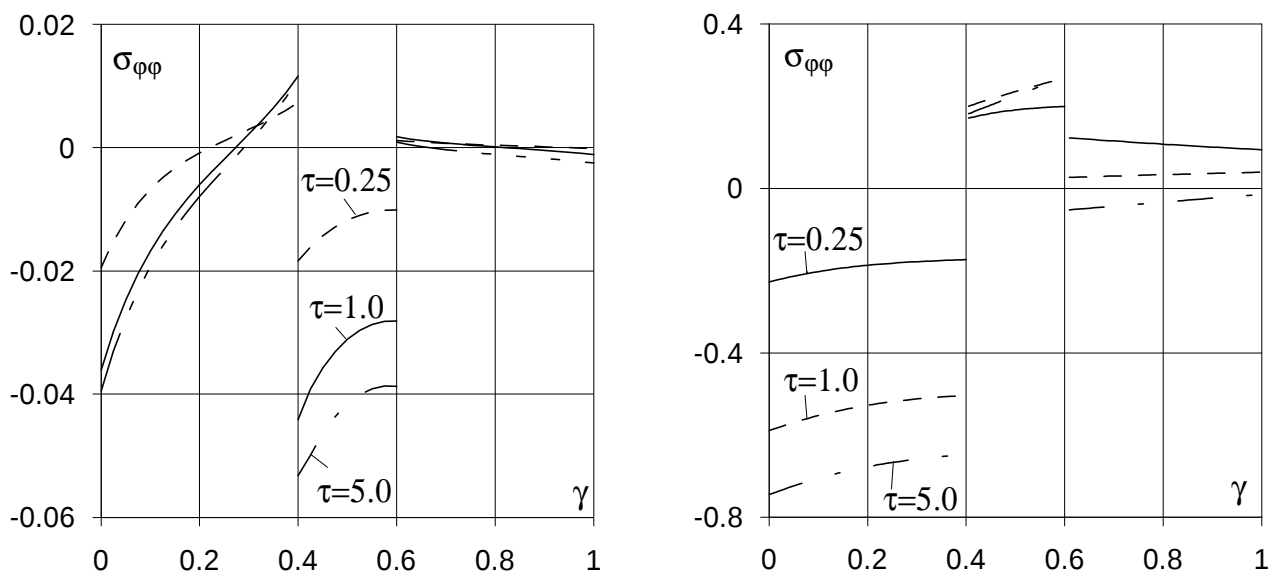


Рис. 3.8. Колові напруження в тришаровому композиті

а) шар кераміки зовні

б) шар кераміки всередині

На рис. 3.8 а) та б) наведено результати розрахунку безрозмірних колових напружень  $\sigma_{\phi\phi}^*(0, \gamma, \tau)$  відповідно для двох випадків розміщення шарів. З рисунків видно, що вказані напруження на поверхнях поділу матеріалів шарів отримують стрибки, причому абсолютна величина цих стрибків з часом зростає. Максимальне за модулем значення цих напружень суттєво залежить від порядку розташування шарів. Так максимальне за модулем значення колових напружень у другому випадку розміщення шарів з урахуванням обезрозмірення більш ніж удвічі перевищує аналогічні значення у першому випадку, причому область максимальних за модулем напружень із зовнішнього шару переходить у внутрішній шар. Від порядку розміщення шарів суттєво залежить і рівень розтягуючих колових напружень в композиті. Так, якщо у першому випадку він відносно незначний і область дії розтягуючих напружень зосереджена в першому шарі поблизу поверхні поділу, то в другому випадку розтягуючі напруження в основному виникають в середньому шарі, а в третьому шарі, з часом, переходять у стискуючі.

### 3.3.2. Числовий аналіз термонапруженого стану в тілах з покриттями

За формулою (3.80) проведено числовий розрахунок перехідного плоского температурного поля в системі шар-півпростір (шар – кераміка, основа – алюмінієвий стоп) при . На рис. 3.9. показано зміну безрозмірної температури за

глибиною композита при різних значеннях безрозмірного часу.

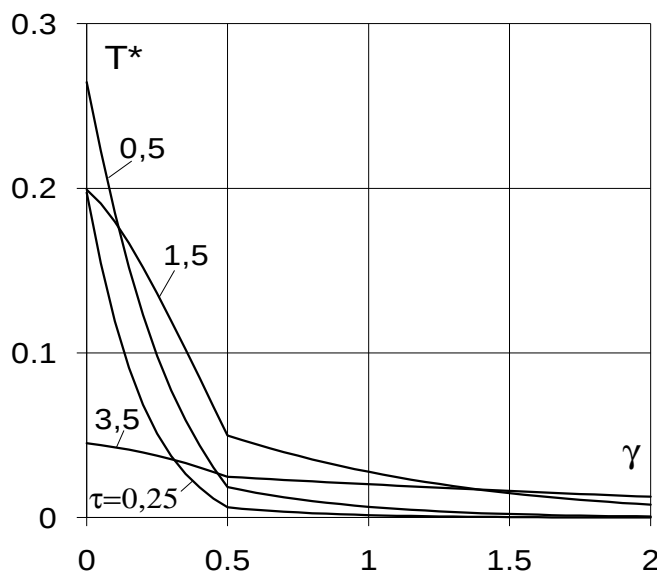


Рис. 3.9. Температурне поле в півпросторі із покриттям в різні моменти часу

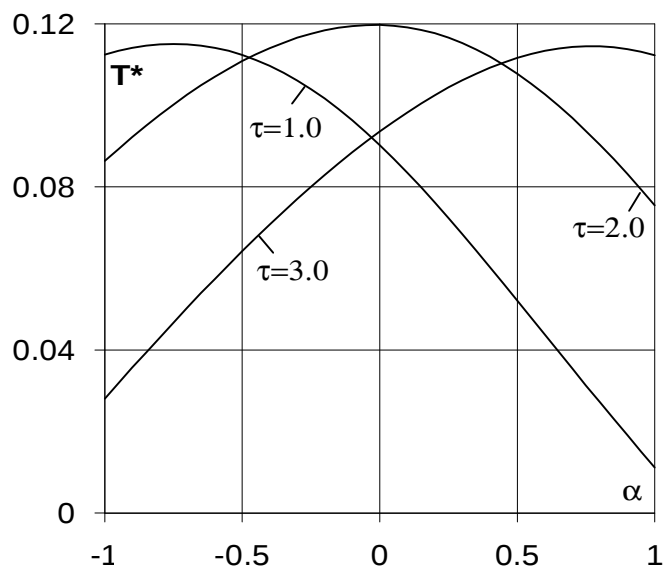


Рис. 3.10. Температура поверхні розділу в різні моменти часу

Як видно з наведених результатів, найбільшого значення температура набуває на вільній поверхні композита при наближенні до області заміру краю джерела тепла ( $\tau \approx 1.0$ ). У той же час на лінії розділу матеріалів максимальна температура досягається в момент часу, коли середина плями нагріву досягає області заміру ( $\tau \approx 2.0$ ). Цю закономірність добре видно на рис. 3.10, де зображено розподіл температурного поля поверхні розділу матеріалів в різні моменти безрозмірного часу.

На рис. 3.11. зображено розподіл безрозмірних дотичних напружень на поверхні поділу шарів для різних значень часової змінної. З наведеного видно, що вказані напруження під час перехідного процесу кілька разів змінюють свій знак і набувають максимального за модулем значення після проходження над зоною вимірювання центральної частини області нагріву. На нашу думку це пояснюється суттєвою різницею градієнту температурного поля у шарі та у півпросторі саме після проходження центру плями нагріву - у той час, коли матеріал шару починає охолоджуватись, матеріал півпростору продовжує нагріватись (рис. 3.6.).

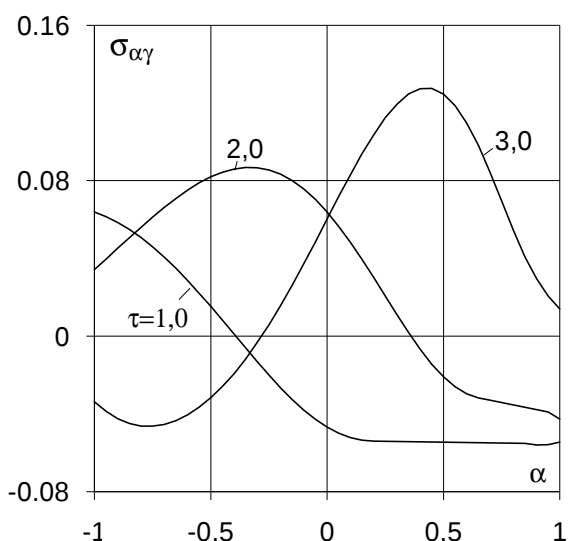


Рис. 3.11. Дотичні напруження на межі покриття та півпростору за рухомого нагріву

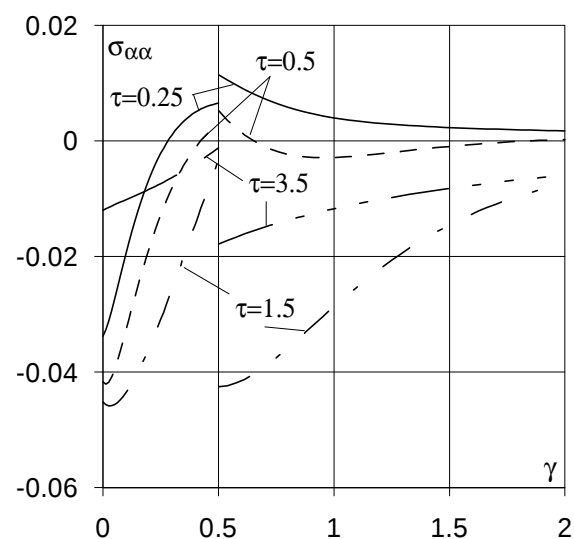


Рис. 3.12. Радіальні напруження на осі  $\gamma = 0$  в покритті та півпросторі

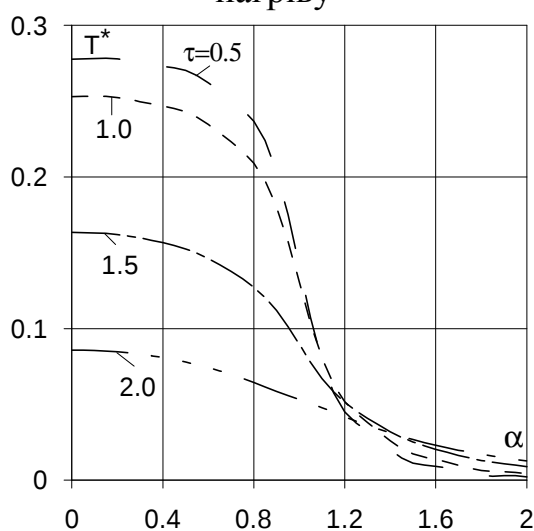


Рис. 3.13. Температура поверхні покриття при імпульсному нагріві

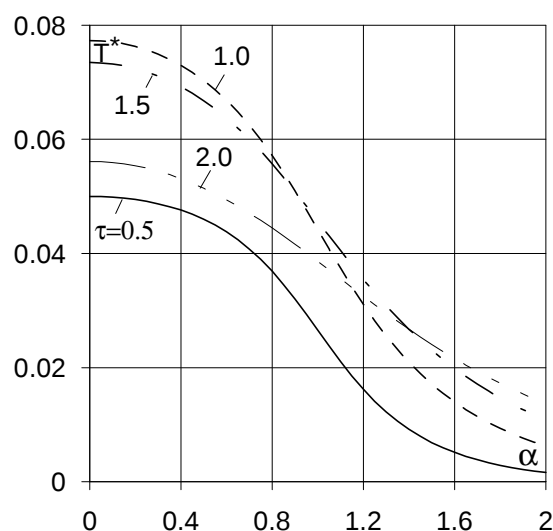


Рис. 3.14. Температура поверхні розділу при імпульсному нагріві

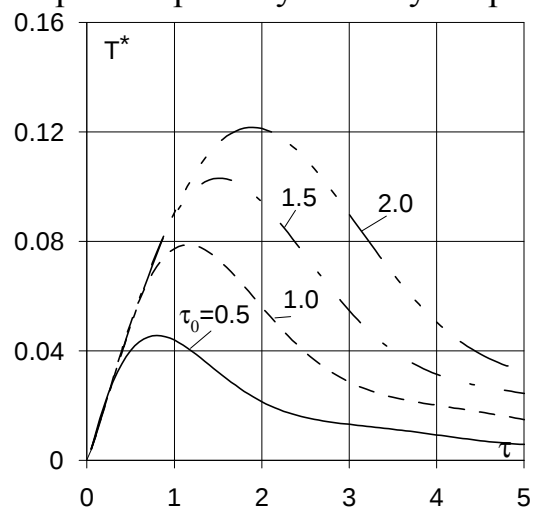


Рис. 3.15. Температура центру плями нагріву

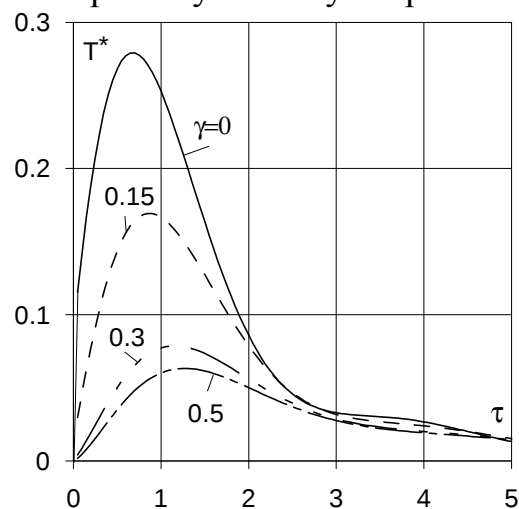


Рис. 3.16. Температура на осі симетрії покриття та основи

Подібну закономірність можна спостерігати і при розгляді безрозмірних напружень  $\sigma_{\alpha\alpha}$ , розподіл яких на осі  $\gamma = 0$  під час перехідного періоду показано на рис. 3.12. Як видно з рисунку вказані напруження під час перехідного періоду змінюють знак і досягають максимального за модулем значення і максимального стрибка на поверхні поділу під час проходження джерела тепла.

Розподіл температурного поля по радіальній змінній на поверхні композиту і на лінії розділу у випадку імпульсного джерела тепла показано на рис. 3.13 – 3.14, відповідно. На рис. 3.15 зображено температуру в центрі нагріву на лінії розділу матеріалів, залежно від тривалості імпульсу нагрівання, а на рис. 3.16 при тривалості імпульсу 1,0 для різних значень нормальної змінної.

Проте, в задачах для тіл з нанопокриттями слід враховувати, що відносна товщина покриття може становити близько  $10^{-5} \div 10^{-8}$  м. Тому, поряд із іншими дослідженнями, особливе місце в роботі було відведено проблемі "тонкості покриття", яка становить значну проблему при прямому використанні чисельних методів. Одними із способів усунення цієї проблеми є або значне збільшення розміру покриття, або математичне спрощення постановки задачі, що може привести до значних остаточних погрешностей. Нами, завдяки розробленій методиці, без жодних математичних спрощень вдалося отримати стійкий до числових процедур розв'язок задачі для довільної відносної товщини покриття. Як свідчать наведені в табл. 3.2. результати розрахунку безрозмірної температури  $T(\alpha, \gamma, \tau) = T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) / q^*$  в момент часу  $\tau = 1$  в центрі ділянки нагріву, для досягнення прийнятної точності для цього випадку достатньо враховувати відносну товщину покриття до  $\gamma_1 = 10^{-3}$ .

Таблиця 3.2.

Температура поверхонь  $\alpha = 0$ , залежно від товщини покриття.

| $\gamma$ | $T(0, \gamma, 1)$    |                      |                      |                      |                      |
|----------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
|          | $\gamma_1 = 10^{-1}$ | $\gamma_1 = 10^{-2}$ | $\gamma_1 = 10^{-3}$ | $\gamma_1 = 10^{-4}$ | $\gamma_1 = 10^{-5}$ |
| 0.0      | 0.222022             | 0.102543             | 0.089780             | 0.088498             | 0.088369             |
| 0.1      | 0.078238             | 0.075439             | 0.074830             | 0.074766             | 0.074760             |
| 0.2      | 0.065654             | 0.063836             | 0.063358             | 0.063308             | 0.063303             |

|     |          |          |          |          |          |
|-----|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0.3 | 0.055111 | 0.054008 | 0.053633 | 0.053594 | 0.053590 |
| 0.4 | 0.046234 | 0.045643 | 0.045349 | 0.045318 | 0.045315 |
| 0.5 | 0.038734 | 0.038500 | 0.038269 | 0.038244 | 0.038242 |
| 0.6 | 0.032381 | 0.032389 | 0.032207 | 0.032188 | 0.032186 |
| 0.7 | 0.026996 | 0.027158 | 0.027015 | 0.026999 | 0.026998 |
| 0.8 | 0.022433 | 0.022683 | 0.022571 | 0.022558 | 0.022557 |
| 0.9 | 0.018573 | 0.018863 | 0.018775 | 0.018765 | 0.018764 |
| 1.0 | 0.015314 | 0.015612 | 0.015543 | 0.015535 | 0.015534 |

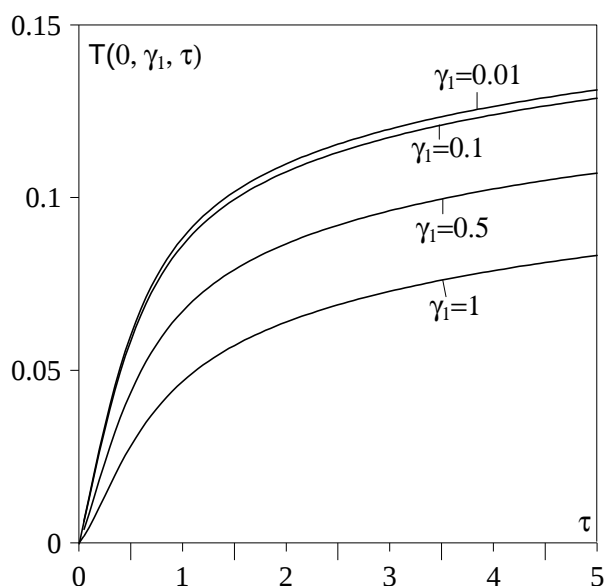


Рис. 3.17. Часова трансформація температури поверхні покриття, залежно від його товщини

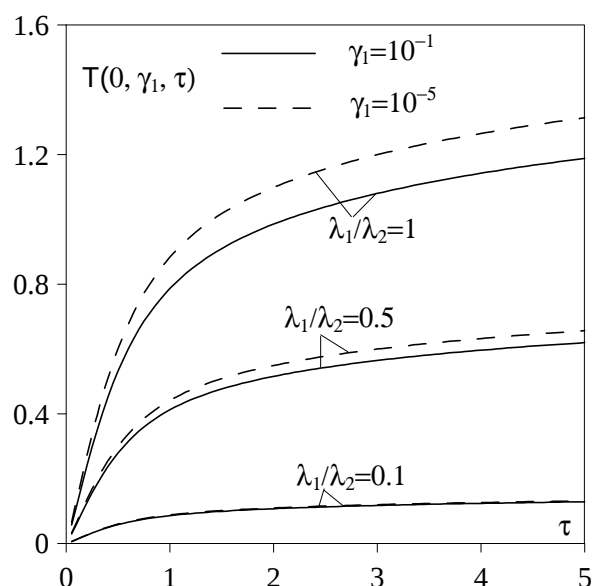


Рис. 3.18. Часова трансформація температури поверхні покриття, залежно від його теплопровідності

Це підтверджують і розрахунки розподілу в часі температури на поверхні поділу матеріалів покриття і півпростору для різних значень  $\gamma_1$ , подані на рис. 3.17. і 3.18.

Проте, як з'ясувалось, це стосується лише випадку покриття, що має низькі, порівняно з основою, теплопровідні характеристики. Збільшення відносного коефіцієнту теплопровідності покриття призводить, як свідчать відповідні результати числового розрахунку поданого на рис.3.18, як до зростання температури, так і до суттєвої відмінності результатів, одержаних для різних значень відносної товщини покриття.

За знайденим температурним полем було проведено розрахунки напружено-деформованого стану в півпросторі з покриттям. При цьому вважалось, що

$\nu_1 = 0.22$ ,  $\nu_2 = 0.33$  і, відповідно,  $\kappa_1 = 0.28$ ,  $\kappa_2 = 0.39$  та були введені в розгляд безрозмірні величини  $\alpha_T^{(i)} = q * \alpha_T^{(i)} / d$  для яких було покладено  $\alpha_T^{(1)} = 10^{-3}$ ,  $\alpha_T^{(2)} = 5 \cdot 10^{-3}$ . Всі напруження були приведені до безрозмірного вигляду з використанням коефіцієнта Ляме півпростору:  $\sigma_{kl}(\alpha, \gamma, \tau) = \sigma_{kl}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) / \mu_2$ .

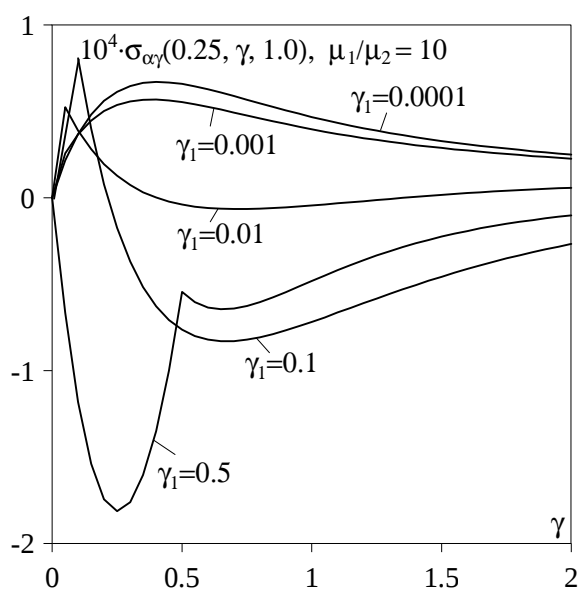


Рис. 3.19. Розподіл дотичних напружень, залежно від товщини покриття

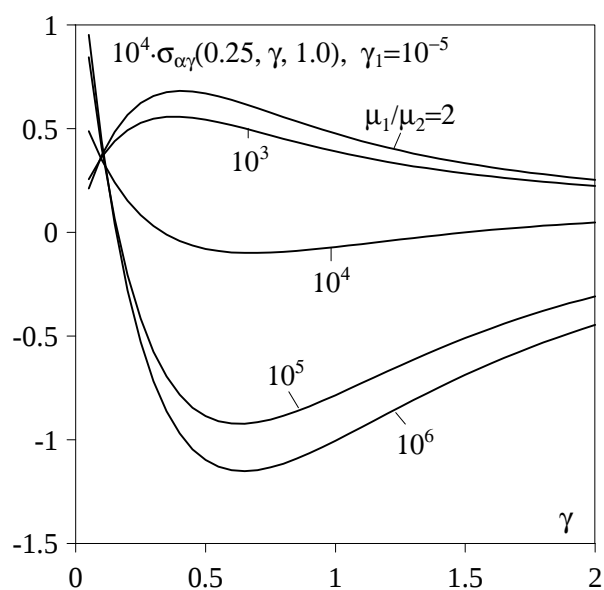


Рис. 3.20. Розподіл дотичних напружень, залежно від пружних властивостей покриття

На рис 3.19 подано результати розрахунку дотичних напружень вздовж ліній  $\alpha = 0.25$  в момент часу  $\tau = 1$  для випадку  $\mu_1 / \mu_2 = 10$ . Як видно з наведеного, відносна товщина покриття при такому значенні відношення  $\mu_1 / \mu_2$  суттєво впливає як на абсолютну величину, так і якісну картину розподілу дотичних напружень в тілі. Для невеликих значень відносної товщини дотичні напруження набувають максимального абсолютного значення в покритті ( $\gamma_1 = 0.5$ ) чи півпросторі ( $\gamma_1 = 0.1$ ) та змінюють свій знак. Зі зменшенням відносної товщини покриття дотичні напруження перестають змінювати свій знак та стають найбільшими за абсолютною величиною вже на межі поділу матеріалів покриття та півпростору. Величину відносної товщини покриття для випадку  $\mu_1 / \mu_2 = 10$  достатньо враховувати до  $\gamma_1 = 10^{-4}$  – далі результати практично не відрізняються.

На рис. 3.20 подано результати розрахунку дотичних напружень в півпросторі з тонким ( $\gamma_1 = 10^{-5}$ ) покриттям в дальній від межі поділу матеріалів зоні, залежно від пружних характеристик покриття. Збільшення відношення пружної сталої  $\mu_1$  покриття по відношенню до відповідної сталої півпростору призводить до зміни знаку напружень та збільшення їх інтенсивності. При цьому напруження значно змінюються, як в областях, що значно віддалені від покриття, так і в областях поблизу нього. На відміну від цього випадку для покриття з відносною товщиною  $\gamma_1 = 0.1$  суттєвий вплив величини  $\mu_1 / \mu_2$  спостерігається лише в областях віддалених від покриття. При цьому діапазон значень цього відношення, що має вплив на напружений стан сильно відрізняється від випадку тонкого покриття – найбільший вплив спостерігається для значень  $\mu_1 / \mu_2$ , що лежать в числовому інтервалі  $[1; 100]$ , в той час, як для випадку  $\gamma_1 = 10^{-5}$  цей інтервал становить  $[10^3; 10^7]$ .

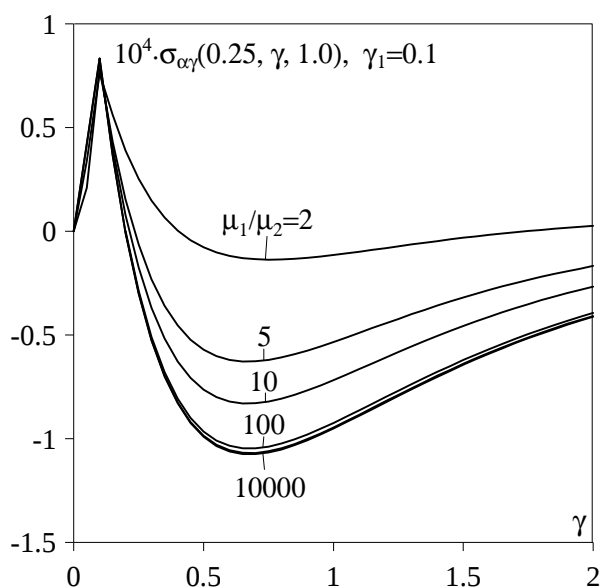


Рис. 3.21. Залежність дотичних напружень від пружних властивостей покриття

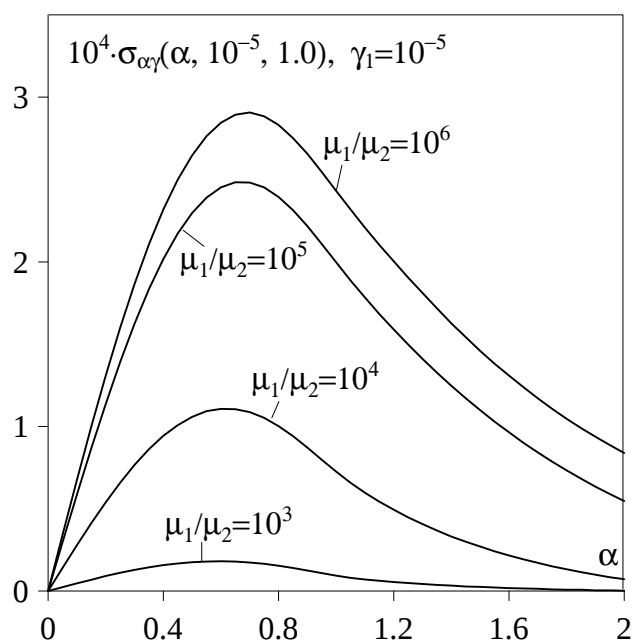


Рис. 3.22. Дотичні напруження на лінії розділу

Ці висновки підтверджують і результати розрахунку (рис. 3.21) дотичних напружень на поверхні поділу матеріалів тонкого покриття ( $\gamma_1 = 10^{-5}$ ) та півпростору залежно від величини  $\mu_1 / \mu_2$ . Як видно з наведеного, величина

$\mu_1/\mu_2$  на поверхні поділу матеріалів суттєво впливає лише на максимум цих напружень, який досягається поблизу лінії  $\alpha=0.7$ , залишаючи практично незмінним характер їх розподілу.

Для з'ясування впливу часової змінної на розподіл дотичних напружень за глибиною композитного тіла з параметрами  $\gamma_1=10^{-3}$ ,  $\mu_1/\mu_2=10^3$  було проведено їх розрахунок на лінії  $\alpha=0.25$  в ближній до поверхні поділу області (рис. 3.23) та дальній області (рис. 3.24). Як свідчать наведені результати свого максимуму в кожний момент часу дотичні напруження досягають на поверхні поділу матеріалів та з часом збільшуються. Проте, якщо в ближній зоні ці напруження з часом зростають рівномірно в усіх точках, то в дальній зоні при  $\gamma > 0.2$  спостерігається незначна релаксація, – так, наприклад, в момент часу  $\tau=1$  в точці  $\gamma=0.25$  значення дотичного напруження становить  $-0.41$ , а в момент часу  $\tau=5$  в цій же точці вже  $-0.17$  (зменшення за абсолютною величиною близько 60%).

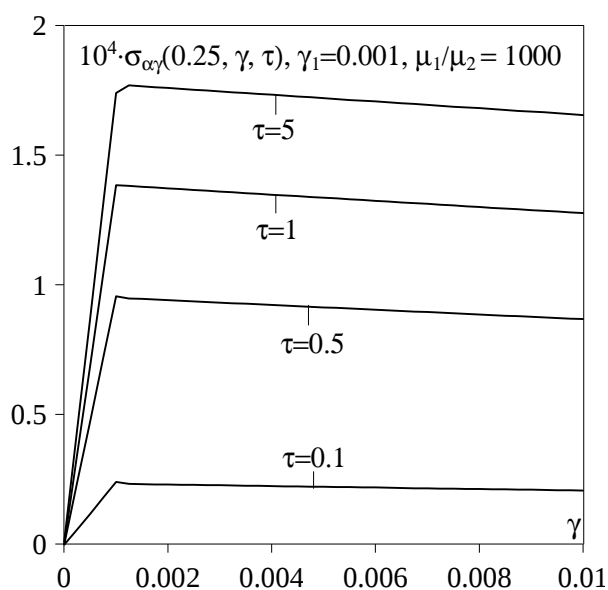


Рис. 3.23. Дотичні напруження за глибиною півпростору з покриттям (ближня зона)

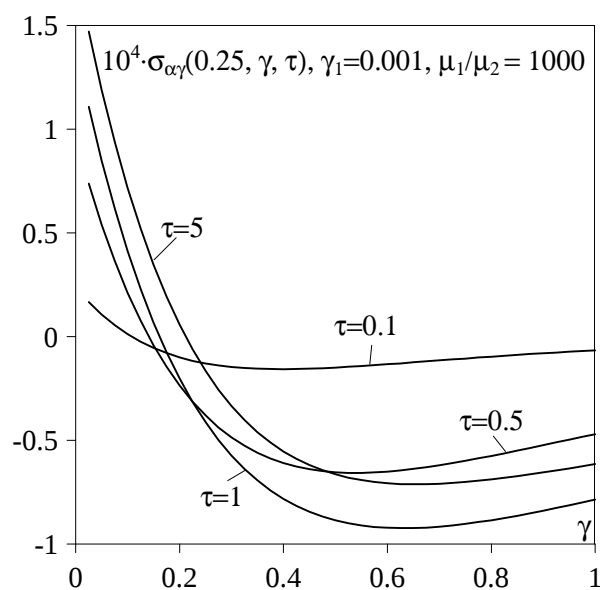


Рис. 3.24. Дотичні напруження за глибиною півпростору з покриттям (дальня зона)

На рис. 3.25 подано результати розрахунку залежностей нормальних напружень  $\sigma_{\gamma\gamma}$  в центрі області нагріву від змінної  $\gamma$  для різних значень відносної товщини покриття  $\gamma_1$ . Як видно з рисунку, під центром області нагріву нормальні

напруження завжди стискуючі, зменшення відносної товщини покриття призводить до збільшення їх рівня та зміщення точки максимуму вглиб півпростору.

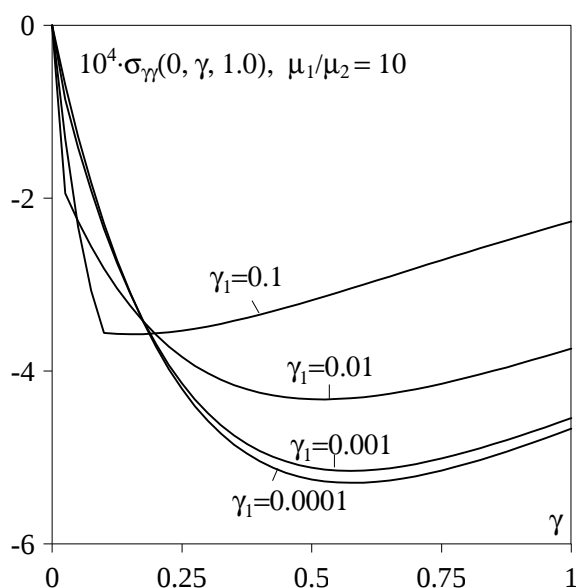


Рис. 3.25. Нормальні напруження вздовж осі  $\alpha = 0$ .

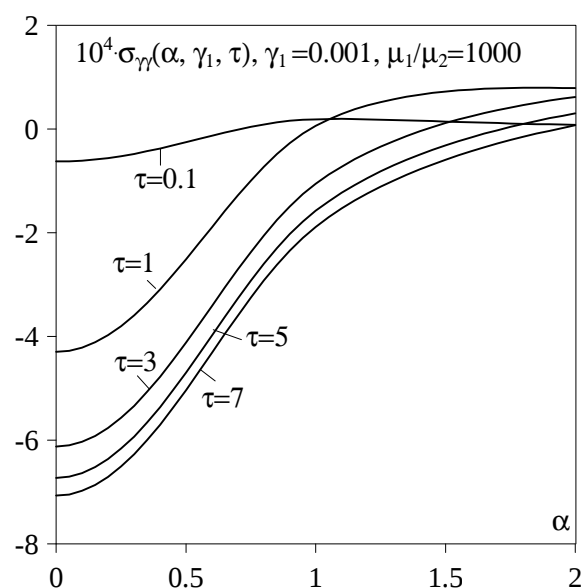


Рис. 3.26. Нормальні напруження на поверхні спряження

Розподіл нормальних напружень в покритті на межі поділу матеріалів залежно від часу при  $\gamma_1 = 10^{-3}$ ,  $\mu_1 / \mu_2 = 10^3$  наведено на рис. 3.26. З наведеного можна зробити наступні основні висновки: свого максимального за модулем значення нормальні напруження досягають при  $\alpha = 0$  в стаціонарному режимі, під час перехідного періоду ( $\tau \leq 5$ ) в областях, що лежать поза ділянкою нагрівання виникають розтягуючі нормальні напруження, збільшення сталої пружності  $\mu_1$  покриття по відношенню до відповідної сталої півпростору призводить до значного росту рівня нормальних напружень.

Поведінка напружень  $\sigma_{\alpha\alpha}$  в часі при  $\alpha = 0$ ,  $\gamma_1 = 0.1$  та  $\mu_1 / \mu_2 = 10$  залежно від змінної  $\gamma$  показана на рис. 3.27. Як видно з графічного матеріалу, з ростом часу стрибок цих напружень на поверхні поділу матеріалів збільшується і вони поступово стають стискуючими як в півпросторі, так і в покритті. Дещо інша картина спостерігається в областях розташованих поза ділянкою нагрівання, про що свідчать результати розрахунку цих напружень на поверхні поділу матеріалів

при  $\gamma_1 = 10^{-3}$ ,  $\mu_1 / \mu_2 = 10^3$  – свого максимуму напруження  $\sigma_{\alpha\alpha}$  досягають в стаціонарному режимі поблизу краю ділянки нагріву і є розтягуючими.

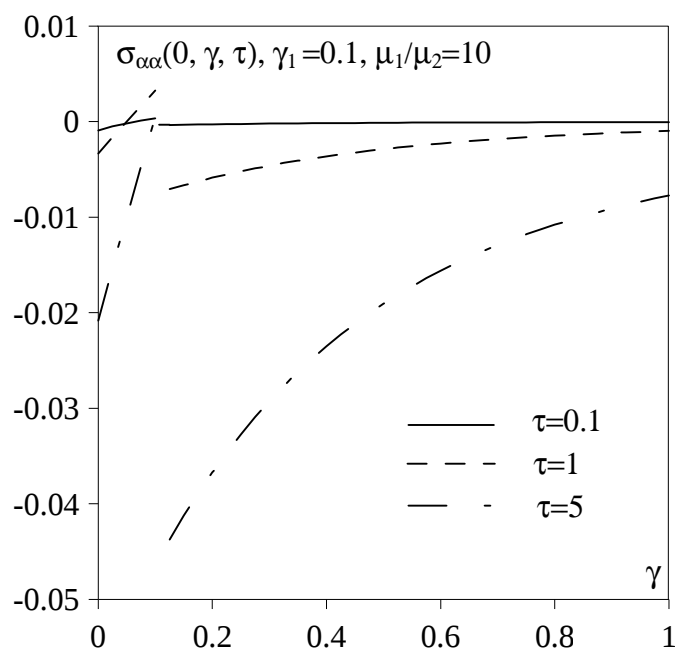


Рис. 3.27. Напруження  $\sigma_{\alpha\alpha}$  при  $\alpha = 0$ .

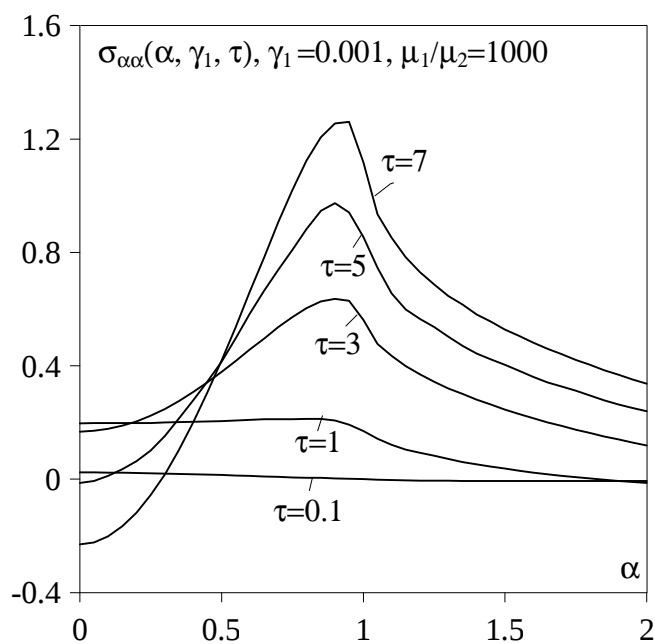


Рис. 3.28. Напруження  $\sigma_{\alpha\alpha}$  на поверхні поділу.

### 3.4. Квазістатична задача термопружності для півсмуги з покриттям

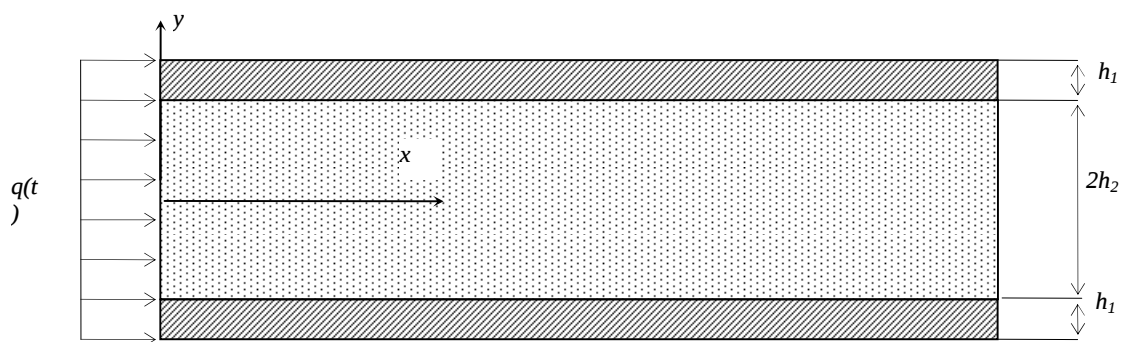


Рис. 3.29 Схема задачі

Розглядається неоднорідна півсмуга ( $x \geq 0$ ,  $-H \leq y \leq H$ ), що складається з основи ширини  $2h_2$  та двох однакових покриттів ширини  $h_1$  ( $h_1 + h_2 = H$ ) із відмінними від основи фізико-механічними характеристиками, нанесених на граничні поверхні основи  $y = \pm h_2$  (рис. 3.29). З моменту часу  $t = 0$  півсмуга

починає нагріватись потоком тепла  $q^*(t)$ , рівномірно розподіленим на її торцевій поверхні  $x=0$ , а з граничних поверхонь  $y=\pm H$  відбувається теплообмін за законом Ньютона із зовнішнім середовищем нульової температури. Вважається, що початкова температура всього пакета дорівнює нулю, а на межі поділу покриття та півпростору виконуються умови ідеального теплового контакту.

Враховуючи фізичну та геометричну симетрію задачі відносно осі  $y=0$ , в термінах безрозмірних змінних та величин  $\alpha = x/H$ ,  $\gamma = y/H$ ,  $\tau = a_T^{(2)}t/H^2$ ,  $\gamma_1 = h_1/H$ ,  $a_T^{(i)} = a_T^{(2)} / a_T^{(i)}$ ,  $\lambda_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)} / \lambda_T^{(2)}$ ,  $q(\tau) = q(H^2\tau / a_T^{(2)})H / \lambda_T^{(2)}$ ,  $Bi = \kappa H / \lambda_T^{(1)}$ , задача теплопровідності формулюється наступним чином:

$$\partial_{\alpha\alpha}^2 T^{(i)} + \partial_{\alpha\alpha}^2 T^{(i)} = a_T^{(i)} \partial_{\tau} T^{(i)}, \quad i=1,2; \quad (3.110)$$

$$T^{(i)}(\alpha, \gamma, 0) = 0, \quad i=1,2; \quad (3.111)$$

$$\lambda_T^{(i)} \partial_{\alpha} T^{(i)} = -q(\tau), \quad \alpha=0, \quad i=1,2; \quad (3.112)$$

$$\partial_{\gamma} T^{(2)} = 0, \quad \gamma=0; \quad (3.113)$$

$$\partial_{\gamma} T^{(1)} + Bi T^{(1)} = 0, \quad \gamma=1; \quad (3.114)$$

$$T^{(1)} = T^{(2)}, \quad \lambda_T^{(1)} \partial_{\gamma} T^{(1)} = \partial_{\gamma} T^{(2)}, \quad \gamma=\gamma_1. \quad (3.115)$$

Тут  $\lambda_T^{(i)}, a_i$  – відповідно, коефіцієнти теплопровідності та температуропровідності покриття ( $i=1$ ) та основи ( $i=2$ );  $\kappa$  - коефіцієнт тепловіддачі з поверхонь покриття,  $T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$ ,  $i=1,2$  – температурне поле в покритті та основі.

До задачі (3.110) - (3.115) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра-Фур'є. В результаті одержимо

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - \omega_i^2 \bar{T}_n^{(i)} = \beta_i \sum_{k=0}^{n-1} \bar{T}_k^{(i)} - q_n^{(i)}, \quad n=0,1,2, \mathbf{K}; \quad (3.116)$$

$$d_{\gamma} \bar{T}_n^{(2)} = 0, \quad \gamma=0; \quad (3.117)$$

$$d_{\gamma} \bar{T}_n^{(1)} + Bi \bar{T}_n^{(1)} = 0, \quad \gamma=1; \quad (3.118)$$

$$\bar{T}_n^{(1)} = \bar{T}_n^{(2)}, \quad \lambda_T^{(1)} d_\gamma \bar{T}_n^{(1)} = d_\gamma \bar{T}_n^{(2)}, \quad \gamma = \gamma_1, \quad (3.119)$$

де  $\bar{q}_n^{(i)} = q_n / \lambda_T^{(i)}$ , а  $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \int_0^\infty \exp(-\lambda\tau) L_n(\lambda\tau) \int_0^\infty T_n^{(i)}(\alpha, \gamma) \cos(\xi\gamma) d\gamma d\tau$  - трансфор-

манта за Лагерром-Фур'є. В (3.116), внаслідок застосування перетворення Фур'є, вже врахована гранична умова (3.112). Ця послідовність відрізняється від послідовності (3.63) лише наявністю в правій частині доданку  $-q_n^{(i)}$ , а тому її загальний розв'язок можна подати у вигляді

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \gamma) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \gamma) \right] + Q_n^{(i)}, \quad (3.120)$$

де  $G_j^{(i)}(\xi, \gamma)$ ,  $W_j^{(i)}(\xi, \gamma)$  визначаються формулами (3.71), а  $Q_n^{(i)}$  - частковий розв'язок неоднорідної послідовності, який, враховуючи, що  $q_n^{(i)}$  не залежить від змінної  $\gamma$ , має вигляд рекурентного рівняння

$$Q_n^{(i)} = \frac{1}{\xi^2 + \lambda \bar{a}_T^{(i)}} \left[ q_n^{(i)} - \lambda \bar{a}_T^{(i)} \sum_{m=0}^{n-1} Q_m^{(i)} \right], \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K}, \quad i = 1, 2. \quad (3.121)$$

Розв'язок рівняння (3.121), використовуючи метод математичної індукції знайдемо в вигляді

$$Q_n^{(i)} = \frac{1}{\xi^2 + \lambda \bar{a}_T^{(i)}} \left\{ q_n^{(i)} - \frac{\lambda \bar{a}_T^{(i)}}{\xi^2 + \lambda \bar{a}_T^{(i)}} \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{\xi^2}{\xi^2 + \lambda \bar{a}_T^{(i)}} \right)^{n-1-k} q_k^{(i)} \right\}. \quad (3.122)$$

Невідомі  $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, A_n^{(2)}, B_n^{(2)}$  знайдемо з трансформованих умов (3.117)--(3.119). Безпосередня підстановка розв'язків (3.120) в ці умови після викладок описаних в першому підрозділі приводить до послідовності систем чотирьох алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} \\ 0 & 0 & b_{4,3} & b_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ B_n^{(1)} \\ A_n^{(2)} \\ B_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,n} \\ c_{2,n} \\ c_{3,n} \\ c_{4,n} \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K}, \quad (3.123)$$

де

$$b_{1,1} = (-\omega_1 + \text{Bi}) \exp(-\omega_1); \quad b_{2,1} = (\omega_1 + \text{Bi}) \exp(\omega_1); \quad b_{4,3} = -\omega_2; \quad b_{4,4} = \omega_2;$$

$$b_{2,1} = \exp(-\omega_1 \gamma_1); \quad b_{2,2} = \exp(\omega_1 \gamma_1); \quad b_{2,3} = -\exp(-\omega_2 \gamma_1); \quad b_{2,4} = -\exp(\omega_2 \gamma_1);$$

$$b_{3,1} = -\lambda_T^{(1)} \omega_1 \exp(-\omega_1 \gamma_1); \quad b_{3,2} = \lambda_T^{(1)} \omega_1 \exp(\omega_1 \gamma_1);$$

$$b_{3,3} = \omega_2 \exp(-\omega_2 \gamma_1); \quad b_{3,4} = -\omega_2 \exp(\omega_2 \gamma_1);$$

$$c_{1,n} = -\text{Bi} Q_n^{(1)} - \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(1)} \left( \mathbb{G}_j^{(1)}(1) + \text{Bi} G_j^{(1)}(1) \right) + B_{n-j}^{(1)} \left( \mathbb{W}_j^{(1)}(1) + \text{Bi} W_j^{(1)}(1) \right) \right];$$

$$c_{2,n} = \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(2)} G_j^{(2)}(\gamma_1) + B_{n-j}^{(2)} W_j^{(2)}(\gamma_1) - A_{n-j}^{(1)} G_j^{(1)}(\gamma_1) - B_{n-j}^{(1)} W_j^{(1)}(\gamma_1) \right];$$

$$c_{3,n} = \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(2)} \mathbb{G}_j^{(2)}(\gamma_1) + B_{n-j}^{(2)} \mathbb{W}_j^{(2)}(\gamma_1) - \lambda_T^{(1)} A_{n-j}^{(1)} \mathbb{G}_j^{(1)}(\gamma_1) - \lambda_T^{(1)} B_{n-j}^{(1)} \mathbb{W}_j^{(1)}(\gamma_1) \right];$$

$$c_{4,n} = - \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(2)} \mathbb{G}_j^{(2)}(0) + B_{n-j}^{(2)} \mathbb{W}_j^{(2)}(0) \right].$$

Тут для зручності запису введено позначення  $G_j^{(i)}(\xi; \gamma) \equiv G_j^{(i)}(\gamma)$ ,  $W_j^{(i)}(\xi; \gamma) \equiv W_j^{(i)}(\gamma)$ ,  $\mathbb{G}_j^{(i)}(\gamma) \equiv d_\gamma G_j^{(i)}(\xi, \gamma)$ ,  $\mathbb{W}_j^{(i)}(\gamma) \equiv d_\gamma W_j^{(i)}(\xi, \gamma)$ .

С використанням алгоритму Гауса, системи (3.123) можна звести до трикутного вигляду

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2}^* & b_{2,3}^* & b_{2,4}^* \\ 0 & 0 & b_{3,3}^* & b_{3,4}^* \\ 0 & 0 & 0 & b_{4,4}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ B_n^{(1)} \\ A_n^{(2)} \\ B_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,n} \\ c_{2,n}^* \\ c_{3,n}^* \\ c_{4,n}^* \end{pmatrix}, \quad (3.124)$$

де нові коефіцієнти  $b_{i,j}^*$  пов'язані із коефіцієнтами  $b_{i,j}$  співвідношеннями

$$\begin{aligned} b_{2,2}^* &= b_{1,2}b_{2,1} - b_{1,1}b_{2,2}; \quad b_{2,3}^* = -b_{1,1}b_{2,3}; \quad b_{2,4}^* = -b_{1,1}b_{2,4}, \quad b_{4,4}^* = b_{3,4}b_{4,3} - b_{3,3}b_{4,4}; \\ b_{3,3}^* &= b_{2,3}^*(b_{1,1}b_{3,2} - b_{1,2}b_{3,1}) + b_{3,3}b_{1,1}b_{2,2}^*; \quad b_{3,3}^* = b_{2,4}^*(b_{1,1}b_{3,2} - b_{1,2}b_{3,1}) + b_{3,4}b_{1,1}b_{2,2}^*, \end{aligned}$$

а новий стовбець вільних членів рівний

$$\begin{aligned} c_{2,n}^* &= b_{2,1}c_{1,n} - b_{1,1}c_{2,n}; \quad c_{3,n}^* = (b_{2,1}b_{3,1} - b_{3,2}b_{1,1})c_{2,n}^* - b_{2,2}^*(b_{3,1}c_{1,n} - b_{1,1}c_{3,n}); \\ c_{4,n}^* &= b_{4,3}c_{3,n}^* - b_{3,3}^*c_{4,n}. \end{aligned}$$

Остаточно із систем (3.124) невідомі  $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, A_n^{(2)}, B_n^{(2)}$  визначаються рекурентними співвідношеннями

$$\begin{aligned} B_n^{(2)} &= \frac{c_{4,n}^*}{b_{4,4}^*}, \quad A_n^{(2)} = \frac{1}{b_{3,3}^*} (c_{3,n}^* - B_n^{(2)}b_{3,4}^*), \\ B_n^{(1)} &= \frac{1}{b_{2,2}^*} (c_{2,n}^* - A_n^{(2)}b_{2,3}^* - B_n^{(2)}b_{2,4}^*), \quad A_n^{(1)} = \frac{1}{b_{1,1}} (c_{1,n} - B_n^{(1)}b_{1,2}). \end{aligned} \quad (3.125)$$

Формули (3.125) дають змогу формально завершити побудову розв'язку вихідної задачі теплопровідності. При цьому температурне поле розраховується за формулою

$$T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \cos(\xi\alpha) d\xi \right] L_n(\lambda\tau), \quad i = 1, 2. \quad (3.126)$$

Перед тим, як сформулювати умови навантаження на бічній поверхні плити на наш погляд слід зробити певні пояснення. Як відомо, двовимірні задачі теорії пружності в обмежених та напівобмежених областях у випадку вільних від напружень границь мають певну специфіку, пов'язану із побудовою їх розв'язку традиційними методами математичної фізики. При цьому існує певний набір крайових умов на одній (для напівобмеженого) чи двох протилежних (для обмеженого тіла)

поверхнях, які дають змогу без додаткових, часто громіздких та не цілком обґрунтованих математичних перетворень ефективно застосовувати класичні методи та методики, аналогічні до тих, що використовуються, наприклад, при розгляді задач теплопровідності в таких областях. У випадку квазістатичної задачі термопружності цей набір крайових умов є досить обмеженим. Розглянемо, наприклад, рівняння, якому у випадку квазістатичної задачі термопружності повинно задовольняти об'ємне розширення  $\theta^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \text{div } \mathbf{\bar{U}}^{(i)}, i = 1, 2$ :

$$\Delta \theta^{(i)} = \alpha_T^{(i)} (3 - 4\kappa_i^{-2}) \Delta T^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (3.127)$$

З рівнянь (23) видно, що для отримання їх "безпроблемного" розв'язку об'ємне розширення  $\theta^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$  та температура  $T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$  повинні мати однотипне подання інтегралом Фур'є за змінною  $\alpha$ . Для температури  $T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$  таке подання визначається крайовими умовами задачі теплопровідності на поверхні  $\alpha = 0$  і у нашому випадку має вигляд

$$T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{T}^{(i)}(\xi, \gamma, \tau) \cos(\xi\alpha) d\xi, \quad \bar{T}^{(i)}(\xi, \gamma, \tau) = \int_0^\infty T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) \cos(\xi\alpha) d\alpha.$$

Для того, щоб таким же чином здійснити подання для об'ємного розширення повинна виконуватись умова

$$\partial_\alpha \theta^{(i)} \Big|_{\alpha=0} = 0. \quad (3.128)$$

Аналогічно з іншого рівняння термопружної рівноваги

$$\Delta w^{(i)} = (1 - \kappa_i^2) \partial_\gamma \theta^{(i)} + \alpha_T^{(i)} (3\kappa_i^2 - 4) \partial_\gamma T^{(i)}, \quad i = 1, 2 \quad (3.129)$$

можна одержати

$$\partial_\alpha w^{(i)} \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad (3.130)$$

де  $w^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$  - компонента вектора переміщення в напрямку осі  $\gamma$ .

Нескладно показати, що умови (3.128) і (3.130) на поверхні  $\alpha=0$  еквівалентні умовам шарнірного закріплення:

$$u^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = 0, \sigma_{\alpha\gamma}^{(i)} = 0, \alpha = 0, i = 1, 2, \quad (3.131)$$

де  $u^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$  - компонента вектора переміщення в напрямку осі  $\alpha$ .

Крайові умови на поверхні  $\gamma=1$  можуть бути довільного типу. Без обмеження загальності покладемо, що ця поверхня вільна від навантаження:

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}(\alpha, 1, \tau) = 0, \sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}(\alpha, 1, \tau) = 0. \quad (3.132)$$

Очевидно, що для фізичної симетрії задачі відносно осі  $\gamma=0$  такі ж умови повинні виконуватись і на поверхні  $\gamma=-1$ , а вимога симетрії приводить до умов на поверхні  $\alpha=0$

$$w^{(2)}(\alpha, 0, \tau) = 0, \sigma_{\alpha\gamma}^{(2)}(\alpha, 0, \tau) = 0. \quad (3.133)$$

Крім того, вважатимемо, що на лінії поділу матеріалів покриття та основи виконуються умови ідеального термомеханічного контакту

$$w^{(1)}(\alpha, \gamma_1, \tau) = w^{(2)}(\alpha, \gamma_1, \tau), u^{(1)}(\alpha, \gamma_1, \tau) = u^{(2)}(\alpha, \gamma_1, \tau); \quad (3.134)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}(\alpha, \gamma_1, \tau) = \sigma_{\gamma\gamma}^{(2)}(\alpha, \gamma_1, \tau), \sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}(\alpha, \gamma_1, \tau) = \sigma_{\alpha\gamma}^{(2)}(\alpha, \gamma_1, \tau). \quad (3.135)$$

Рівняння (3.127), (3.129) та умови (3.132)-(3.135) після застосування до них інтегральних перетворень Лагерра та Фур'є набудуть вигляду

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{\theta}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{\theta}_n^{(i)} = \alpha_T^{(i)} (3 - 4\kappa_i^{-2}) \left[ d_{\gamma\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{T}_n^{(i)} + \bar{q}_n^{(i)} \right], \quad i = 1, 2; \quad (3.136)$$

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{w}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{w}_n^{(i)} = (1 - \kappa_i^2) d_\gamma \bar{\theta}_n^{(i)} + \alpha_T^{(i)} (3\kappa_i^2 - 4) d_\gamma \bar{T}_n^{(i)}, \quad i = 1, 2; \quad (3.137)$$

$$\bar{\sigma}_{\gamma\gamma, n}^{(1)}(\xi, 1) = 0; \bar{\sigma}_{\alpha\gamma, n}^{(1)}(\xi, 1) = 0; \bar{w}_n^{(2)}(\xi, 0) = 0; \bar{\sigma}_{\alpha\gamma, n}^{(2)}(\xi, 0) = 0; \quad (3.138)$$

$$\bar{w}_n^{(1)}(\xi, \gamma_1) = \bar{w}_n^{(2)}(\xi, \gamma_1); \quad \bar{u}_n^{(1)}(\xi, \gamma_1) = \bar{u}_n^{(2)}(\xi, \gamma_1); \quad (3.139)$$

$$\bar{\sigma}_{\gamma\gamma,n}^{(1)}(\xi, \gamma_1) = \bar{\sigma}_{\gamma\gamma,n}^{(2)}(\xi, \gamma_1); \quad \bar{\sigma}_{\alpha\gamma,n}^{(1)}(\xi, \gamma_1) = \bar{\sigma}_{\alpha\gamma,n}^{(2)}(\xi, \gamma_1). \quad (3.140)$$

Рівняння (3.136), (3.137) містять дискретну змінну  $n$  як параметр, а тому їх розв'язок можна записати у вигляді

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = C_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) + D_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma) + \alpha_T^{(i)}(3 - 4\kappa_i^{-2}) \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma). \quad (3.141)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = & F_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) + H_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma) + \\ & + \frac{\gamma}{2}(1 - \kappa_i^2) \left[ C_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) + D_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma) \right] + \frac{\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} (3 - 4\kappa_i^{-2}) d_\gamma \mathcal{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma), \end{aligned} \quad (3.142)$$

де  $\mathcal{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - \bar{T}_{n-1}^{(i)}(\xi, \gamma)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $\mathcal{T}_0^{(i)}(\xi, \gamma) = \bar{T}_0^{(i)}(\xi, \gamma)$ .

Набір сталих  $C_n^{(i)}, D_n^{(i)}, F_n^{(i)}, H_n^{(i)}$  визначається із крайових умов та умов спряження (3.138)-(3.140). Безпосередня підстановка розв'язків (3.141), (3.142) в ці умови приводить до систем алгебричних рівнянь

$$\left[ d_{k,l} \right] \left\{ C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, F_n^{(1)}, H_n^{(1)}, C_n^{(2)}, D_n^{(2)}, F_n^{(2)}, H_n^{(2)} \right\}^T = \left\{ f_{n,k} \right\} \quad (3.143)$$

де ненульові коефіцієнти матриці  $\left[ d_{k,l} \right]$  містять комбінації експоненціальних функцій та фізико-механічних характеристик покриття та основи, а стовпець вільних членів - знайдені в попередньому підрозділі трансформанти температур та теплових потоків.

Системи (3.143) стандартною процедурою Гаусса зводяться до трикутного виду, звідки визначаються всі невідомі  $C_n^{(i)}, D_n^{(i)}, F_n^{(i)}, H_n^{(i)}$ .

Остаточний розв'язок задачі термопружності подається у вигляді

$$\theta^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \cos(\xi\alpha) d\xi \right] L_n(\lambda\tau); \quad (3.144)$$

$$w^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \cos(\xi \alpha) d\xi \right] L_n(\lambda \tau). \quad (3.145)$$

Компонента вектора пружного переміщення  $u^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$  визначається співвідношенням

$$u^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \xi^{-1} \left[ \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - d_\gamma \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \right] \sin(\xi \alpha) d\xi \right] L_n(\lambda \tau), \quad (3.146)$$

а ненульові компоненти тензора напружень – за співвідношеннями Дюамеля-Неймана

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) &= \frac{2\lambda\mu_i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ \left( \kappa_i^2 - 2 \right) \bar{\theta}_n^{(i)} + 2d_\gamma \bar{w}_n^{(i)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \alpha_T^{(i)} \left( 3\kappa_i^2 - 4 \right) \bar{T}_n^{(i)} \right] \cos(\xi \alpha) d\xi \right\} L_n(\lambda \tau) \\ \sigma_{\alpha\gamma}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) &= \frac{2\lambda\mu_i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \xi^{-1} \left[ \kappa_i^2 d_\gamma \bar{\theta}_n^{(i)} - 2\xi^2 \bar{w}_n^{(i)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \alpha_T^{(i)} \left( 3\kappa_i^2 - 4 \right) d_\gamma \bar{T}_n^{(i)} \right] \sin(\xi \alpha) d\xi \right\} L_n(\lambda \tau) \end{aligned}$$

За формулою (3.126) було розраховано температурне поле в півсмузі з покриттям у випадку, коли інтенсивність потоку тепла на її бічній поверхні задається співвідношенням  $\dot{q}(\tau) = q^* \cdot (1 - \exp(-\tau_0 \tau))$ , де  $q^*$  – деяка розмірна величина, а  $\tau_0$  визначає час виходу теплового навантаження на стаціонарне значення. Тоді,

$$\bar{q}_n(\xi) = q^* \left[ \frac{1}{\lambda} \delta_{0n} - \frac{1}{\lambda + \tau_0} \left( \frac{\tau_0}{\lambda + \tau_0} \right)^n \right],$$

де  $\delta_{0n}$  – символ Кронекера.

Для проведення числових розрахунків було обрано металокерамічний композит, основа якого виготовлена із алюмінієвого стопу, а покриття із кераміки, фізико-механічні властивості яких наведено в таблиці 3.1.

На рис. 3.30 подано результати розрахунку часової залежності знезрозміреної температури  $T^*(\alpha, \gamma, \tau) = T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) / q^*$  при  $\tau_0 = 4,0$  на певній віддалі від поверхні нагріву ( $\alpha=1$ ) в центрі основи ( $\gamma=0$ ) для різних значень відносної товщини покриття та інтенсивності охолодження. Як і слід було очікувати, збільшення відносної товщини термоізолюючого покриття призводить до зменшення втрат тепла навіть і при інтенсивному теплообміні з поверхонь композитного тіла та суттєвого зростання часу виходу температури на стаціонарне значення. Як свідчать результати розрахунку температури на лінії  $\alpha=1$  при  $\gamma_1=0,1$  (рис. 3. 31) така тенденція зберігається і в інших областях композитного тіла. Причому з часом різниця між температурою центральних областей та областей розташованих поблизу покриття збільшується і суттєвий вплив на цю різницю має інтенсивність охолодження. Найбільший перепад температури досягається в області покриття

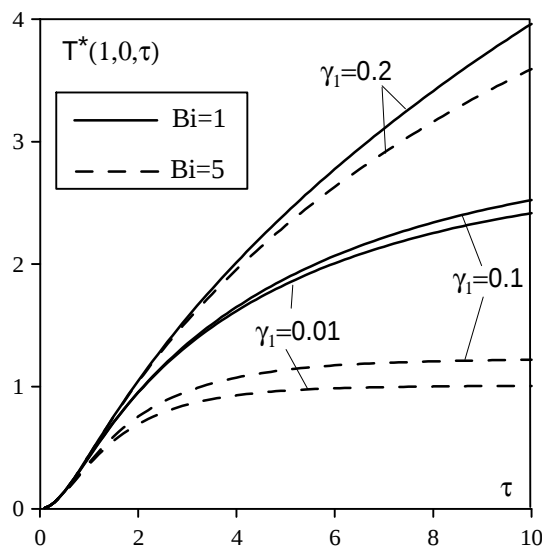


Рис. 3.30. Часова трансформація температурного поля при  $\alpha = 1, \gamma = 0$

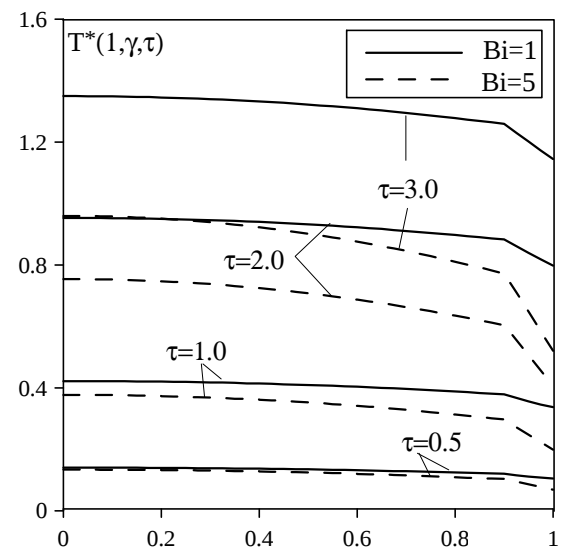


Рис. 3.31. Розподіл температури по глибині неоднорідного тіла

За знайденим температурним полем було розраховано напружений стан у півсмузі з покриттям при цьому напруження були знерозмірені з використанням

коефіцієнта Ляме півсмуги:  $\sigma_{kl}(\alpha, \gamma, \tau) = \sigma_{kl}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) / \mu_2$ . На рис. 3.32 подано результати розрахунку дотичних напружень вздовж поверхні  $\alpha=0.5$  в різні моменти часу та при різній відносній товщині покриття. Як свідчить наведене, вказані напруження набувають максимального за модулем значення в основі ближче до поверхні поділу матеріалів. Зі зменшенням відносної товщини покриття їх рівень в цих областях зменшується, а в областях, що знаходяться безпосередньо біля покриття зростає. Впродовж всього перехідного періоду дотичні напруження змінюють знак, причому розмір та розташування області в якій відбувається зміна знаку з часом майже не змінюється.

На відміну від дотичних напружень, безрозмірні нормальні напруження  $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \gamma, \tau)$  в цій області є скрізь розтягуючими (рис. 3.33), а максимуму набувають приблизно в тих же областях, що і дотичні напруження. При цьому зміна відносної товщини покриття впродовж всього перехідного процесу має значно менший вплив на їх рівень, порівняно із дотичними напруженнями.

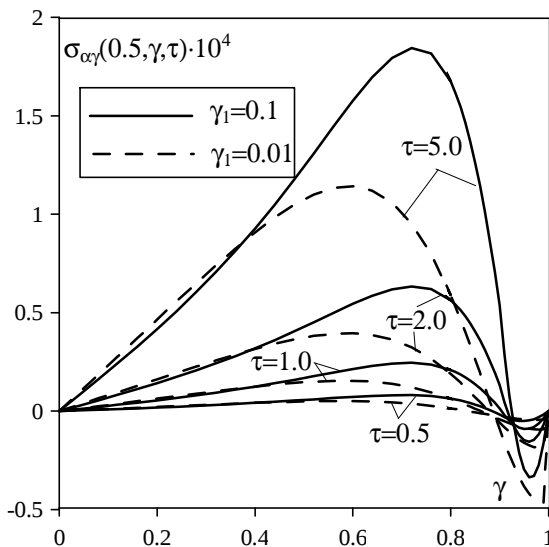


Рис. 3.32. Розподіл дотичних напружень по глибині неоднорідного тіла

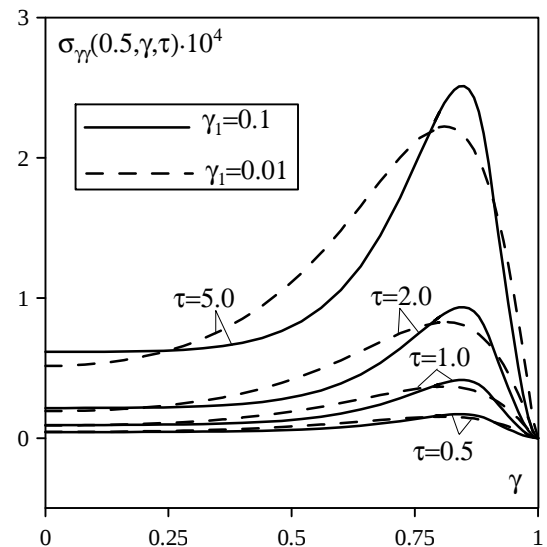


Рис. 3.33. Розподіл нормальних напружень по глибині неоднорідного тіла

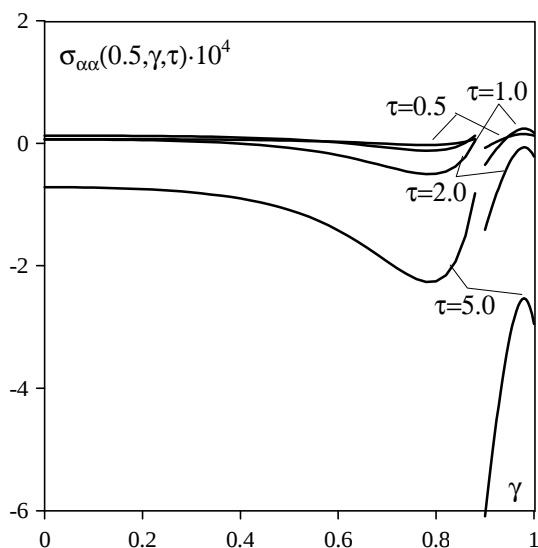


Рис. 3.34. Розподіл напружень  $\sigma_{\alpha\alpha}$  по глибині неоднорідного тіла

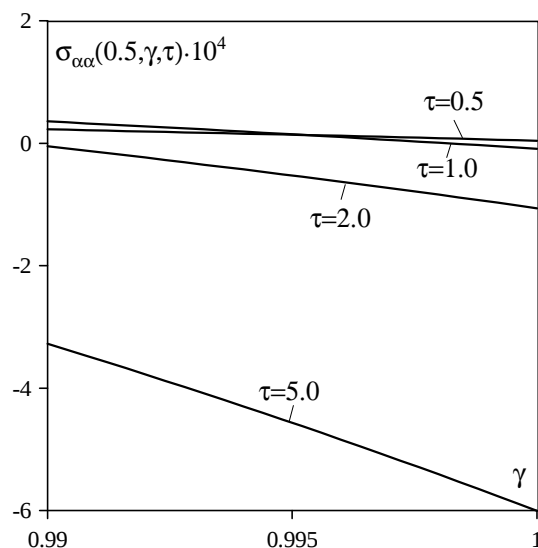


Рис. 3.35. Розподіл напружень  $\sigma_{\alpha\alpha}$  в покритті

На тій же лінії  $\alpha = 0,5$  були розраховані знерозмірені напруження  $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \gamma, \tau)$  при  $\gamma_1 = 0.1$  в різні моменти часу (рис. 3.34). Як видно з наведеного, ці напруження за абсолютним значенням є максимальними в композиті і на лінії поділу матеріалів основи та покриття отримують розрив першого роду, величина якого з часом збільшується. При цьому максимального за модулем значення вказані напруження досягають в покритті і є стискуючими. На рис. 3.35 показано розподіл напружень  $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \gamma, \tau)$  по товщині покриття у випадку  $\gamma_1 = 0.01$ . Як видно, з часом ці напруження зростають за абсолютним значенням та стають стискуючими і хоча характер їх розподілу за товщиною покриття кардинально відрізняється від результатів отриманих при  $\gamma_1 = 0.1$  абсолютні величини в обох випадках залишаються співрозмірними.

### Висновки до розділу 3

- одержано точні замкнуті розв'язки квазістатичних двовимірних задач термопружності для кусково-однорідних тіл із плоскопаралельними границями поділу для довільної кількості складових, їх довільної відносної товщини та контрастності фізико-механічних властивостей, що дає змогу використовувати одержані розв'язки при аналізі мезо- та наноструктур;

- виявлено, що зміною взаємного розташування та кількості ізолюючих (кераміка) та зміцнюючих (алюмінієвий стоп) шарів можна досягнути значного зменшення внутрішніх температурних напружень за незмінності теплоізолюючих властивостей композитного тіла;
- встановлено, що урахування відносної товщини покриття слід обов'язково пов'язувати із його відносними термомеханічними характеристиками (контрастністю), в окремих випадках значні зміни в остаточних результатах спостерігаються в діапазоні відносних товщин покриття  $10^{-4}$ - $10^{-5}$ , що вимагає певного перегляду класичних уявлень механіки композитів;
- з'ясовано вплив товщини зовнішнього ізолюючого покриття на часову трансформацію внутрішніх температурних напружень в півбезмежній неоднорідній плиті при її торцьовому нагріві та виявлено, що збільшення товщини покриття призводить не лише до покращення теплоізолюючих властивостей композитного тіла, а й до підвищення рівня напружень поблизу поверхні поділу матеріалів, що може викликати втрату адгезії, відшарування та руйнування теплоізолюючих шарів

## РОЗДІЛ 4.

ОСЕСИМЕТРИЧНА КВАЗІСТАТИЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ  
ДЛЯ РАДІАЛЬНО-ШАРУВАТОГО ЦИЛІНДРИЧНОГО ТІЛА4.1 Нестационарна осесимметрична задача теплопроводности для радиально-  
шаруватого циліндричного тіла.

Розглянемо неоднорідне тіло, що складається з  $M$  вкладених циліндрів різної товщини і з різними фізико-механічними властивостями. Циліндр з індексом «1» є внутрішнім циліндричним шаром композита, а з індексом «М» - зовнішнім. Вважається, що на зовнішніх поверхнях внутрішнього та зовнішнього циліндрів виконуються умови теплообміну із зовнішнім середовищем. Джерелом перехідного термонапруженого стану в тілі є локальна (за осовою координатою) зміна температур цих середовищ (рис. 4.1).

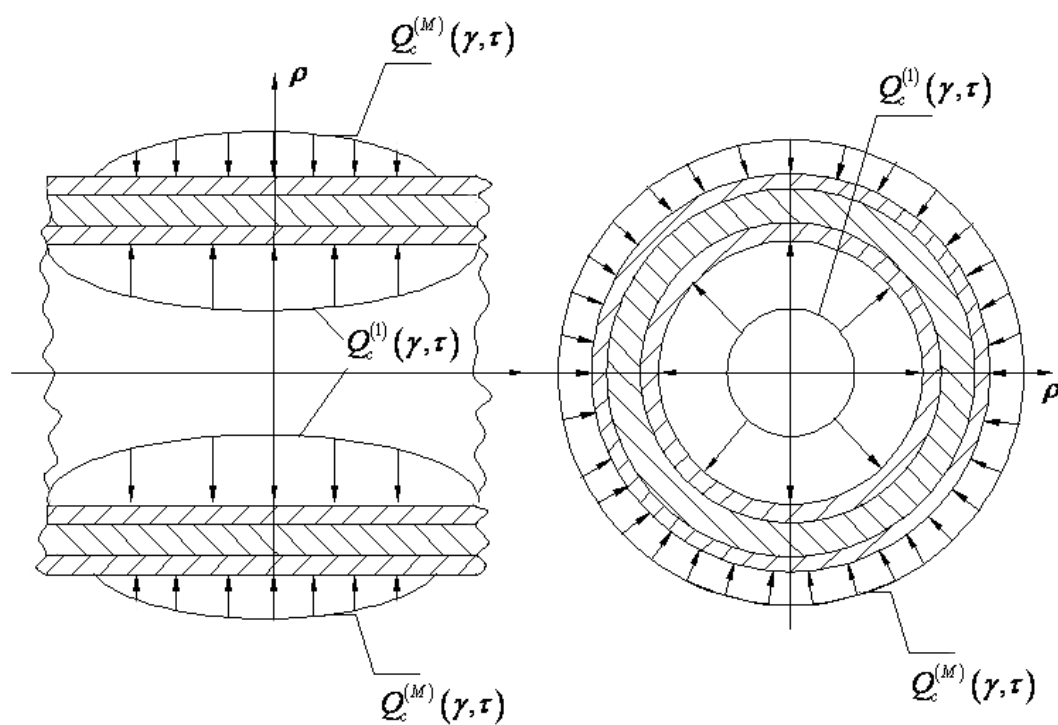


Рис. 4.1. Схема задачі

Нестационарне температурне поле в тілі визначимо розв'язком початково-крайової задачі

$$\frac{1}{\rho} \partial_{\rho} \left( \rho \partial_{\rho} T^{(i)} \right) + \partial_{\gamma}^2 T^{(i)} = \mathfrak{a}_i \frac{\partial T^{(i)}}{\partial \tau}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (4.1)$$

$$k_1^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial \rho} + k_2^{(1)} T^{(1)} = Q_c^{(1)}(\gamma, \tau), \quad \rho = \rho_0; \quad (4.2)$$

$$k_1^{(M)} \frac{\partial T^{(M)}}{\partial \rho} + k_2^{(M)} T^{(M)} = Q_c^{(M)}(\gamma, \tau), \quad \rho = 1; \quad (4.3)$$

$$T^{(i)}(\rho_i, \gamma, \tau) = T^{(i+1)}(\rho_i, \gamma, \tau); \quad (4.4)$$

$$\lambda_T^{(i)} \partial_{\rho} T^{(i)}(\rho_i, \gamma, \tau) = \lambda_T^{(i+1)} \partial_{\rho} T^{(i+1)}(\rho_i, \gamma, \tau), \quad (4.5)$$

$$T^{(i)}(\rho, \gamma, 0) = 0, \quad (4.6)$$

де  $T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$  - температурне поле  $i$ -го циліндра,  $\rho = r / R_M$ ,  $\gamma = z / R_M$  - безрозмірні змінні циліндричної системи координат,  $\tau = at / R_M^2$  - критерій Фур'є,  $Q_c^{(1)}(\gamma, \tau)$ ,  $Q_c^{(M)}(\gamma, \tau)$  - температура середовищ, що оточують зовнішню та внутрішню поверхні композита,  $\mathfrak{a}_i = a / a_i$ ,  $\lambda_T^i = \lambda_T^{i+1} / \lambda_T^i$ ,  $\lambda_T^i$ ,  $a_i$  - відповідно коефіцієнти теплопровідності і температуропроводності  $i$ -го шару,  $a$  - коефіцієнт температуропроводності деякого матеріалу (вибирається залежно від завдань числового аналізу),  $\rho_i = R_i / R_M$ ,  $R_0$ ,  $R_M$  - радіуси внутрішньої і зовнішньої поверхонь композита,  $R_i$ ,  $(i = \overline{1, M-1})$  - радіуси поверхонь спряження між циліндрами. Зазначимо, що змінюючи значення  $k_j^{(i)}$ , що входять в умови (4.2), (4.3), можна легко перейти до умов першого чи другого роду.

Без обмеження загальності будемо вважати, що температури граничних поверхонь є симетричними відносно площини  $\gamma = 0$ . Застосувавши до задачі (4.1)-(4.5) інтегральне перетворення Лагерра за змінною  $\tau$  та  $\cos$ -перетворення Фур'є за змінною  $\gamma$  та врахувавши нульову початкову умову (4.6) одержимо трикутну послідовність крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{1}{\rho} d_{\rho} \left( \rho d_{\rho} \bar{T}_n^{(i)} \right) - \left( \xi^2 + \beta_i \right) \bar{T}_n^{(i)} = \beta_i \sum_{m=0}^{n-1} \bar{T}_m^{(i)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad i = \overline{1, M} \quad (4.7)$$

з відповідно трансформованими крайовими умовами та умовами спряження

$$k_1^{(1)} \frac{\partial \bar{T}_n^{(1)}(\rho_0)}{\partial \rho} + k_2^{(1)} \bar{T}_n^{(1)}(\rho_0) = \bar{Q}_{c,n}^{(1)}; \quad (4.8)$$

$$k_1^{(M)} \frac{\partial \bar{T}_n^{(M)}(1)}{\partial \rho} + k_2^{(M)} \bar{T}_n^{(M)}(1) = \bar{Q}_{c,n}^{(M)}; \quad (4.9)$$

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \rho_i) = \bar{T}_n^{(i+1)}(\xi, \rho_i); \quad (4.10)$$

$$\lambda_T^{(i)} d_{\rho} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \rho_i) = \lambda_T^{(i+1)} d_{\rho} \bar{T}_n^{(i+1)}(\xi, \rho_i). \quad (4.11)$$

$$T_{\text{УТ}} \bar{T}_n^{(i)}(\rho, \xi) = \int_0^{\infty} \cos(\xi \gamma) \left[ \int_0^{\infty} \exp(-\lambda \tau) T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) L_n(\lambda \tau) d\tau \right] d\gamma - \text{зображення за}$$

Лагерром і Фур'є,  $L_n(\cdot)$  - поліноми Лагерра,  $\lambda$  - масштабний множник,  $\beta_i = \lambda \omega_i$ .

Загальний розв'язок послідовності (4.7), відповідно до результатів другого розділу, можна записати у вигляді алгебричної згортки:

$$\bar{T}_n^{(i)} = \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \rho) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \rho) \right], \quad (4.12)$$

де  $\omega_i = \sqrt{\xi^2 + \beta_i}$ ,  $A_{n-j}^{(i)}(\xi)$ ,  $B_{n-j}^{(i)}(\xi)$  - функції, що визначаються з трансформованих умов (4.8)-(4.11). Відповідно  $G_j(\cdot)$  і  $W_j(\cdot)$  - лінійно-незалежні послідовності фундаментальних розв'язків систем (4.7), які можна подати у такому вигляді:

$$G_j^{(i)}(\xi, \rho) = \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} \rho^k I_k(\omega_i \rho), \quad (4.13)$$

$$W_j(\xi, \rho) = \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} (-\rho^k) K_k(\omega_i \rho), \quad (4.14)$$

де  $I_p(\cdot), K_p(\cdot)$  - модифіковані функції Бесселя.

Для знаходження коефіцієнтів  $a_{j,k}^{(i)}$  підставимо вирази  $G_j^{(i)}(\xi, \rho)$ , які мають подання (4.13) в (4.7). Оскільки

$$\frac{1}{r} d_r (r d_r G_j) = \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} w \left[ 2k r^{k-1} I_{k-1}(wr) + w r^k I_k(wr) \right]$$

то після підстановки цього виразу в рівняння

$$\frac{1}{\rho} d_\rho (\rho d_\rho G_j) - \omega^2 G_j = \beta_i \sum_{m=0}^{j-1} G_m, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad i=\overline{1,2}$$

одержимо:

$$\sum_{k=1}^j a_{j,k} w 2k r^{k-1} I_{k-1}(wr) = l \frac{1}{a_i} \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{k=0}^m a_{j,k} r^k I_k(wr)$$

Прирівнюючи у цьому рівнянні коефіцієнти при однакових  $\rho^k I_k(\omega\rho)$  ( $k=1,2,\dots$ ), прийдемо до рекурентних співвідношень на коефіцієнти  $a_{j,k}$ :

$$a_{j,k+1}^{(i)} = \frac{\lambda}{2a_i \omega_i (k+1)} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^{(i)}. \quad (4.15)$$

Аналогічні співвідношення одержуються і при підстановці подання (4.14).

Для визначення функцій  $A_{n-j}^{(i)}(\xi)$ ,  $B_{n-j}^{(i)}(\xi)$  підставимо розв'язок (4.12) в умови (4.8)-(4.11), в результаті прийдемо до послідовності алгебричних рівнянь:

$$\sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(1)}(\xi) \left( k_1^{(1)} G_j^{(1)}(\xi, \rho_0) + k_2^{(1)} G_j^{(1)}(\xi, \rho_0) \right) + \right. \\ \left. + B_{n-j}^{(1)}(\xi) \left( k_1^{(1)} W_j^{(1)}(\xi, \rho_0) + k_2^{(1)} W_j^{(1)}(\xi, \rho_0) \right) \right] = \overline{Q}_{c,n}^{(1)}; \quad (4.16)$$

$$\sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j,m}^{(M)}(\xi) \left( k_1^{(M)} G_{j,m}'^{(M)}(\xi, 1) + k_2^{(M)} G_{j,m}^{(M)}(\xi, 1) \right) + \right. \\ \left. + B_{n-j,m}^{(M)}(\xi) \left( k_1^{(M)} W_{j,m}'^{(M)}(\xi, 1) + k_2^{(M)} W_{j,m}^{(M)}(\xi, 1) \right) \right] = \bar{Q}_{c,n}^{(M)}; \quad (4.17)$$

$$\sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \rho_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \rho_i) \right] = \\ = \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i+1)}(\xi) G_j^{(i+1)}(\xi, \rho_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) W_j^{(i+1)}(\xi, \rho_i) \right]; \quad (4.18)$$

$$\mathbb{X}_T^{(i)} \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i)}(\xi) d_\rho G_j^{(i)}(\xi, \rho_i) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) d_\rho W_j^{(i)}(\xi, \rho_i) \right] = \\ = \mathbb{X}_T^{(i+1)} \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i+1)}(\xi) d_\rho G_j^{(i+1)}(\xi, \rho_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) d_\rho W_j^{(i+1)}(\xi, \rho_i) \right]. \quad (4.19)$$

В рівняннях (4.16)-(4.19) в лівій частині залишимо доданки, що містять невідомі  $A_n^{(i)}$ ,  $B_n^{(i)}$ , а решту перенесемо в праву частину. В результаті одержимо:

$$A_n^{(1)} \left( k_1^{(1)} d_\rho G_0^{(1)}(\rho_0) + k_2^{(1)} G_0^{(1)}(\rho_0) \right) + \\ + B_n^{(1)} \left( k_1^{(1)} d_\rho W_0^{(1)}(\rho_0) + k_2^{(1)} W_0^{(1)}(\rho_0) \right) = \\ = \bar{Q}_{c,n}^{(1)} - \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(1)} \left( k_1^{(1)} d_\rho G_j^{(1)}(\rho_0) + k_2^{(1)} d_\rho G_j^{(1)}(\rho_0) \right) + \right. \\ \left. + B_{n-j}^{(1)} \left( k_1^{(1)} W_j^{(1)}(\rho_0) + k_2^{(1)} W_j^{(1)}(\rho_0) \right) \right]; \quad (4.20)$$

$$A_n^{(M)} \left( k_1^{(M)} d_\rho G_0^{(M)}(1) + k_2^{(M)} G_0^{(M)}(1) \right) + B_n^{(M)} \left( k_1^{(M)} d_\rho W_0^{(M)}(1) + k_2^{(M)} W_0^{(M)}(1) \right) = \\ = - \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(M)} \left( k_1^{(M)} d_\rho G_j^{(M)}(1) + k_2^{(M)} G_j^{(M)}(1) \right) + \right. \\ \left. + B_{n-j}^{(M)} \left( k_1^{(M)} d_\rho W_j^{(M)}(1) + k_2^{(M)} W_j^{(M)}(1) \right) \right]; \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}
& A_n^{(i)} G_0^{(i)}(\rho_i) + B_n^{(i)} W_0^{(i)}(\rho_i) - A_n^{(i+1)} G_0^{(i+1)}(\rho_i) - B_n^{(i+1)} W_0^{(i+1)}(\rho_i) = \\
& = \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(i+1)} G_j^{(i+1)}(\rho_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) W_j^{(i+1)}(\rho_i) \right] - \\
& - \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(i)} G_j^{(i)}(\rho_i) + B_{n-j}^{(i)} W_j^{(i)}(\rho_i) \right];
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda_T^{(i)} \left( A_n^{(i)} d_\rho G_0^{(i)}(\rho_i) + B_n^{(i)} d_\rho W_0^{(i)}(\rho_i) \right) - \\
& - \lambda_T^{(i+1)} \left( A_n^{(i+1)} d_\rho G_0^{(i+1)}(\rho_i) - B_n^{(i+1)} d_\rho W_0^{(i+1)}(\rho_i) \right) = \\
& = \lambda_T^{(i+1)} \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(i+1)} d_\rho G_j^{(i+1)}(\rho_i) + B_{n-j}^{(i+1)} d_\rho W_j^{(i+1)}(\rho_i) \right] - \\
& - \lambda_T^{(1)} \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(i)} d_\rho G_j^{(i)}(\rho_i) + B_{n-j}^{(i)} d_\rho W_j^{(i)}(\rho_i) \right].
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Якщо врахувати значення для  $G_0^{(i)}(\xi, \rho)$  і  $W_0^{(i)}(\xi, \rho)$  відповідно до подань (4.13)-(4.14), та покласти  $a_{0,0} = 1$ ,  $a_{j,0} = 0$ ,  $j = 1, 2, \mathbf{K}$ , то одержимо трикутні послідовності лінійних рівнянь відносно невідомих  $A_n^{(i)}$  і  $B_n^{(i)}$ , які в матричному записі матимуть вигляд

$$(b_{m,k}) \left\{ A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, A_n^{(2)}, B_n^{(2)}, \dots, A_n^{(M)}, B_n^{(M)} \right\}^T = \{ c_{n,k} \}^T, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{4.24}$$

Зауважимо, що коефіцієнти матриці  $(b_{m,k})$  не залежать від порядкового номера  $n$ , а її структура дозволяє досить просто привести її до трикутного виду для довільного  $M$  і таким чином одержати аналітичний розв'язок систем (4.12). Матриця в (4.24) має вигляд:

$$\left( \begin{array}{ccccccccc}
 b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & & & & & & & \mathbf{L} & 0 \\
 b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & 0 & & & & & \mathbf{L} & 0 \\
 b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & 0 & & & & & \mathbf{L} & 0 \\
 & & & & & & & & & \mathbf{L} & \\
 0 & \mathbf{L} & 0 & b_{2i, 2i-1} & b_{2i, 2i} & b_{2i, 2i+1} & b_{2i, 2i+2} & 0 & & \mathbf{L} & 0 \\
 0 & \mathbf{L} & 0 & b_{2i+1, 2i} & b_{2i+1, 2i+1} & b_{2i+1, 2i+2} & b_{2i+1, 2i+2} & 0 & & \mathbf{L} & 0 \\
 & & & & & & & & & \mathbf{L} & \\
 0 & & & \mathbf{L} & & 0 & b_{2M-2, 2M-3} & b_{2M-2, 2M-2} & b_{2M-2, 2M-1} & b_{2M-2, 2M} & \\
 0 & & & \mathbf{L} & & 0 & b_{2M-1, 2M-3} & b_{2M-1, 2M-2} & b_{2M-1, 2M-1} & b_{2M-1, 2M} & \\
 0 & & & & \mathbf{L} & & & 0 & b_{2M, 2M-1} & b_{2M, 2M} & 
 \end{array} \right) \quad (4.25)$$

а її ненульові коефіцієнти обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}
 b_{1,1} &= k_1^{(1)} \omega_1 I_1(\omega_1 \rho_0) + k_2^{(1)} I_0(\omega_1 \rho_0); \quad b_{1,2} = -k_1^{(1)} \omega_1 K_1(\omega_1 \rho_0) + k_2^{(1)} K_0(\omega_1 \rho_0); \\
 b_{2i, 2i-1} &= \lambda_T^{(i)} \omega_i I_1(\omega_i \rho_i); \quad b_{2i, 2i} = -\lambda_T^{(i)} \omega_i K_1(\omega_i \rho_i); \\
 b_{2i, 2i+1} &= -\lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} I_1(\omega_{i+1} \rho_i); \quad b_{2i, 2i+2} = \lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} K_1(\omega_{i+1} \rho_i); \\
 b_{2i+1, 2i-1} &= I_0(\omega_i \rho_i); \quad b_{2i+1, 2i} = K_0(\omega_i \rho_i); \quad b_{2i+1, 2i+1} = -I_0(\omega_{i+1} \rho_i); \\
 b_{2i+1, 2i+2} &= -K_0(\omega_{i+1} \rho_i); \quad b_{2M-1, 2M} = k_1^{(M)} \omega_M I_1(\omega_M \rho_M) + k_2^{(M)} I_0(\omega_M \rho_M); \\
 b_{2M, 2M} &= -k_1^{(M)} \omega_M K_1(\omega_M \rho_M) + k_2^{(M)} K_0(\omega_M \rho_M), \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

Стовбець вільних членів  $\{c_{n, k}\}$  має вигляд.

$$\begin{aligned}
 c_{n,1} &= \overline{Q}_{c,n}^{(1)} - \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(1)} \left( k_1^{(1)} d_\rho G_j^{(1)}(\rho_0) + k_2^{(1)} d_\rho G_j^{(1)}(\rho_0) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + B_{n-j}^{(1)} \left( k_1^{(1)} W_j^{(1)}(\rho_0) + k_2^{(1)} W_j^{(1)}(\rho_0) \right) \right]; \\
 c_{n,M} &= - \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(M)} \left( k_1^{(M)} d_\rho G_j^{(M)}(1) + k_2^{(M)} G_j^{(M)}(1) \right) + \right. \\
 &\quad \left. + B_{n-j}^{(M)} \left( k_1^{(M)} d_\rho W_j^{(M)}(1) + k_2^{(M)} W_j^{(M)}(1) \right) \right];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{n,2i} &= \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(i+1)} G_j^{(i+1)}(\rho_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(\xi) W_j^{(i+1)}(\rho_i) \right] - \\
&- \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(i)} G_j^{(i)}(\rho_i) + B_{n-j}^{(i)} W_j^{(i)}(\rho_i) \right]; \\
c_{n,2i+1} &= \kappa_T^{(i+1)} \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(i+1)} d_\rho G_j^{(i+1)}(\rho_i) + B_{n-j}^{(i+1)} d_\rho W_j^{(i+1)}(\rho_i) \right] - \\
&- \kappa_T^{(1)} \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(i)} d_\rho G_j^{(i)}(\rho_i) + B_{n-j}^{(i)} d_\rho W_j^{(i)}(\rho_i) \right].
\end{aligned}$$

Матрицю (4.25)  $[b_{k,l}]$  зведемо до діагонального вигляду. Для цього розглянемо перший верхній блок

$$\begin{pmatrix}
b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & 0 \\
\lambda_T^{(1)} \omega_1 I_1(\omega_1 \rho_1) & -\lambda_T^{(1)} \omega_1 K_1(\omega_1 \rho_1) & -\lambda_T^{(2)} \omega_2 I_1(\omega_2 \rho_1) & \lambda_T^{(2)} \omega_2 K_1(\omega_2 \rho_1) \\
I_0(\omega_1 \rho_1) & K_0(\omega_1 \rho_1) & -I_0(\omega_2 \rho_1) & -K_0(\omega_2 \rho_1)
\end{pmatrix} \quad (4.27)$$

який після елементарних перетворень набуде вигляду

$$\begin{pmatrix}
b_{1,1}^* & b_{1,2}^* & 0 & 0 \\
0 & b_{2,2}^* & b_{2,3}^* & b_{2,4}^* \\
0 & 0 & b_{3,3}^* & b_{3,4}^*
\end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

де нові коефіцієнти пов'язані із попередніми співвідношеннями:

$$\begin{aligned}
b_{1,1}^* &= b_{1,1}; \quad b_{1,2}^* = b_{1,2}; \quad b_{2,2}^* = -\lambda_T^{(1)} \omega_1 K_1(\omega_1 \rho_1) b_{1,1} - b_{1,2} \lambda_T^{(1)} \omega_1 I_1(\omega_1 \rho_1); \\
b_{2,3}^* &= -\lambda_T^{(2)} \omega_2 I_1(\omega_2 \rho_1) b_{1,1}; \quad b_{2,4}^* = \lambda_T^{(2)} \omega_2 K_1(\omega_2 \rho_1) b_{1,1}; \\
b_{3,3}^* &= -I_0(\omega_2 \rho_1) b_{1,1}^* \left( K_0(\omega_1 \rho_1) b_{1,1}^* - b_{1,2}^* I_0(\omega_1 \rho_1) \right) - b_{2,3}^* b_{2,2}^*; \\
b_{3,4}^* &= -K_0(\omega_2 \rho_1) b_{1,1}^* \left( K_0(\omega_1 \rho_1) b_{1,1}^* - b_{1,2}^* I_0(\omega_1 \rho_1) \right) - b_{2,4}^* b_{2,2}^*;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{n,1}^* &= c_{n,1}; c_{n,2}^* = c_{n,2} \left( k_1^{(1)} \omega_1 I_1(\omega_1 \rho_0) + k_2^{(1)} I_1(\omega_1 \rho_0) \right) - c_{n,1} \lambda_T^{(1)} \omega_1 I_1(\omega_1 \rho_1); \\
c_{n,3}^* &= \left( c_{n,3} \left( k_1^{(1)} \omega_1 I_1(\omega_1 \rho_0) + k_2^{(1)} I_1(\omega_1 \rho_0) \right) - c_{n,1} \lambda_T^{(1)} \omega_1 I_1(\omega_2 \rho_1) \right) \times \\
&\times \left( K_0(\omega_1 \rho_1) b_{1,1}^* - b_{1,2}^* I_0(\omega_1 \rho_1) \right) - c_{n,2}^* b_{2,2}^*;
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Поступимо так само із загальним блоком

$$\begin{pmatrix}
b_{2i-1,2i-1}^* & b_{2i-1,2i}^* & 0 & 0 \\
\lambda_T^{(i)} \omega_i I_1(\omega_i \rho_i) & -\lambda_T^{(i)} \omega_i K_1(\omega_i \rho_i) & -\lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} I_1(\omega_{i+1} \rho_i) & \lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} K_1(\omega_{i+1} \rho_i) \\
I_0(\omega_i \rho_i) & K_0(\omega_i \rho_i) & -I_0(\omega_{i+1} \rho_i) & -K_0(\omega_{i+1} \rho_i)
\end{pmatrix}$$

Провівши ті самі перетворення одержимо блок

$$\begin{pmatrix}
b_{2i-1,2i-1}^* & b_{2i-1,2i}^* & 0 & 0 \\
0 & b_{2i,2i}^* & b_{2i,2i+1}^* & b_{2i,2i+2}^* \\
0 & 0 & b_{2i+1,2i+1}^* & b_{2i+1,2i+2}^*
\end{pmatrix}, \quad i = \overline{2, M-1}, \tag{4.30}$$

де

$$\begin{aligned}
b_{2i,2i}^* &= -\lambda_T^{(i)} \omega_i \left( K_1(\omega_i \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^* - I_1(\omega_i \rho_i) b_{2i-1,2i}^* \right); \\
b_{2i,2i+1}^* &= -\lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} I_1(\omega_{i+1} \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^*; \\
b_{2i,2i+2}^* &= \lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} K_1(\omega_{i+1} \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^*; \\
b_{2i+1,2i+1}^* &= -\lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} I_1(\omega_{i+1} \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^* \times \\
&\times \left( K_0(\omega_i \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^* - b_{2i-1,2i}^* I_0(\omega_i \rho_i) \right) - \\
&- \lambda_T^{(i)} \omega_i I_0(\omega_{i+1} \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^* \left( K_1(\omega_i \rho_i) b_{2i-1,2i-1}^* - I_1(\omega_i \rho_i) b_{2i-1,2i}^* \right);
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
b_{2i+1, 2i+2}^* &= \lambda_T^{(i+1)} \omega_{i+1} K_1(\omega_{i+1} \rho_i) b_{2i-1, 2i-1}^* \times \\
&\times \left( K_0(\omega_i \rho_i) b_{2i-1, 2i-1}^* - b_{2i-1, 2i}^* I_0(\omega_i \rho_i) \right) - \\
&- \lambda_T^{(i)} \omega_i K_0(\omega_{i+1} \rho_i) b_{2i-1, 2i-1}^* \left( K_1(\omega_i \rho_i) b_{2i-1, 2i-1}^* - I_1(\omega_i \rho_i) b_{2i-1, 2i}^* \right); \\
c_{n, 2i}^* &= c_{n, 2i} b_{2i-1, 2i-1}^* - c_{n, 2i-1} \lambda_T^{(i)} \omega_i I_1(\omega_i \rho_i); \\
c_{n, 2i+1}^* &= \left( c_{n, 2i} b_{2i-1, 2i-1}^* - c_{n, 2i-1} \lambda_T^{(i)} \omega_i I_1(\omega_i \rho_i) \right) \times \\
&\times \left( K_0(\omega_i \rho_i) b_{2i-1, 2i-1}^* - b_{2i-1, 2i}^* I_0(\omega_i \rho_i) \right) + \\
&+ \lambda_T^{(i)} \omega_i \left( K_1(\omega_i \rho_i) b_{2i-1, 2i-1}^* - b_{2i-1, 2i}^* I_1(\omega_i \rho_i) \right) \times \\
&\times \left( c_{n, 2i+1} b_{2i-1, 2i-1}^* - c_{n, 2i-1} I_0(\omega_i \rho_i) \right).
\end{aligned}$$

Нарешті з останнього блоку

$$\begin{pmatrix} b_{2M-1, 2M-1}^* & b_{2M-1, 2M}^* \\ I_0(\omega_M \rho_M) & K_0(\omega_M \rho_M) \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

одержимо

$$\begin{pmatrix} b_{2M-1, 2M-1}^* & b_{2M-1, 2M}^* \\ 0 & b_{2M, 2M}^* \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

при

$$\begin{aligned}
b_{2M, 2M}^* &= b_{2M-1, 2M}^* I_0(\omega_M \alpha_M) - K_0(\omega_M \alpha_M) b_{2M-1, 2M-1}^*; \\
c_{n, 2M}^* &= c_{n, 2M-1}^* I_0(\omega_M \alpha_M) - c_{n, 2M}^* b_{2M-1, 2M-1}^*.
\end{aligned} \quad (4.34)$$

Таким чином ми звели систему (4.24) до трикутної системи рівнянь:

$$\begin{pmatrix}
b_{1,1}^* & b_{1,2}^* & 0 & & \mathbf{L} & & 0 \\
\mathbf{O} & & & & & & \\
0 & b_{2i-1, 2i-1}^* & b_{2i-1, 2i}^* & 0 & & \mathbf{L} & 0 \\
0 & \mathbf{L} & 0 & b_{2i, 2i}^* & b_{2i, 2i+1}^* & b_{2i, 2i+2}^* & 0 \\
0 & & \mathbf{L} & 0 & b_{2i+1, 2i+1}^* & b_{2i+1, 2i+2}^* & 0 \\
& & & \mathbf{O} & & & \\
0 & & & \mathbf{L} & & 0 & b_{2M, 2M}^*
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
A_n^{(1)} \\
B_n^1 \\
\mathbb{M} \\
A_n^{(i)} \\
B_n^{(i)} \\
\mathbb{M} \\
B_n^{(M)}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
c_{n, 1}^* \\
c_{n, 2}^* \\
\mathbb{M} \\
c_{n, 2i}^* \\
c_{n, 2i+1}^* \\
\mathbb{M} \\
c_{n, 2M}^*
\end{pmatrix} \quad (4.35)$$

в якій коефіцієнти матриці та вільні члени визначаються відповідними рекурентними співвідношеннями (4,29), (4.31), (4.34).

З системи (4.35), використовуючи «зворотній хід», одержимо її рекурентний розв'язок

$$B_n^{(M)} = \frac{c_{n, 2M}^*}{b_{2M, 2M}^*} ; \quad A_n^{(M)} = \frac{1}{b_{2M-1, 2M-1}^*} \left( c_{n, 2M-1}^* - B_n^{(M)} b_{2M-1, 2M}^* \right); \quad (4.36)$$

$$A_n^{(i)} = \frac{1}{b_{2i-1, 2i-1}^*} \left( c_{n, 2i-1}^* - B_n^{(i)} b_{2i-1, 2i}^* \right), \quad i = \overline{M-1, 1}; \quad (4.37)$$

$$B_n^{(i)} = \frac{1}{b_{2i, 2i}^*} \left( c_{n, 2i}^* - B_n^{(i+1)} b_{2i, 2i+2}^* - A_n^{(i+1)} b_{2i, 2i+1}^* \right), \quad i = \overline{M-1, 1}. \quad (4.38)$$

Послідовно знайшовши зі співвідношень (4.36) –(4.38) всі  $A_n^{(i)}$  і  $B_n^{(i)}$ , а, отже, і  $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma)$  остаточний розв'язок задачі (4.1)-(4.6) подамо у вигляді:

$$T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) = \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda\tau) \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i)} G_j^{(i)}(\xi, \rho) + B_{n-j}^{(i)} W_j^{(i)}(\xi, \rho) \right] \cos(\xi\gamma) d\xi. \quad (4.39)$$

## 4.2. Квазістатична задача термopружності для радіально-шаруватого циліндричного тіла.

Для визначення напружено-деформованого стану в осесиметричному випадку використаємо рівняння квазістатичної задачі теорії пружності відносно ключових функцій  $\theta^{(i)}(\rho, \gamma, \tau) = \text{div} \mathbf{\bar{U}}^{(i)}$  (об'ємна деформація) та  $w^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$  (переміщення в напрямку осі  $\gamma$ ). Як і у випадку плоско-паралельного шару вони в знерозмірених координатах, уведених в попередньому підрозділі, мають вигляд

$$\Delta \theta^{(i)} = \alpha_T^{(i)} \frac{1 + \nu_i}{1 - \nu_i} \Delta T^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (4.41)$$

$$\Delta w^{(i)} = -\frac{1}{1 - 2\nu_i} \partial_\gamma \theta^{(i)} + \alpha_T^{(i)} \frac{2(1 + \nu_i)}{1 - 2\nu_i} \partial_\gamma T^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (4.42)$$

До рівнянь Пуассона (4.41), (4.42) слід додати початкові умови

$$\theta^{(i)}(\alpha, \gamma, 0) = w^{(i)}(\alpha, \gamma, 0) = 0, \quad i = \overline{1, M}, \quad (4.43)$$

крайові умови (без обмеження загальності покладемо, що граничні поверхні неоднорідного циліндра вільні від навантажень)

$$\sigma_{\rho\rho}^{(1)}(\rho_0, \gamma, \tau) = 0; \quad \sigma_{\rho\gamma}^{(1)}(\rho_0, \gamma, \tau) = 0; \quad (4.44)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(M)}(1, \gamma, \tau) = 0; \quad \sigma_{\rho\gamma}^{(M)}(1, \gamma, \tau) = 0 \quad (4.45)$$

та умови ідеального механічного контакту складових

$$u^{(i)}(\rho_i, \gamma, \tau) = u^{(i+1)}(\rho_i, \gamma, \tau); \quad (4.46)$$

$$w^{(i)}(\rho_i, \gamma, \tau) = w^{(i+1)}(\rho_i, \gamma, \tau); \quad (4.47)$$

$$\sigma_{\rho\rho}^{(i)}(\rho_i, \gamma, \tau) = \sigma_{\rho\rho}^{(i+1)}(\rho_i, \gamma, \tau); \quad (4.48)$$

$$\sigma_{\rho\gamma}^{(i)}(\rho_i, \gamma, \tau) = \sigma_{\rho\gamma}^{(i+1)}(\rho_i, \gamma, \tau), \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (4.49)$$

Тут і надалі  $\alpha_T^{(i)} = \alpha_T^{(i)} / \alpha_T^{(0)}$ ,  $E_i = E_i / E_0$ ,  $\Delta = \partial_{\rho\rho}^2 + \rho^{-1}\partial_\rho + \partial_{\gamma\gamma}^2$  - оператор Лапласа в циліндричній системі координат,  $\alpha_T^{(i)}, E_i, \nu_i$  - відповідно, коефіцієнт лінійного температурного розширення, модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона матеріалу  $i$ -го шару.

До рівнянь (4.41) і (4.42) та умов (4.43)-(4.49) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є-Лагерра. В результаті одержимо послідовність крайових задач:

$$\rho^{-1}d_\rho(\rho\partial_\rho\bar{\theta}_n^{(i)}) - \xi^2\bar{\theta}_n^{(i)} = \alpha_T^{(i)} \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \left( \rho^{-1}d_\rho(\rho\partial_\rho\bar{T}_n^{(i)}) - \xi^2\bar{T}_n^{(i)} \right), \quad i = \overline{1, M}; \quad (4.50)$$

$$\rho^{-1}d_\rho(\rho\partial_\rho\bar{w}_n^{(i)}) - \xi^2\bar{w}_n^{(i)} = \frac{\xi\bar{\theta}_n^{(i)}}{1-2\nu_i} - \alpha_T^{(i)} \frac{2(1+\nu_i)}{1-2\nu_i} \xi\bar{T}_n^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (4.51)$$

з крайовими умовами

$$\bar{\sigma}_{\rho\rho, n}^{(1)}(\rho_0, \xi) = 0; \quad \bar{\sigma}_{\rho\rho, n}^{(M)}(1, \xi) = 0; \quad (4.52)$$

$$\bar{\sigma}_{\rho\gamma, n}^{(1)}(\rho_0, \xi) = 0; \quad \bar{\sigma}_{\rho\gamma, n}^{(M)}(1, \xi) = 0; \quad (4.53)$$

та умовами спряження:

$$\bar{u}_n^{(i)}(\rho_i, \xi) = \bar{u}_n^{(i+1)}(\rho_i, \xi); \quad \bar{w}_n^{(i)}(\rho_i, \xi) = \bar{w}_n^{(i+1)}(\rho_i, \xi), \quad i = \overline{1, M-1}; \quad (4.54)$$

$$\bar{\sigma}_{\rho\gamma, n}^{(i)}(\rho_i, \xi) = \bar{\sigma}_{\rho\gamma, n}^{(i+1)}(\rho_i, \xi); \quad \bar{\sigma}_{\rho\rho, n}^{(i)}(\rho_i, \xi) = \bar{\sigma}_{\rho\rho, n}^{(i+1)}(\rho_i, \xi), \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (4.55)$$

Розв'язок рівняння (4.50) подамо у вигляді

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(\rho, \xi) = C_n^{(i)} I_0(\xi\rho) + D_n^{(i)} K_0(\xi\rho) + \alpha_T^{(i)} \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \bar{T}_n^{(i)}(\rho, \xi), \quad (4.56)$$

тоді рівняння (4.51) можна записати так:

$$\rho^{-1}d_\rho(\rho d_\rho \bar{w}_n^{(i)}) - \xi^2 \bar{w}_n^{(i)} = \frac{\xi}{1-2\nu_i} \left( C_n^{(i)}(\xi) I_0(\xi\rho) + D_n^{(i)}(\xi) K_0(\xi\rho) \right) -$$

$$-\alpha_T^{(i)} \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \xi \bar{T}_n^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}. \quad (4.57)$$

Розв'язок рівняння (4.57), знайдемо у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{w}_n^{(i)}(\rho, \xi) = & F_n^{(i)}(\xi) I_0(\xi \rho) + H_n^{(i)}(\xi) K_0(\xi \rho) + \\ & + \frac{\rho}{2(1-2\nu_i)} \left[ C_n^{(i)}(\xi) I_1(\xi \rho) - D_n^{(i)}(\xi) K_1(\xi \rho) \right] - \frac{\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \xi \bar{T}_n^{(i)}(\rho, \xi); \end{aligned} \quad (4.58)$$

де  $\bar{T}_0^{(i)}(\rho, \xi) = \bar{T}_0^{(i)}(\rho, \xi)$ ,  $\bar{T}_n^{(i)}(\rho, \xi) = \bar{T}_n^{(i)}(\rho, \xi) - \bar{T}_{n-1}^{(i)}(\rho, \xi)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Правильність часткового розв'язку неоднорідного рівняння (4.56), котрий залежить від температури легко перевірити, якщо врахувати рівняння на трансформанту температури

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \rho} \right) - \xi^2 \bar{T}_n = \lambda \sum_{m=0}^n \bar{T}_m(\xi, \rho),$$

і використати очевидну рівність:

$$\left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \bar{T}_n}{\partial \rho} \right) - \xi^2 \right] (\bar{T}_n(\rho, \xi) - \bar{T}_{n-1}(\rho, \xi)) = \sum_{m=0}^n \bar{T}_m(\xi, \rho) - \sum_{m=0}^{n-1} \bar{T}_m(\xi, \rho) = \bar{T}_n(\xi, \rho).$$

На відміну від задачі для плоско-шаруватого тіла, коли можна було крайові умови та умови спряження записати лише в термінах розділюючих функцій, зреалізувати такий підхід в нашому випадку вкрай важко, а, можливо, і не реально. Тому визначимо спочатку всі необхідні компоненти вектора переміщення та тензора напружень через ключові функції, а потім перейдемо до крайових умов та умов спряження.

Для визначення радіального переміщення  $u^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$  використаємо означення об'ємного розширення  $\theta^{(i)} = \rho^{-1} \partial_\rho (\rho u^{(i)}) + \partial_\gamma w^{(i)}$  та одержимо

$$\rho^{-1} \partial_\rho (\rho u^{(i)}) = \theta^{(i)} - \partial_\gamma w^{(i)}.$$

В трансформантах за Лагерром-Фур'є

$$\rho^{-1} \partial_\rho (\rho \bar{u}_n^{(i)}) = \bar{\theta}_n^{(i)} - \xi \bar{w}_n^{(i)}, \quad (4.59)$$

звідки, інтегруючи, знайдемо

$$\begin{aligned} \bar{u}_n^{(i)}(\rho, \xi) &= \frac{1}{\rho} \int^\rho \alpha \left( \bar{\theta}_n^{(i)}(\alpha, \xi) - \xi \bar{w}_n^{(i)}(\alpha, \xi) \right) d\alpha = \frac{1}{2\xi(1-2\nu_i)} \times \\ &\times \left[ C_n^{(i)} (4(1-\nu_i) I_1(\xi\rho) - \xi\rho I_0(\xi\rho)) - D_n^{(i)} (4(1-\nu_i) K_1(\xi\rho) + \xi\rho K_0(\xi\rho)) \right] - \\ &- F_n^{(i)} I_1(\xi\rho) + H_n^{(i)} K_1(\xi\rho) + \frac{\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \partial_\rho \bar{u}_n^{(i)}(\rho, \xi). \end{aligned} \quad (4.60)$$

За відомими компонентами вектора пружного переміщення  $u^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$  і  $w^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$  та відомою температурою  $T^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$  за співвідношеннями Дюамеля-Неймана

$$\sigma_{\rho\rho}(\rho, \gamma, \tau) = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial \rho} - \alpha_T (3\lambda + 2\mu) T; \quad (4.61)$$

$$\sigma_{\beta\beta}(\rho, \gamma, \tau) = \lambda\theta + 2\mu \frac{u}{\rho} - \alpha_T (3\lambda + 2\mu) T; \quad (4.62)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}(\rho, \gamma, \tau) = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial \gamma} - \alpha_T (3\lambda + 2\mu) T; \quad (4.63)$$

$$\sigma_{\rho\gamma}(\rho, \gamma, \tau) = 2\mu \left( \frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \gamma} \right), \quad (4.64)$$

знайдемо компоненти тензора напружень.

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}_{\rho\gamma, n}^{(i)}}{2\mu_i} &= \frac{1}{1-2\nu_i} \left[ C_n^{(i)} (\xi\rho I_0(\xi\rho) - 2(1-\nu_i) I_1(\xi\rho)) + \right. \\ &+ D_n^{(i)} (\xi\rho K_0(\xi\rho) + 2(1-\nu_i) K_1(\xi\rho)) \left. \right] + 2\xi F_n^{(i)} I_1(\xi\rho) - \\ &- 2\xi H_n^{(i)} K_1(\xi\rho) - \frac{2\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} \frac{1+\nu_i}{1-\nu_i} \xi \partial_\rho \bar{u}_n^{(i)}(\rho, \xi); \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\sigma}_{\rho\rho,n}^{(i)}}{E_i}(\rho, \xi) = & \frac{1}{2(1-2v_i)(1+v_i)} \left[ C_n^{(i)} \left( (3-2v_i) I_0(\xi\rho) - \frac{I_1(\xi\rho)}{\xi\rho} (4(1-v_i) + \xi^2\rho^2) \right) + \right. \\
& + D_n^{(i)} \left( (3-2v_i) K_0(\xi\rho) + \frac{K_1(\xi\rho)}{\xi\rho} (4(1-v_i) + \xi^2\rho^2) \right) \left. \right] - \frac{F_n^{(i)}}{1+v_i} \left( \xi I_0(\xi\rho) - \frac{I_1(\xi\rho)}{\rho} \right) - \\
& - \frac{H_n^{(i)}}{1+v_i} \left( \xi K_0(\xi\rho) + \frac{K_1(\xi\rho)}{\rho} \right) + \frac{\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} \frac{1}{1-v_i} \left( \xi^2 \mathcal{T}_n^{(i)}(\rho, \xi) - \rho^{-1} \partial_\rho \mathcal{T}_n^{(i)}(\rho, \xi) \right).
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Підставляючи ці розв'язки в крайові умови і умови спряження одержимо

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2(1-2v_1)(1+v_1)} \left[ C_n^{(1)} \left( (3-2v_1) I_0(\xi\rho_0) - \frac{I_1(\xi\rho_0)}{\xi\rho_0} (4(1-v_1) + \xi^2\rho_0^2) \right) + \right. \\
& + D_n^{(1)} \left( (3-2v_1) K_0(\xi\rho_0) + \frac{F_1(\xi\rho_0)}{\xi\rho_0} (4(1-v_1) + \xi^2\rho_0^2) \right) \left. \right] - \frac{F_n^{(1)}}{1+v_1} \left( \xi I_0(\xi\rho_0) - \frac{I_1(\xi\rho_0)}{\rho_0} \right) - \\
& - \frac{H_n^{(1)}}{1+v_1} \left( \xi K_0(\xi\rho_0) + \frac{K_1(\xi\rho_0)}{\rho_0} \right) = - \frac{\alpha_T^{(1)}}{\beta_1} \frac{1}{1-v_1} \left( \xi^2 \mathcal{T}_n^{(1)}(\rho_0, \xi) - \rho_0^{-1} \partial_\rho \mathcal{T}_n^{(1)}(\rho_0, \xi) \right);
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1-2v_1} \left[ C_n^{(1)} (\xi\rho_0 I_0(\xi\rho_0) - 2(1-v_1) I_1(\xi\rho_0)) + D_n^{(1)} (\xi\rho_0 K_0(\xi\rho_0) + 2(1-v_1) K_1(\xi\rho_0)) \right] + \\
& + 2\xi F_n^{(1)} I_1(\xi\rho_0) - 2\xi H_n^{(1)} K_1(\xi\rho_0) = \frac{2\alpha_T^{(1)}}{\beta_1} \frac{1+v_1}{1-v_1} \xi \partial_\rho \mathcal{T}_n^{(1)}(\rho_0, \xi);
\end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}
& F_n^{(i)}(\xi) I_0(\xi\rho_i) + H_n^{(i)}(\xi) K_0(\xi\rho_i) + \frac{\rho_i}{2(1-2v_i)} \left[ C_n^{(i)}(\xi) I_1(\xi\rho_i) - D_n^{(i)}(\xi) K_1(\xi\rho_i) \right] - \\
& - \frac{\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} \frac{1+v_i}{1-v_i} \xi \mathcal{T}_n^{(i)}(\rho_i, \xi) = F_n^{(i+1)}(\xi) I_0(\xi\rho_i) + H_n^{(i+1)}(\xi) K_0(\xi\rho_i) + \frac{\rho_i}{2(1-2v_{i+1})} \times \\
& \times \left[ C_n^{(i+1)}(\xi) I_1(\xi\rho_i) - D_n^{(i+1)}(\xi) K_1(\xi\rho_i) \right] - \frac{\alpha_T^{(i+1)}}{\beta_{i+1}} \frac{1+v_{i+1}}{1-v_{i+1}} \xi \mathcal{T}_n^{(i+1)}(\rho_i, \xi);
\end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\xi(1-2v_i)} \left[ C_n^{(i)} (4(1-v_i)I_1(\xi\rho_i) - \xi\rho_i I_0(\xi\rho_i)) - D_n^{(i)} (4(1-v_i)K_1(\xi\rho_i) + \xi\rho_i K_0(\xi\rho_i)) \right] - \\
& -F_n^{(i)} I_1(\xi\rho_i) + H_n^{(i)} K_1(\xi\rho_i) + \frac{\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} \frac{1+v_i}{1-v_i} \partial_\rho \mathcal{T}_n^{(i)}(\rho_i, \xi) = \frac{1}{2\xi(1-2v_{i+1})} \times \\
& \times \left[ C_n^{(i+1)} (4(1-v_{i+1})I_1(\xi\rho_i) - \xi\rho_i I_0(\xi\rho_i)) - D_n^{(i+1)} (4(1-v_{i+1})K_1(\xi\rho_i) + \xi\rho_i K_0(\xi\rho_i)) \right] - \\
& -F_n^{(i+1)} I_1(\xi\rho_i) + H_n^{(i+1)} K_1(\xi\rho_i) + \frac{\alpha_T^{(i+1)}}{\beta_{i+1}} \frac{1+v_{i+1}}{1-v_{i+1}} \partial_\rho \mathcal{T}_n^{(i+1)}(\rho_i, \xi); \tag{4.70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathcal{E}_i}{2(1-2v_i)(1+v_i)} \left[ C_n^{(i)} \left( (3-2v_i)I_0(\xi\rho_i) - \frac{I_1(\xi\rho_i)}{\xi\rho_i} (4(1-v_i) + \xi^2\rho_i^2) \right) + \right. \\
& + D_n^{(i)} \left( (3-2v_i)K_0(\xi\rho_i) + \frac{K_1(\xi\rho_i)}{\xi\rho_i} (4(1-v_i) + \xi^2\rho_i^2) \right) \left. \right] - \frac{F_n^{(i)} \mathcal{E}_i}{1+v_i} \left( \xi I_0(\xi\rho_i) - \frac{I_1(\xi\rho_i)}{\rho_i} \right) - \\
& - \frac{H_n^{(i)} \mathcal{E}_i}{1+v_i} \left( \xi K_0(\xi\rho_i) + \frac{K_1(\xi\rho_i)}{\rho_i} \right) + \frac{\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} \frac{\mathcal{E}_i}{1-v_i} \left( \xi^2 \mathcal{T}_n^{(i)}(\rho_i, \xi) - \rho_i^{-1} \partial_\rho \mathcal{T}_n^{(i)}(\rho_i, \xi) \right) = \\
& = \frac{1}{2(1-2v_{i+1})(1+v_{i+1})} \left[ C_n^{(i+1)} \left( (3-2v_{i+1})I_0(\xi\rho_i) - \frac{I_1(\xi\rho_i)}{\xi\rho_i} (4(1-v_{i+1}) + \xi^2\rho_i^2) \right) + \right. \\
& + D_n^{(i+1)} \left( (3-2v_{i+1})K_0(\xi\rho_i) + \frac{K_1(\xi\rho_i)}{\xi\rho_i} (4(1-v_{i+1}) - \xi^2\rho_i^2) \right) \left. \right] - \\
& - \frac{F_n^{(i+1)}}{1+v_{i+1}} \left( \xi I_0(\xi\rho_i) - \frac{I_1(\xi\rho_i)}{\rho_i} \right) - \frac{H_n^{(i+1)}}{1+v_{i+1}} \left( \xi K_0(\xi\rho_i) + \frac{K_1(\xi\rho_i)}{\rho_i} \right) + \\
& + \frac{\alpha_T^{(i+1)}}{\beta_{i+1}} \frac{1}{1-v_{i+1}} \left( \xi^2 \mathcal{T}_n^{(i+1)}(\rho_i, \xi) - \rho_i^{-1} \partial_\rho \mathcal{T}_n^{(i+1)}(\rho_i, \xi) \right); \tag{4.70}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathcal{E}_i (1+v_{i+1})}{(1-2v_i)(1+v_i)} \left[ C_n^{(i)} (\xi\rho_i I_0(\xi\rho_i) - 2(1-v_i)I_1(\xi\rho_i)) + \right. \\
& + D_n^{(i)} (\xi\rho_i K_0(\xi\rho_i) + 2(1-v_i)K_1(\xi\rho_i)) \left. \right] + 2\xi \frac{\mathcal{E}_i (1+v_{i+1})}{(1+v_i)} F_n^{(i)} I_1(\xi\rho_i) - \\
& - 2\xi \frac{\mathcal{E}_i (1+v_{i+1})}{(1+v_i)} H_n^{(i)} K_1(\xi\rho_i) - \frac{2\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} \frac{\mathcal{E}_i (1+v_{i+1})}{(1-v_i)} \xi \partial_\rho \mathcal{T}_n^{(i)}(\rho_i, \xi) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{1-2v_{i+1}} \left[ C_n^{(i+1)} (\xi \rho_i I_0(\xi \rho_i) - 2(1-v_{i+1}) I_1(\xi \rho_i)) + \right. \\
&\quad \left. + D_n^{(i+1)} (\xi \rho_i K_0(\xi \rho_i) + 2(1-v_{i+1}) K_1(\xi \rho_i)) \right] + 2\xi F_n^{(i+1)} I_1(\xi \rho_i) - \\
&\quad - 2\xi H_n^{(i+1)} K_1(\xi \rho_i) - \frac{2\alpha_T^{(i+1)}}{\beta_{i+1}} \frac{1+v_i}{1-v_i} \xi \partial_\rho T_n^{(i+1)}(\rho_i, \xi).
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Виведені рівняння запишемо у вигляді алгебричної системи

$$[d_{k,l}] \{C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, \dots, C_n^{(l)}, D_n^{(l)}, F_n^{(l)}, H_n^{(l)}, \dots, F_n^{(M)}, H_n^{(M)}\}^T = \{f_{n,k}\} \tag{4.72}$$

Структура матриці  $[d_{k,l}]$  подібна до структури матриці  $[b_{k,l}]$

$$\begin{pmatrix}
d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} & 0 & & & & & \mathbf{L} & 0 \\
d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & d_{2,4} & 0 & & & & & \mathbf{L} & 0 \\
& & & & & \mathbf{L} & & & & & \\
0 & d_{4i-1, 4i-3} & d_{4i-1, 4i-2} & d_{4i-1, 4i-1} & d_{4i-1, 4i} & d_{4i-1, 4i+1} & d_{4i-1, 4i+2} & d_{4i-1, 4i+3} & d_{4i-1, 4i+4} & & 0 \\
0 & d_{4i, 4i-3} & d_{4i, 4i-2} & d_{4i, 4i-1} & d_{4i, 4i} & d_{4i, 4i+1} & d_{4i, 4i+2} & d_{4i, 4i+3} & d_{4i, 4i+4} & & 0 \\
0 & d_{4i+1, 4i-3} & d_{4i+1, 4i-2} & d_{4i+1, 4i-1} & d_{4i+1, 4i} & d_{4i+1, 4i+1} & d_{4i+1, 4i+2} & d_{4i+1, 4i+3} & d_{4i+1, 4i+4} & & 0 \\
0 & d_{4i+2, 4i-3} & d_{4i+2, 4i-2} & d_{4i+2, 4i-1} & d_{4i+2, 4i} & d_{4i+2, 4i+1} & d_{4i+2, 4i+2} & d_{4i+2, 4i+3} & d_{4i+2, 4i+4} & & 0 \\
& & & & & & \mathbf{L} & & & & \\
0 & & & & & & \mathbf{L} & 0 & d_{4M-1, 4M-3} & d_{4M-1, 4M-2} & d_{4M-1, 4M-1} & d_{4M-1, 4M} \\
0 & & & & & & \mathbf{L} & 0 & d_{4M, 4M-3} & d_{4M, 4M-2} & d_{4M, 4M-1} & d_{4M, 4M}
\end{pmatrix} \tag{4.73}$$

де

$$\begin{aligned}
d_{1,1} &= \frac{1}{2(1-2v_1)(1+v_1)} \left( (3-2v_1) I_0(\xi \rho_0) - \frac{I_1(\xi \rho_0)}{\xi \rho_0} (4(1-v_1) + \xi^2 \rho_0^2) \right); \\
d_{1,2} &= \frac{1}{2(1-2v_1)(1+v_1)} \left( (3-2v_1) K_0(\xi \rho_0) + \frac{K_1(\xi \rho_0)}{\xi \rho_0} (4(1-v_1) + \xi^2 \rho_0^2) \right); \\
d_{1,3} &= -\frac{1}{1+v_1} \left( \xi I_0(\xi \rho_0) - \frac{I_1(\xi \rho_0)}{\rho_0} \right); \quad d_{1,4} = -\frac{1}{1+v_1} \left( \xi K_0(\xi \rho_0) + \frac{K_1(\xi \rho_0)}{\rho_0} \right); \\
d_{2,1} &= \frac{1}{1-2v_1} (\xi \rho_0 I_0(\xi \rho_0) - 2(1-v_1) I_1(\xi \rho_0)); \quad d_{2,3} = 2\xi I_1(\xi \rho_0);
\end{aligned}$$

$$d_{2,2} = \frac{1}{1-2v_1} (\xi \rho_0 K_0(\xi \rho_0) + 2(1-v_1) K_1(\xi \rho_0)); \quad d_{2,4} = -2\xi K_1(\xi \rho_0);$$

$$d_{4i-1, 4i-3} = \frac{\rho_i}{2(1-2v_i)} I_1(\xi \rho_i); \quad d_{4i-1, 4i-2} = -\frac{\rho_i}{2(1-2v_i)} K_1(\xi \rho_i);$$

$$d_{4i-1, 4i-1} = I_0(\xi \rho_i); \quad d_{4i-1, 4i} = K_0(\xi \rho_i)$$

$$d_{4i-1, 4i+1} = -\frac{\rho_i}{2(1-2v_{i+1})} I_1(\xi \rho_i); \quad d_{4i-1, 4i+2} = \frac{\rho_i}{2(1-2v_{i+1})} K_1(\xi \rho_i);$$

$$d_{4i-1, 4i+3} = -I_0(\xi \rho_i); \quad d_{4i-1, 4i+4} = -K_0(\xi \rho_i);$$

$$d_{4i, 4i-3} = \frac{1}{2\xi(1-2v_i)} (4(1-v_i) I_1(\xi \rho_i) - \xi \rho_i I_0(\xi \rho_i));$$

$$d_{4i, 4i-2} = -\frac{1}{2\xi(1-2v_i)} (4(1-v_i) K_1(\xi \rho_i) + \xi \rho_i K_0(\xi \rho_i));$$

$$d_{4i, 4i-1} = -I_1(\xi \rho_i); \quad d_{4i, 4i} = K_1(\xi \rho_i);$$

$$d_{4i, 4i+1} = -\frac{1}{2\xi(1-2v_{i+1})} (4(1-v_{i+1}) I_1(\xi \rho_i) - \xi \rho_i I_0(\xi \rho_i));$$

$$d_{4i, 4i+2} = \frac{1}{2\xi(1-2v_{i+1})} (4(1-v_{i+1}) K_1(\xi \rho_i) + \xi \rho_i K_0(\xi \rho_i));$$

$$d_{4i, 4i+3} = I_1(\xi \rho_i); \quad d_{4i, 4i+4} = -K_1(\xi \rho_i);$$

$$d_{4i+1, 4i-3} = \frac{\xi_i}{2(1-2v_i)(1+v_i)} \left( (3-2v_i) I_0(\xi \rho_i) - \frac{I_1(\xi \rho_i)}{\xi \rho_i} (4(1-v_i) - \xi^2 \rho_i^2) \right);$$

$$d_{4i+1, 4i-2} = \frac{\xi_i}{2(1-2v_i)(1+v_i)} \left( (3-2v_i) K_0(\xi \rho_i) - \frac{K_1(\xi \rho_i)}{\xi \rho_i} (4(1-v_i) - \xi^2 \rho_i^2) \right);$$

$$d_{4i+1, 4i-1} = -\frac{\xi_i}{1+v_i} \left( \xi I_0(\xi \rho_i) - \frac{I_1(\xi \rho_i)}{\rho_i} \right); \quad d_{4i+1, 4i} = -\frac{\xi_i}{1+v_i} \left( \xi K_0(\xi \rho_i) + \frac{K_1(\xi \rho_i)}{\rho_i} \right);$$

$$d_{4i+1, 4i+1} = -\frac{1}{2(1-2v_{i+1})(1+v_{i+1})} \left( (3-2v_{i+1}) I_0(\xi \rho_i) - \frac{I_1(\xi \rho_i)}{\xi \rho_i} (4(1-v_{i+1}) + \xi^2 \rho_i^2) \right);$$

$$d_{4i+1, 4i+2} = -\frac{1}{2(1-2v_{i+1})(1+v_{i+1})} \left( (3-2v_{i+1}) K_0(\xi \rho_i) + \frac{K_1(\xi \rho_i)}{\xi \rho_i} (4(1-v_{i+1}) + \xi^2 \rho_i^2) \right)$$

$$d_{4i+1, 4i+3} = \frac{1}{1+v_{i+1}} \left( \xi I_0(\xi \rho_i) - \frac{I_1(\xi \rho_i)}{\rho_i} \right); \quad d_{4i+1, 4i+4} = \frac{1}{1+v_{i+1}} \left( \xi K_0(\xi \rho_i) - \frac{K_1(\xi \rho_i)}{\rho_i} \right);$$

$$d_{4i+2, 4i-3} = \frac{\frac{1}{2} (1+v_{i+1})}{(1-2v_i)(1+v_i)} (\xi \rho_i I_0(\xi \rho_i) - 2(1-v_i) I_1(\xi \rho_i));$$

$$d_{4i+2, 4i-2} = \frac{\frac{1}{2} (1+v_{i+1})}{(1-2v_i)(1+v_i)} (\xi \rho_i K_0(\xi \rho_i) - 2(1-v_i) K_1(\xi \rho_i));$$

$$d_{4i+2, 4i-1} = 2\xi \frac{\frac{1}{2} (1+v_{i+1})}{(1-2v_i)(1+v_i)} I_1(\xi \rho_i); \quad d_{4i+2, 4i} = -2\xi \frac{\frac{1}{2} (1+v_{i+1})}{(1-2v_i)(1+v_i)} K_1(\xi \rho_i);$$

$$d_{4i+2, 4i+1} = -\frac{1}{1-2v_{i+1}} (\xi \rho_i I_0(\xi \rho_i) - 2(1-v_{i+1}) I_1(\xi \rho_i));$$

$$d_{4i+2, 4i+2} = -\frac{1}{1-2v_{i+1}} (\xi \rho_i K_0(\xi \rho_i) - 2(1-v_{i+1}) K_1(\xi \rho_i));$$

$$d_{4i+2, 4i+3} = -2\xi I_1(\xi \rho_i); \quad d_{4i+2, 4i+4} = 2\xi K_1(\xi \rho_i);$$

$$d_{4M-1, 4M-3} = \frac{1}{2(1-2v_M)(1+v_M)} \times \\ \times \left( (3-2v_M) I_0(\xi \rho_M) - \frac{I_1(\xi \rho_M)}{\xi \rho_M} (4(1-v_M) - \xi^2 \rho_M^2) \right);$$

$$d_{4M-1, 4M-2} = \frac{1}{2(1-2v_M)(1+v_M)} \times \\ \times \left( (3-2v_M) K_0(\xi \rho_M) - \frac{K_1(\xi \rho_M)}{\xi \rho_M} (4(1-v_M) - \xi^2 \rho_M^2) \right);$$

$$d_{4M-1, 4M-1} = -\frac{1}{1+v_M} \left( \xi I_0(\xi \rho_M) - \frac{I_1(\xi \rho_M)}{\rho_M} \right);$$

$$d_{4M-1, 4M} = -\frac{1}{1+v_M} \left( \xi K_0(\xi \rho_M) - \frac{K_1(\xi \rho_M)}{\rho_M} \right);$$

$$d_{4M, 4M-3} = \frac{1}{1-2v_M} (\xi \rho_M I_0(\xi \rho_M) - 2(1-v_M) I_1(\xi \rho_M));$$

$$d_{4M, 4M-2} = \frac{1}{1-2v_M} (\xi \rho_M K_0(\xi \rho_M) - 2(1-v_M) K_1(\xi \rho_M));$$

$$d_{4M, 4M-1} = 2\xi I_1(\xi \rho_M); \quad d_{4M, 4M} = 2\xi K_1(\xi \rho_M);$$

$$f_{1,n} = -\frac{\alpha_T^{(1)}}{\beta_1} \frac{1}{1-v_1} \left( \xi^2 T_n^{(1)}(\rho_0, \xi) - \rho_0^{-1} \partial_\rho T_n^{(1)}(\rho_0, \xi) \right);$$

$$f_{2,n} = \frac{2\alpha_T^{(1)}}{\beta_1} \frac{1+v_1}{1-v_1} \xi \partial_\rho T_n^{(1)}(\rho_0, \xi);$$

$$f_{4i-1,n} = \frac{\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} \frac{1+v_i}{1-v_i} \xi T_n^{(i)}(\rho_i, \xi) - \frac{\alpha_T^{(i+1)}}{\beta_{i+1}} \frac{1+v_{i+1}}{1-v_{i+1}} \xi T_n^{(i+1)}(\rho_i, \xi);$$

$$f_{4i,n} = -\frac{\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} \frac{1+v_i}{1-v_i} \partial_\rho T_n^{(i)}(\rho_i, \xi) + \frac{\alpha_T^{(i+1)}}{\beta_{i+1}} \frac{1+v_{i+1}}{1-v_{i+1}} \partial_\rho T_n^{(i+1)}(\rho_i, \xi);$$

$$f_{4i+1,n} = -\frac{\alpha_T^{(i)}}{b_i} \frac{E_i}{1-n_i} \left( x^2 T_n^{(i)}(r_i, x) - r_i^{-1} \partial_r T_n^{(i)}(r_i, x) \right) + \\ + \frac{\alpha_T^{(i+1)}}{b_{i+1}} \frac{1}{1-n_{i+1}} \left( x^2 T_n^{(i+1)}(r_i, x) - r_i^{-1} \partial_r T_n^{(i+1)}(r_i, x) \right)$$

$$f_{4i+2, n} = -\frac{2\alpha_T^{(i+1)}}{\beta_{i+1}} \frac{1+v_{i+1}}{1-v_{i+1}} \xi \partial_\rho T_n^{(i+1)}(\rho_i, \xi) + \frac{2\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} \frac{2\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} \frac{E_i (1+v_{i+1})}{(1-v_i)} \xi \partial_\rho T_n^{(i)}(\rho_i, \xi);$$

$$f_{4M-1, n} = -\frac{\alpha_T}{\beta_M} \frac{1}{1-v_M} \left( \xi^2 T_n^{(M)}(\rho_M, \xi) - \rho_M^{-1} \partial_\rho T_n^{(M)}(\rho_M, \xi) \right);$$

$$f_{4M, n} = -\frac{2\alpha_T^{(M)}}{\beta_M} \frac{1+v_M}{1-v_M} \xi \partial_\rho T_n^{(M)}(\rho_M, \xi).$$

Як і в попередньому розділі системи (4.73) можна зводити до трикутного вигляду, а можна доручити їх розв'язування алгоритмічній програмі. Це має місце внаслідок того, що системи (4.73) не є трикутного вигляду і не мають змоги накопичувати похибки, одержані при попередніх значеннях  $n$ . Зазначимо, що цей факт перевірявся нами на багатьох задачах, як для плоско-шаруватих, так і радіально-шаруватих тіл і середовищ – різниці між кінцевими результатами не було.

Остаточний розв'язок задачі (4.41)-(4.49) подається у вигляді:

$$\theta^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \cos(\xi \alpha) d\xi \right] L_n(\lambda \tau); \quad (4.74)$$

$$w^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \sin(\xi \alpha) d\xi \right] L_n(\lambda \tau); \quad (4.75)$$

а напруження визначаються за співвідношеннями Дюамеля-Неймана.

### 4.3. Числові результати

За результатами, отриманими в попередніх підрозділах, було проведено числове дослідження термонапруженого стану в трьохшаровому композиті. Числовий аналіз проводився для тришарового циліндра, виготовленого з кераміки ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) і алюмінієвого сплаву, фізико-механічні властивості яких подано у таблиці 3. 1. при наступних вхідних параметрах задачі:  $k_1^{(1)} = 1$ ;  $k_1^{(M)} = 1$ ;  $k_2^{(1)} = 0$ ;  $k_2^{(M)} = Bi$ ;  $Q_c^{(M)}(\gamma, \tau) = 0$ ;  $Q_c^{(1)}(\gamma, \tau) = Q_M^\gamma(\varphi) \cdot Q_M^\tau(\tau)$ ;  $Q_1^\tau = (1 - \exp(-5\tau))$ .  $Q_1^\gamma = \exp(-4\gamma^2)$ ; (Рис. 4.2 а), б).)

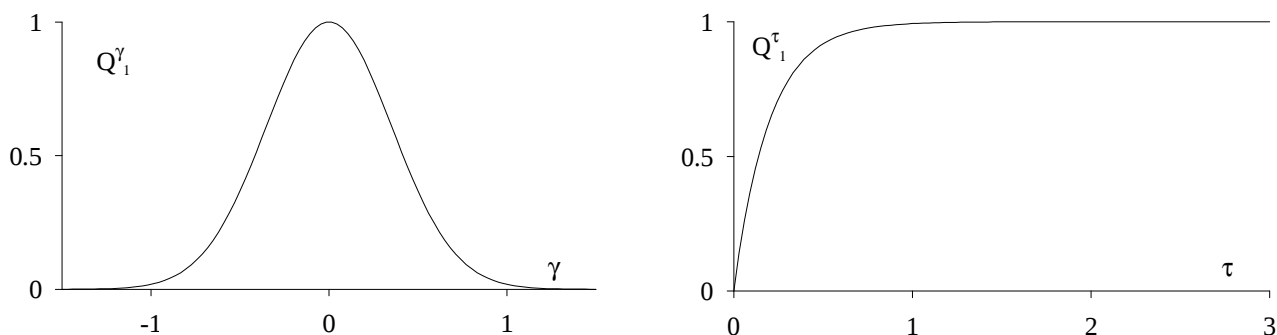


Рис. 4.2. Схема теплового навантаження

а) за змінною  $\gamma$

б) за змінною  $\tau$

Таким чином, внутрішня гранична поверхня циліндра знаходиться під дією теплового потоку інтенсивності  $Q_1^\gamma$ , а зовнішня гранична поверхня знаходиться в умовах теплообміну за законом Ньютона з коефіцієнтом теплообміну  $Bi$ .

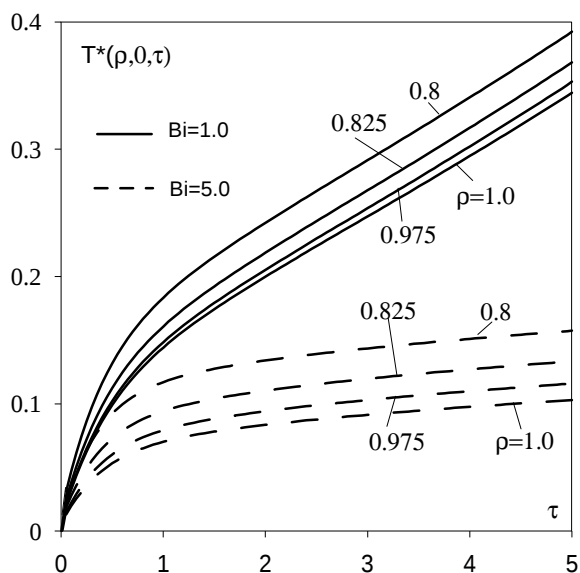


Рис.4.3. Зміна в часі температурного поля різних поверхнях

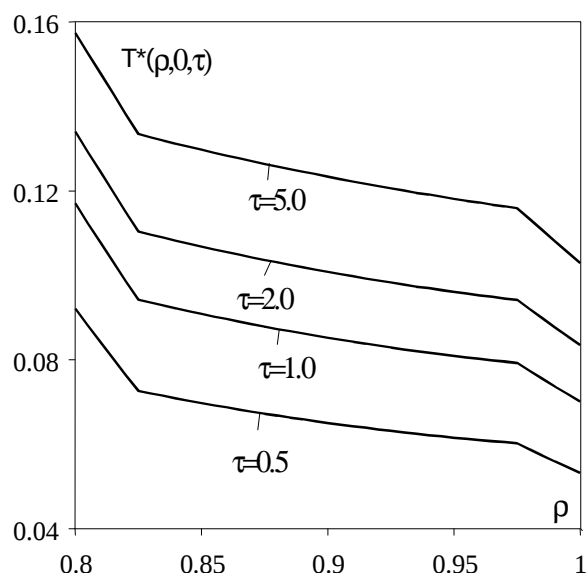


Рис. 4.4. Зміна температури за радіальною змінною

На рис. 4.3 подано результати розрахунку зміни в часі температурного поля в центрі ділянки нагріву ( $\gamma = 0$ ) для двох значень коефіцієнта теплообміну  $Bi$  на різних поверхнях спряження та на граничних поверхнях. Як видно з рис. 4.3 коефіцієнт теплообміну значно впливає на тривалість перехідного процесу та на розподіл температур в шарах композита.

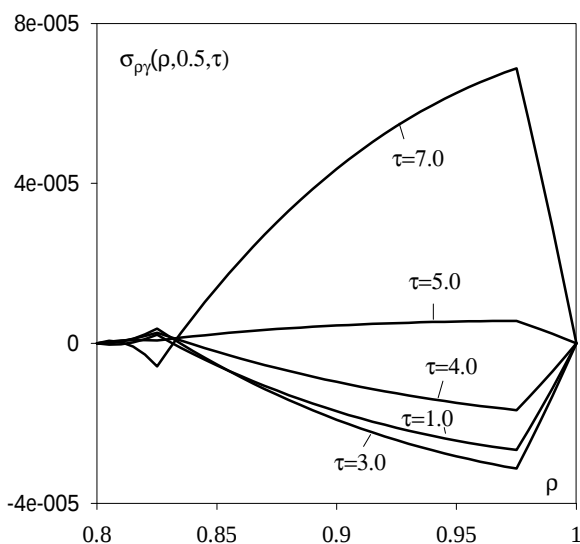


Рис.4.5. Зміна дотичних напружень за радіальною змінною

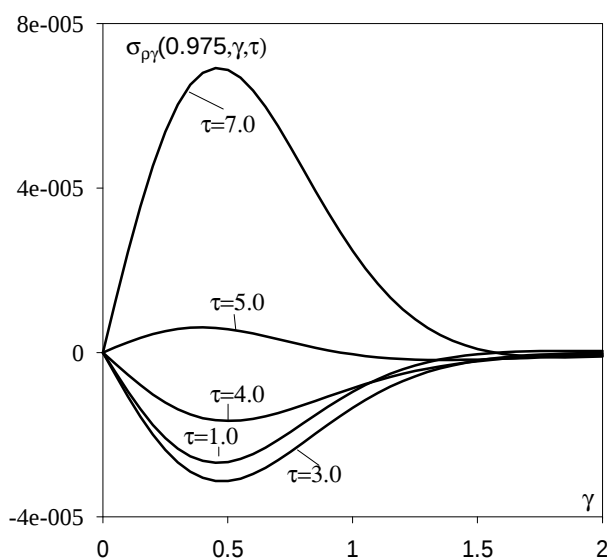


Рис. 4.6. Зміна дотичних напружень за змінною  $\gamma$ .

На рис. 4.5 подано результати розрахунку безрозмірних дотичних напружень по товщині композита, а на рис. 4.6 – за осьовою змінною. З рисунків видно, що вказані напруження досягають свого максимального значення на лінії

поділу серединного та зовнішнього шару і змінюють свій знак як за радіальною змінною, так і під час перехідного процесу та зосереджуються поблизу точки  $\gamma = 0,5$ .

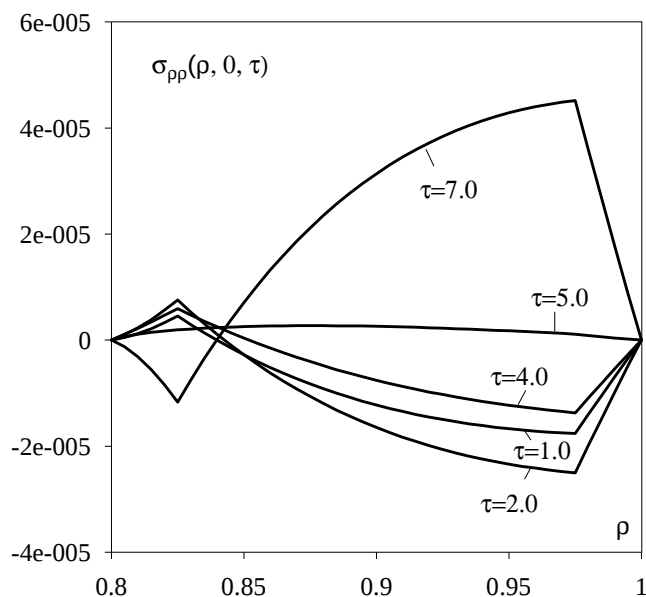


Рис.4.7. Зміна радіальних напружень за радіальною змінною

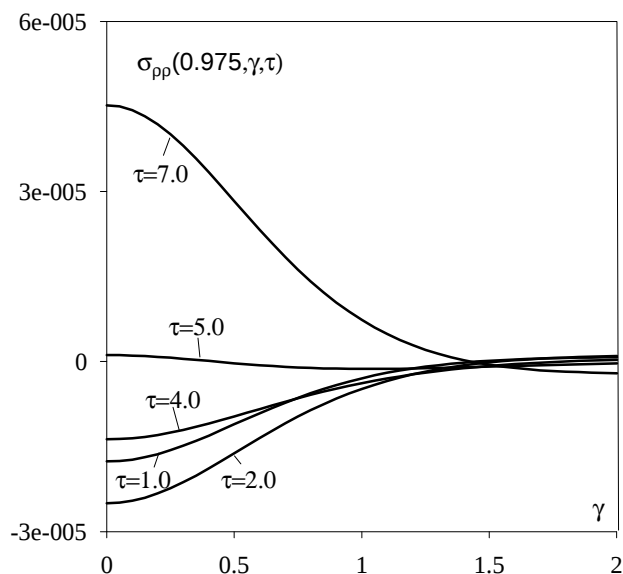


Рис. 4.8. Зміна радіальних напружень за змінною  $\gamma$ .

Аналогічні залежності спостерігаються на рис. 4.7 та рис. 4.8, де зображено графіки радіальних напружень. Проте на відміну від плоскої задачі, свого абсолютного максимуму вони досягають одночасно з дотичними напруженнями на лінії поділу серединного та зовнішнього шару.

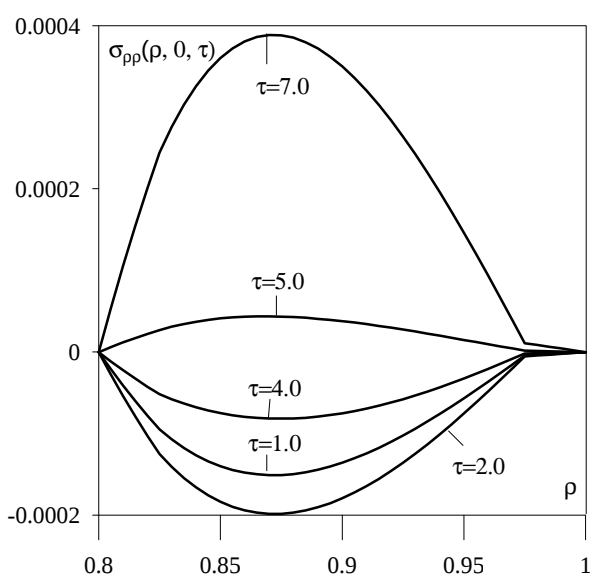


Рис.4.9. Зміна радіальних напружень за змінною  $\rho$

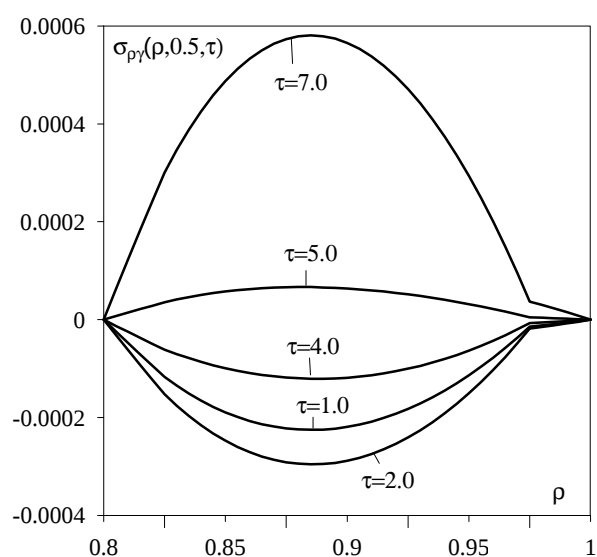


Рис. 4.10. Зміна дотичних напружень за змінною  $\rho$

Результати розрахунку радіальних та дотичних напружень у випадку зміни порядку розташування шарів (тобто, внутрішній і зовнішній – алюмінієвий сплав, а серединний - кераміка) зображено на рис. 4.9 та рис. 4.10. З наведених рисунків можна зробити висновок, що якісний розподіл вказаних напружень практично однаковий: максимуму вони досягають всередині композита і змінюють свій знак під час перехідного періоду. Крім того, слід зазначити, що в осесиметричній задачі існує певний момент часу  $\tau \approx 5$ , коли зазначені напруження практично рівні нулю в усіх точках композиту.

#### **4.4. Квазістатична задача термопружності для циліндричного тіла, виготовленого з функційно-градієнтного матеріалу**

З метою апробації розробленої методики на задачах для неоднорідних багатшарових тіл циліндричної форми, розвинемо дану методику на квазістатичні задачі термопружності для циліндричних тіл, виготовлених з матеріалів, в яких фізико-механічні властивості є функціями радіальної змінної.

Розглянемо циліндр ( $r_0 \leq r \leq 1$ ), теплофізичні та механічні властивості якого змінюються по  $r$  за довільними законами. Вважатимемо, що циліндр перебуває в умовах осесиметричного теплового навантаження, аналогічного до навантаження у першому підрозділі.

Побудова розв'язку задачі здійснюється шляхом уведення кусково-сталої апроксимації теплофізичних та механічних параметрів шару за формулами:

$$f(r) = f_1 + \sum_{i=1}^{M-1} (f_{i+1} - f_i) S_+(r - r_i) \quad (4.76)$$

де  $f_i$  - значення функції  $f(r)$  в точці  $r_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, M$ ,  $r = r_0$ ,  $r_M = 1$ . Вибір значень  $r_i$  та їх кількість  $M$  залежить від градієнтальності функції  $f(r)$  та точності наближення. В області  $r_0 \leq r \leq 1$  уведемо в розгляд підобласті  $r_i \leq r \leq r_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, M-1$ . Будемо вимагати, щоб в цих підобластях шукані характеристики термонапруженого стану задовольняли рівняння термопружності,

на поверхнях  $r = r_0$  і  $r_M = 1$  задовольняли крайові умови, а на поверхнях  $r = r_i, i = 1, 2, \dots, M-1$  температура, компоненти вектора пружного переміщення та компоненти вектора напружень були неперервними, що відповідає умовам ідеального теплового і механічного контакту.

Таким чином, наближена постановка задачі термопружності для функційно-градієнтного шару в безрозмірних змінних має вигляд

$$\frac{1}{r} \partial_r \left( r \partial_r T^{(i)} \right) + \partial_g^2 T^{(i)} = \mathfrak{d}_i \frac{\partial T^{(i)}}{\partial t}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (4.77)$$

$$T^{(i)}(r, g, 0) = 0; \quad (4.78)$$

$$k_1^{(1)} \frac{\partial T^{(1)}}{\partial r} + k_2^{(1)} T^{(1)} = Q_c^{(1)}(g, t), \quad \rho = \rho_0;$$

$$k_1^{(M)} \frac{\partial T^{(M)}}{\partial r_M} + k_2^{(M)} T^{(M)} = Q_c^{(M)}(g, t), \quad \rho = 1; \quad (4.79)$$

$$T^{(i)}(r_i, g, t) = T^{(i+1)}(r_i, g, t); \quad \mathbb{l}_T^{(i)} \partial_r T^{(i)}(r_i, g, t) = \mathbb{l}_T^{(i+1)} \partial_r T^{(i+1)}(r_i, g, t), \quad (4.80)$$

де  $T^{(i)}(r, g, t)$  - температурне поле  $i$ -го циліндричного шару,  $\mathfrak{d}_i = a/a_i$ ,  $\mathbb{l}_T^i = l_T^{i+1}/l_T^i$ ,  $l_T^i$ ,  $a_i$  - відповідно наближені значення коефіцієнтів теплопровідності і температуропровідності  $i$ -го шару,  $a$  - опорний коефіцієнт температуропровідності,  $r_i = R_i/R_M$ ,  $R_0$ ,  $R_M$  - радіуси внутрішньої і зовнішньої поверхонь циліндра,  $R_i$ ,  $(i = \overline{1, M-1})$  - радіуси поверхонь розбиття.

$$\Delta q^{(i)} = \mathfrak{d}_T^{(i)} \frac{1+n_i}{1-n_i} \Delta T^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (4.81)$$

$$\Delta w^{(i)} = -\frac{1}{1-2n_i} \partial_g q^{(i)} + \mathfrak{d}_T^{(i)} \frac{2(1+n_i)}{1-2n_i} \partial_g T^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (4.82)$$

$$q^{(i)}(a, g, 0) = w^{(i)}(a, g, 0) = 0, \quad i = \overline{1, M}; \quad (4.83)$$

$$s_{rr}^{(1)}(r_0, g, t) = 0; \quad s_{rg}^{(1)}(r_0, g, t) = 0; \quad s_{rr}^{(M)}(1, g, t) = 0; \quad s_{rg}^{(M)}(1, g, t) = 0; \quad (4.84)$$

$$u^{(i)}(r_i, g, t) = u^{(i+1)}(r_i, g, t); \quad w^{(i)}(r_i, g, t) = w^{(i+1)}(r_i, g, t); \quad (4.85)$$

$$s_{rr}^{(i)}(r_i, g, t) = s_{rr}^{(i+1)}(r_i, g, t); s_{rg}^{(i)}(r_i, g, t) = s_{rg}^{(i+1)}(r_i, g, t), \quad i = \overline{1, M-1} \quad (4.86)$$

Задача (4.77)-(4.86) повністю відповідає задачі (4.1)-(4.6), (4.42)-(4.49), а тому, якщо усі характеристики термонапруженого стану подати у вигляді

$$X^M(r, g, t) = X^{(1)}(r, g, t) + \sum_{i=1}^{M-1} (X^{(i+1)}(r, g, t) - X^{(i)}(r, g, t)) S_+(r - r_i) \quad (4.87)$$

то можна показати [185], що  $X(r, g, t) = \lim_{M \rightarrow \infty} X^{(M)}(r, g, t)$ , де, зокрема,

$$T^{(i)}(r, g, t) = \frac{2l}{p} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(lt) \int_0^{\infty} \sum_{j=0}^n [A_{n-j}^{(i)} G_j(w_i, r) + B_{n-j}^{(i)} W_j(w_i, r)] \cos(xg) dx; \quad (4.88)$$

$$q^{(i)}(a, g, t) = l \frac{2}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \bar{q}_n^{(i)}(x, g) \cos(xa) dx \right] L_n(lt); \quad (4.89)$$

$$w^{(i)}(a, g, t) = l \frac{2}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \bar{w}_n^{(i)}(x, g) \sin(xa) dx \right] L_n(lt); \quad (4.90)$$

Числовий експеримент проводився для наступних залежностей фізико-механічних властивостей циліндра:  $l_T = 1 - 10(0,6 - r)(1 - r)$   $r_0 = 0,6$ ,  $l_T = 1 - 10(0,6 - r)(1 - r)$ ,  $a = 1 + 10(0,6 - r)(1 - r)$ ,  $E = \exp(-0,6(0,6 - r)(0,6 - r))$ ,  $n = 0,3 - 0,1r$ ,  $a_T = 0,001 + 0,001r$  та при рівномірному розбитті області  $0,6 \leq r \leq 1$ .

На рис.4.11 подано результати розрахунку безрозмірної температури в циліндрі для різної кількості розбиттів  $M$ , а на рис.4.12 – радіальних переміщень, результати розрахунку яких продубльовано в таблиці. Як видно з наведених результатів, зі збільшенням кількості розбиттів, розв'язок прямує до певного значення, яке ми можемо вважати розв'язком вихідної задачі термопружності для функційно-градієнтного циліндра.

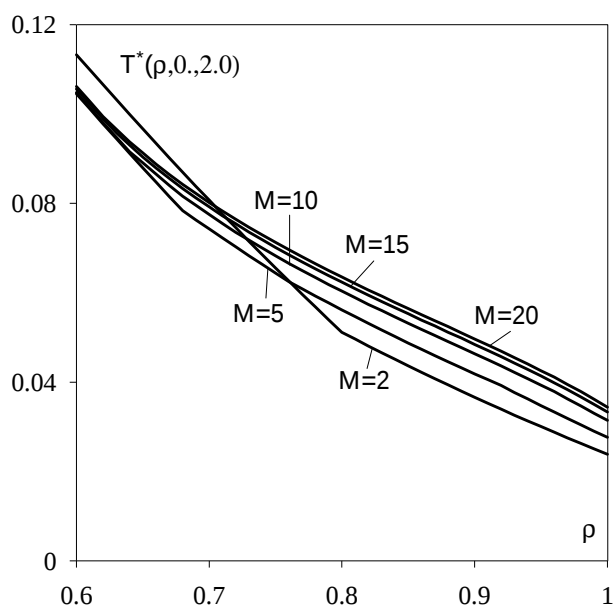


Рис.4.11. Температурне поле в циліндрі, залежно від кількості розбиттів

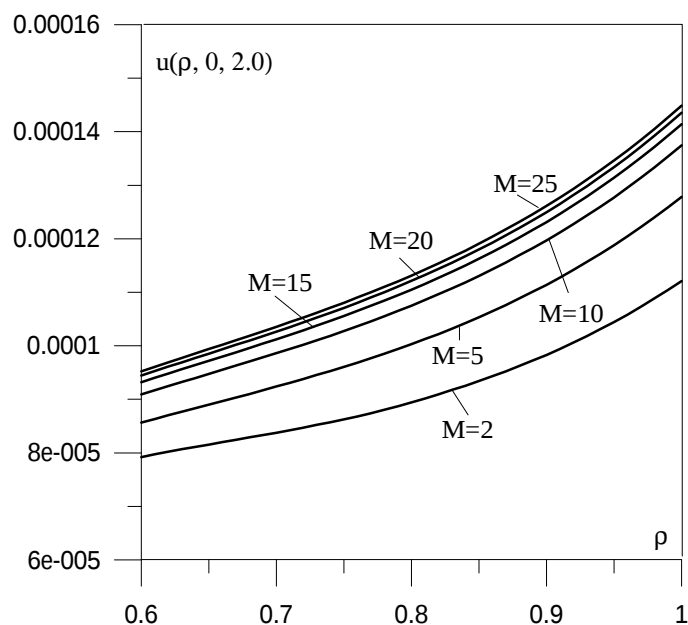


Рис. 4.12. Радіальні переміщення в циліндрі, залежно від кількості розбиттів

Таблиця 4.2

Розподіл радіальних переміщень за змінною  $\rho$ , залежно від кількості розбиттів

| $r$ | $u(r, 0, 2.0)$ |           |           |           |           |           |
|-----|----------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
|     | $M = 2$        | $M = 10$  | $M = 15$  | $M = 20$  | $M = 25$  | $M = 35$  |
| 6.0 | .7922E-04      | .9093E-04 | .9320E-04 | .9445E-04 | .9523E-04 | .9528E-04 |
| 6.5 | .8156E-04      | .9476E-04 | .9720E-04 | .9854E-04 | .9938E-04 | .9940E-04 |
| 7.0 | .8377E-04      | .9861E-04 | .1012E-03 | .1027E-03 | .1035E-03 | .1037E-03 |
| 7.5 | .8626E-04      | .1027E-03 | .1055E-03 | .1071E-03 | .1080E-03 | .1082E-03 |
| 8.0 | .8942E-04      | .1075E-03 | .1105E-03 | .1121E-03 | .1131E-03 | .1134E-03 |
| 8.5 | .9341E-04      | .1130E-03 | .1162E-03 | .1180E-03 | .1190E-03 | .1193E-03 |
| 9.0 | .9831E-04      | .1197E-03 | .1231E-03 | .1250E-03 | .1261E-03 | .1264E-03 |
| 9.5 | .1044E-03      | .1277E-03 | .1314E-03 | .1334E-03 | .1346E-03 | .1349E-03 |
| 1.0 | .1121E-03      | .1374E-03 | .1414E-03 | .1435E-03 | .1448E-03 | .1451E-03 |

Зазначимо, що подібні результати отримано і для інших точок та значень часової змінної, а також для інших характеристик термонапруженого стану.

#### **Висновки до розділу 4**

- розроблено аналітичну методику побудови розв'язку квазістатичних задач термопружності радіально-шаруватих тіл циліндричної форми;
- досліджено особливості часової трансформації температурних полів та напруженодеформованого стану в таких тілах за різного виду теплового навантаження та при різних кількостях складових, їх відносних товщин та взаємного розташування;
- запропоновано використання розробленої методики до числового аналізу квазістатичного термонапруженого стану циліндричних тіл із функційно-градієнтних матеріалів.

## РОЗДІЛ 5.

### ЗМІШАНІ КВАЗІСТАТИЧНІ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ З ПОКРИТТЯМИ

#### 5.1 Квазістатичні напруження в півпросторі з покриттям при змішаних умовах нагрівання 1-3-го роду

Розглянемо півпростір з покриттям, що моделюється шаром товщини  $h$  з відмінними від півпростору теплофізичними характеристиками. З моменту часу  $t > 0$  на поверхні покриття  $y = 0$  задано розподіл температури  $Q(x, t)$ , симетрично розподіленої в смузі ширини  $2d$ . Зовні цієї смуги відбувається теплообмін за законом Ньютона із зовнішнім середовищем нульової температури. Вважається, що початкова температура півпростору та покриття дорівнює нулю, а на межі поділу покриття та півпростору виконуються умови ідеального теплового контакту.

Введемо у розгляд безрозмірні змінні та величини  $a = x/d$ ,  $g = z/d$ ,  $t = a_T^{(2)} t / d^2$ ,  $g_1 = h/d$ ,  $a_T^{(i)} = a_T^{(2)} / a_T^{(i)}$ ,  $l_T^{(i)} = l_T^{(i)} / l_T^{(2)}$ ,  $q(a, t) = Q(a, t) d / l_T^{(1)}$ ,  $Bi = k d / l_T^{(1)}$ , . У термінах цих змінних задачу теплопровідності сформулюємо таким чином:

$$\partial_{aa}^2 T^{(i)} + \partial_{gg}^2 T^{(i)} = a_T^{(i)} \partial_t T^{(i)}, \quad i = 1, 2; \quad (5.1)$$

$$T^{(i)}(a, g, 0) = 0, \quad i = 1, 2; \quad (5.2)$$

$$T^{(1)} = Q(a, t), \quad g = 0, \quad |a| \leq 1; \quad (5.3)$$

$$\partial_g T^{(1)} - Bi T^{(1)} = 0, \quad g = 0, \quad |a| > 1; \quad (5.4)$$

$$T^{(1)} = T^{(2)}, \quad l_T^{(1)} \partial_g T^{(1)} = \partial_g T^{(2)}, \quad g = g_1; \quad (5.5)$$

$$\lim_{g \rightarrow \infty} T^{(2)}(a, g, t) = \lim_{g \rightarrow \infty} \partial_g T^{(2)}(a, g, t) = 0. \quad (5.6)$$

Тут  $l_T^{(i)}, a_T^{(i)}$  – відповідно коефіцієнти теплопровідності й температуропровідності покриття ( $i=1$ ) та півпростору ( $i=2$ );  $k$  - коефіцієнт тепловіддачі з поверхні покриття,  $T^{(i)}(a, g, t)$ ;  $i=1, 2$  – температурне поле в покритті та півпросторі.

До рівняння (5.1) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра за змінною  $t$  та, враховуючи симетричність температурного поля відносно площини  $a=0$ , cos-перетворення Фур'є за змінною  $a$ . У результаті отримаємо трикутну послідовність звичайних диференціальних рівнянь

$$d_{gg}^2 \bar{T}_n^{(i)} - (x^2 + l a_i) \bar{T}_n^{(i)} = l a_i \sum_{k=0}^{n-1} \bar{T}_k^{(i)}, \quad n=0, 1, 2, \mathbf{K}, \quad i=1, 2, \quad (5.7)$$

де  $\bar{T}_n^{(i)}(x, g) = \int_0^\infty \exp(-l t) \left[ \int_0^\infty T_n^{(i)}(a, g, t) \cos(x a) da \right] L_n(l t) dt$  - трансформанта за Лагерром та Фур'є.

Загальний розв'язок послідовностей (5.7), як відомо із попередніх розділів, можна записати у вигляді алгебричної згортки

$$\bar{T}_n^{(i)}(x, g) = \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i)}(x) G_j^{(i)}(x, g) + B_{n-j}^{(i)}(x) W_j^{(i)}(x, g) \right], \quad i=1, 2, \quad (5.8)$$

де  $G_j^{(i)}(x, g)$ ,  $W_j^{(i)}(x, g)$  - лінійно незалежні фундаментальні розв'язки, які згідно з методом невизначених коефіцієнтів матимуть вигляд

$$G_j^{(i)}(x, g) = \exp(-w_i g) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} \frac{(w_i g)^k}{k!}, \quad W_j^{(i)}(x, g) = \exp(w_i g) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} \frac{(-w_i g)^k}{k!}, \quad (5.9)$$

де введено позначення  $w_i = \sqrt{x^2 + l a_i}$ . Коефіцієнти  $a_{j,k}^{(i)}$  при цьому отримуються із рекурентних рівнянь

$$a_{j,k+1}^{(i)} = 0.5 \left( a_{j,k+2}^{(i)} - \frac{l a_i}{w_i^2} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^{(i)} \right)$$

при довільних  $a_{j,0}^{(i)}$  і  $a_{j,k}^{(i)} \equiv 0$  при  $k > j$ . У подальших розрахунках покладемо  $a_{0,0}^{(i)} = 1, a_{j,0}^{(i)} = 0, j \geq 1, i = 1, 2$ .

Невідомі  $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, A_n^{(2)}, B_n^{(2)}$  знайдемо з умов (5.3)-(5.7). Розглянемо спочатку змішані умови (5.3), (5.4), які після застосування інтегрального перетворення Лагерра набудуть вигляду

$$g = 0: T_n^{(1)} = Q_n(a), |a| \leq 1; \partial_g T_n^{(1)} - Bi T_n^{(1)} = 0, |a| > 1. \quad (5.10)$$

Безпосереднє застосування cos-перетворення Фур'є до цих умов неможливе внаслідок їх різнорідності. Тому продовжимо другу умову (5.10) на всю вісь, увівши в розгляд невідому функцію  $g_n(a)$

$$g = 0: \partial_g T_n^{(1)} - Bi T_n^{(1)} = \begin{cases} g_n(a), & |a| \leq 1; \\ 0, & |a| > 1. \end{cases} \quad (5.11)$$

Після застосування до (5.11) cos-перетворення Фур'є, отримаємо

$$\partial_g \bar{T}_n^{(1)} - Bi \bar{T}_n^{(1)} = \bar{g}_n(x), g = 0, \quad (5.12)$$

де  $\bar{g}_n(x) = \int_0^1 g_n(a) \cos(ax) da$ . Застосовуючи інтегральне перетворення Лагерра та

cos-перетворення Фур'є до умов (5.5)–(5.6), отримаємо

$$\bar{T}_n^{(1)} = \bar{T}_n^{(2)}, \quad \mathbb{I}_T^{(1)} \partial_g \bar{T}_n^{(1)} = \partial_g \bar{T}_n^{(2)}, \quad g = g_1; \quad (5.13)$$

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \bar{T}_n^{(2)}(x, g) = \lim_{g \rightarrow \infty} \partial_g \bar{T}_n^{(2)}(x, g) = 0. \quad (5.14)$$

З вигляду фундаментальних розв'язків (5.9) та умов (5.14) випливає, що  $B_n^{(2)} \equiv 0$ . З умов (5.12), (5.13) знайдемо решту невідомих у вигляді рекурентних співвідношень

$$A_n^{(1)} = \frac{-c_{n,1}(w_2 + \mathbb{I}_T^{(1)} w_1) \exp(w_1 g_1) + (w_1 - Bi)(w_2 c_{n,2} + c_{n,3})}{(w_1 + Bi)(w_2 + \mathbb{I}_T^{(1)} w_1) \exp(w_1 g_1) + (w_1 - Bi)(w_2 - \mathbb{I}_T^{(1)} w_1) \exp(-w_1 g_1)};$$

$$B_n^{(1)} = \frac{c_{n,1}(w_2 - l_T^{(1)}w_1)\exp(-w_1g_1) + (w_1 + Bi)(w_2c_{n,2} + c_{n,3})}{(w_1 + Bi)(w_2 + l_T^{(1)}w_1)\exp(w_1g_1) + (w_1 - Bi)(w_2 - l_T^{(1)}w_1)\exp(-w_1g_1)};$$

$$A_n^{(2)} = \frac{c_{n,3} - l_T^{(1)}w_1\exp(w_1g_1)B_n^{(1)} + l_T^{(1)}w_1\exp(-w_1g_1)A_n^{(1)}}{w_2\exp(-w_2g_1)}, \quad (5.15)$$

де

$$c_{n,1} = \bar{g}_n(x) - \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(1)}(x) \mathcal{G}_j^{(1)}(0) + B_{n-j}^{(1)}(x) \mathcal{W}_j^{(1)}(0) \right];$$

$$c_{n,2} = \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(2)}(x) G_j^{(2)}(g_1) - A_{n-j}^{(1)}(x) G_j^{(1)}(g_1) - B_{n-j}^{(1)} W_j^{(1)}(g_1) \right];$$

$$c_{n,3} = \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(2)}(x) \mathcal{G}_j^{(2)}(g_1) - l_T^{(1)} A_{n-j}^{(1)}(x) \mathcal{G}_j^{(1)}(g_1) - l_T^{(1)} B_{n-j}^{(1)}(x) \mathcal{W}_j^{(1)}(g_1) \right];$$

$$G_j^{(i)}(g) \equiv G_j^{(i)}(x, g), \quad W_j^{(i)}(g) \equiv W_j^{(i)}(x, g),$$

$$\mathcal{G}_j^{(i)}(g) \equiv d_g G_j^{(i)}(x, g), \quad \mathcal{W}_j^{(i)}(g) \equiv d_g W_j^{(i)}(x, g).$$

Повернемося до змішаних умов (5.10). Враховуючи подання (5.11) та формули обернення cos-перетворення Фур'є, ці умови можна записати у вигляді послідовності парних інтегральних рівнянь

$$\int_0^\infty x^{-1} \bar{g}_n(x) [1 + f(x)] \cos(xa) dx = -Q_n(a) - \int_0^\infty F_n(x) \cos(xa) dx, \quad |a| \leq 1; \quad (5.16)$$

$$\int_0^\infty \bar{g}_n(x) \cos(xa) dx = 0, \quad |a| > 1, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K} \quad (5.17)$$

де

$$f(x) = \frac{(w_2 + l_T w_1)(w_1 - x + Bi) - (w_1 + x - Bi)(w_2 - l_T w_1) \exp(-2w_1g_1)}{(w_1 + Bi)(w_2 + l_T w_1) + (w_1 - Bi)(w_2 - l_T w_1) \exp(-2w_1g_1)};$$

$$F_n(x) = \frac{\mathcal{G}_{n,1} \left[ (w_2 - l_T w_1) \exp(-w_1g_1) - (w_2 + l_T w_1) \exp(w_1g_1) \right] + 2w_1 (c_{n,2} w_2 + c_{n,3})}{(w_1 + Bi)(w_2 + l_T w_1) \exp(w_1g_1) + (w_1 - Bi)(w_2 - l_T w_1) \exp(-w_1g_1)};$$

$$\mathfrak{d}_{n,1} = -\sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(1)}(x) \mathfrak{d}_j^{(1)}(0) + B_{n-j}^{(1)}(x) \mathfrak{w}_j^{(1)}(0) \right].$$

Для побудови розв'язку парних інтегральних рівнянь (5.18), (5.19) скористаємося методикою, описаною в другому розділі. Для цього запишемо шукану функцію  $\bar{g}_n(x)$  у вигляді ряду Неймана

$$\bar{g}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} J_{2k}(x). \quad (5.18)$$

Безпосередньою підстановкою легко пересвідчитися, що рівняння (5.17) задовольняється тотожно при довільних коефіцієнтах  $a_{n,k}$ , а з рівняння (5.16) після перетворень отримуємо послідовності безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь

$$\mathfrak{d}_{n,k} + \sum_{m=0}^{\infty} \mathfrak{d}_{n,m} b_{m,k} = c_{n,k}, \quad (5.19)$$

де

$$\mathfrak{d}_{n,k} = a_{n,k} (2k)^{-1/2};$$

$$b_{m,k} = 2\sqrt{2m}\sqrt{2k} \int_0^{\infty} x^{-1} f(x) J_{2m}(x) J_{2k}(x) dx;$$

$$c_{n,k} = 2\sqrt{2k} \int_0^{\infty} \left[ -x^{-1/2} \bar{q}_n(x) + x^{-1} F_n(x) \right] J_{2k}(x) dx;$$

$$\bar{q}_n(x) = \int_0^{\infty} Q_n(a) \cos(ax) da.$$

Використовуючи властивості рядів Неймана, розривних інтегралів Вебера-Шафхейтліна [21] та теорему доведену в другому розділі можна встановити, що

$$\sum_{m,k=0}^{\infty} (b_{m,k})^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (c_{n,k})^2 < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K}. \quad (5.20)$$

Виконання умов (5.20) свідчить про квазірегулярність систем (5.19) і забезпечує збіжність числової процедури редукції.

Знаходження невідомих  $\bar{d}_{n,k}$  із систем (5.19) завершує побудову розв'язку задачі теплопровідності. При цьому температурне поле в покритті та півпросторі розраховується за формулою

$$T^{(i)}(a, g, t) = l \frac{2}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \bar{T}_n^{(i)}(x, g) \cos(xa) dx \right] L_n(lt), \quad i=1, 2. \quad (5.21)$$

Напружено-деформований стан у півпросторі з покриттям, зумовлений температурним полем (5.21), знайдемо за умови, що поверхня покриття  $g=0$  вільна від навантажень, на безмежності переміщення та напруження дорівнюють нулю, а на поверхнях поділу матеріалу покриття та півпростору виконуються умови ідеального механічного контакту.

Таким чином, як і в попередніх розділах, задача полягає у відшуванні розв'язку двох рівнянь Пуассона відносно ключових функцій  $q^{(i)}(a, g, t) = \operatorname{div} \dot{\mathbf{U}}^{(i)}, i=1, 2$  – об'ємного розширення і  $w^{(i)}(a, g, t), i=1, 2$  – нормальних компонент вектора пружного переміщення  $\dot{\mathbf{U}}^{(i)}$ :

$$\Delta q^{(i)} = a_T^{(i)} (3 - 4k_i^{-2}) \Delta T^{(i)}; \Delta w^{(i)} = (1 - k_i^2) \partial_g q^{(i)} + a_T^{(i)} (3k_i^2 - 4) \partial_g T^{(i)}, i=1, 2 \quad (5.22)$$

при крайових умовах

$$s_{gg}^{(1)}(a, 0, t) = 0, s_{ag}^{(1)}(a, 0, t) = 0; \quad (5.23)$$

умовах на нескінченності

$$\lim_{a, g \rightarrow \infty} q^{(2)}(a, g, t) = \lim_{a, g \rightarrow \infty} w^{(2)}(a, g, t) = 0 \quad (5.24)$$

і умовах спряження

$$w^{(1)}(a, g_1, t) = w^{(2)}(a, g_1, t), u^{(1)}(a, g_1, t) = u^{(2)}(a, g_1, t); \\ s_{gg}^{(1)}(r, g_1, t) = s_{gg}^{(2)}(r, g_1, t), s_{ag}^{(2)}(a, g_1, t) = s_{ag}^{(2)}(a, g_1, t). \quad (5.25)$$

Тут, як і завжди,  $k_i^2 = (l_i + 2m_i)/m_i$ ;  $a_T^{(i)}$ ,  $l_i$ ,  $m_i$  – відповідно коефіцієнт лінійного температурного розширення та сталі Ляме матеріалу покриття та півпростору.

Після застосування до рівнянь (5.22) інтегрального перетворення Лагерра та інтегрального перетворення Фур'є отримаємо їх розв'язок

$$\bar{q}_n^{(i)}(x, g) = C_n^{(i)}(x) \exp(-xg) + D_n^{(i)}(x) \exp(xg) + a_T^{(i)} (3 - 4k_i^{-2}) \bar{T}_n^{(i)}(x, g). \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_n^{(i)}(x, g) = & F_n^{(i)}(x) \exp(-xg) + H_n^{(i)}(x) \exp(xg) + \\ & + \frac{g}{2} (1 - k_i^2) [C_n^{(i)}(x) \exp(-xg) + D_n^{(i)}(x) \exp(xg)] + \frac{a_T^{(i)}}{b_i} (3 - 4k_i^{-2}) d_g \bar{T}_n^{(i)}(x, g), \end{aligned} \quad (5.27)$$

де  $\bar{T}_n^{(i)}(x, g) = \bar{T}_n^{(i)}(x, g) - \bar{T}_{n-1}^{(i)}(x, g)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $\bar{T}_0^{(i)}(x, g) = \bar{T}_0^{(i)}(x, g)$ .

Враховуючи умови (5.24), знайдемо, що

$$D_n^{(2)} = H_n^{(2)} \equiv 0. \quad (5.28)$$

Решту невідомих знайдено із трансформованих крайових умов (5.23) та умов спряження (5.25). Оскільки серед них немає умов змішаного типу, то алгоритм знаходження невідомих є ідентичним до результатів другого розділу роботи і тут не наводиться.

Остаточний розв'язок задачі (5.22)–(5.25) подається у вигляді

$$\begin{aligned} q^{(i)}(a, g, t) = & l \frac{2}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \bar{q}_n^{(i)}(x, g) \cos(xa) dx \right] L_n(lt); \\ w^{(i)}(a, g, t) = & l \frac{2}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \bar{w}_n^{(i)}(x, g) \cos(xa) dx \right] L_n(lt). \end{aligned} \quad (5.29)$$

Компонента вектора пружного переміщення  $u^{(i)}(r, g, t)$  визначається з рівності

$$u^{(i)}(a, g, t) = l \frac{2}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} x^{-1} [\bar{q}_n^{(i)}(x, g) - d_g \bar{w}_n^{(i)}(x, g)] \sin(xa) dx \right] L_n(lt), \quad (5.30)$$

а ненульові компоненти тензора напружень – за співвідношеннями Дюамеля-Неймана

$$\begin{aligned}\sigma_{\gamma\gamma}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) &= \frac{2\lambda\mu_i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \left[ (\kappa_i^2 - 2) \bar{\theta}_n^{(i)} + 2d_\gamma \bar{w}_n^{(i)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \alpha_T^{(i)} (3\kappa_i^2 - 4) \bar{T}_n^{(i)} \right] \cos(\xi\alpha) d\xi \right\} L_n(\lambda\tau) \\ \sigma_{\alpha\gamma}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) &= \frac{2\lambda\mu_i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \xi^{-1} \left[ \kappa_i^2 d_\gamma \bar{\theta}_n^{(i)} - 2\xi^2 \bar{w}_n^{(i)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \alpha_T^{(i)} (3\kappa_i^2 - 4) d_\gamma \bar{T}_n^{(i)} \right] \sin(\xi\alpha) d\xi \right\} L_n(\lambda\tau) \\ s_{aa}^{(i)}(a, g, t) &= \frac{2lm_i}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \left[ k_i^2 \bar{q}_n^{(i)} - 2d_g \bar{w}_n^{(i)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a_T^{(i)} (3k_i^2 - 4) \bar{T}_n^{(i)} \right] \cos(\chi a) d\chi \right\} L_n(lt)\end{aligned}$$

Числовий розрахунок термонапруженого стану в півпросторі з покриттям проведено у випадку, коли температура смуги на поверхні покриття задається співвідношенням  $Q(a, t) = q^* \times (1 - \exp(-t/t_0))$ , де  $q^*$  – величина, що має розмірність температури. Числові розрахунки виконувались для основи, виготовленої із титанового стопу й покриття із кераміки, теплофізичні властивості яких [310] наведено в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Термомеханічні властивості матеріалів покриття та півпростору

|                                           | $a_T^{(i)}$ (м <sup>2</sup> /сек) | $l_T^{(i)}$ (Вт/(м×К)) | $a_T^{(i)}$ (1/К)     | $E_i$ (ГПа) | $n_i$ |
|-------------------------------------------|-----------------------------------|------------------------|-----------------------|-------------|-------|
| $i = 1$<br>(Ti- 6Al- 4V)                  | $4.92 \times 10^{-7}$             | 1.21                   | $5.8 \times 10^{-6}$  | 348.4       | 0.24  |
| $i = 2$ (Si <sub>3</sub> N <sub>4</sub> ) | $2.61 \times 10^{-6}$             | 6.2                    | $8.86 \times 10^{-6}$ | 105.6       | 0.29  |

На рис. 5.1 наведено результати розрахунку знерозміреної температури  $T^*(a, g, t) = T^{(i)}(a, g, t) / q^*$  на поверхнях  $g = \text{const}$  при  $Bi = 1$ ,  $g_1 = 0,1$  у момент часу  $t = 2$ . При утриманні 50 членів ряду за поліномами Лагерра та 20 рівнянь у

системах (5.19) похибка при задоволенні крайових умовах не перевищує 1%, а незначна осциляція розв'язку на поверхні  $g = 0$  пояснюється ефектом Гіббса при числовому розрахунку інтегралів (5.21). Як бачимо з рисунка, в областях, розташованих під поверхнею нагрівання, виникають великі градієнти температури, пов'язані з різномірністю умов. Як свідчать результати розрахунків для інших значень часової змінної  $t$ , така картина має місце впродовж усього перехідного періоду і зберігається в стаціонарному режимі.

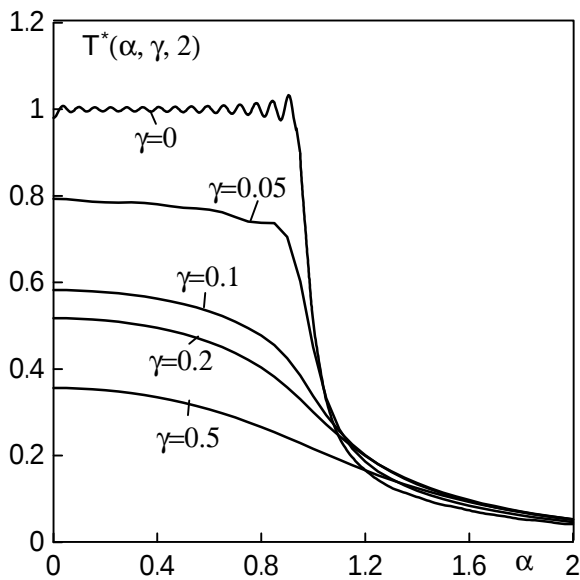


Рис. 5.1 Розподіл температури на різних поверхнях  $g = \text{const}$

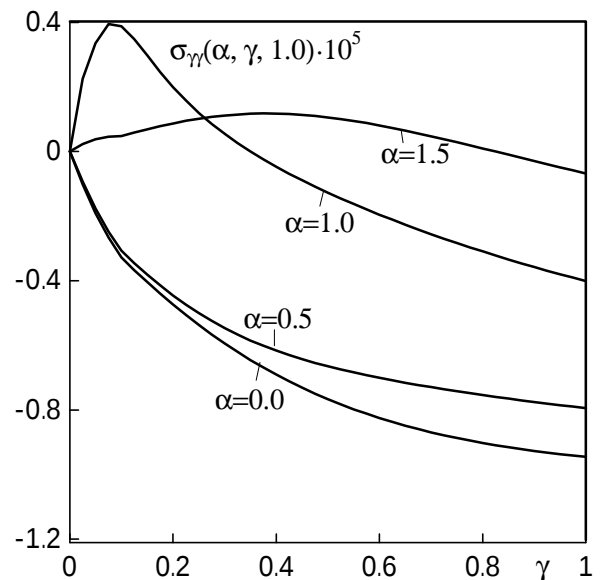


Рис. 5.2 Розподіл нормальних напружень для різних  $a$

На рис. 5.2 зображено розподіл знерозмірених нормальних напружень  $s_{gg}(a, g, t) = s_{gg}^{(i)}(a, g, t) / m_2$  за змінною  $g$  для різних  $a$  та  $Bi$  при  $t = 1$ . Як випливає з наведеного, рівень нормальних напружень із віддаленням від центру ділянки нагріву знижується. В областях, розташованих під областю нагріву ці напруження скрізь стискуючі, а в областях поза зоною нагріву змінюють знак. Причому максимального додатного значення набувають на поверхні поділу матеріалів покриття та основи під лінією  $a = 1$ .

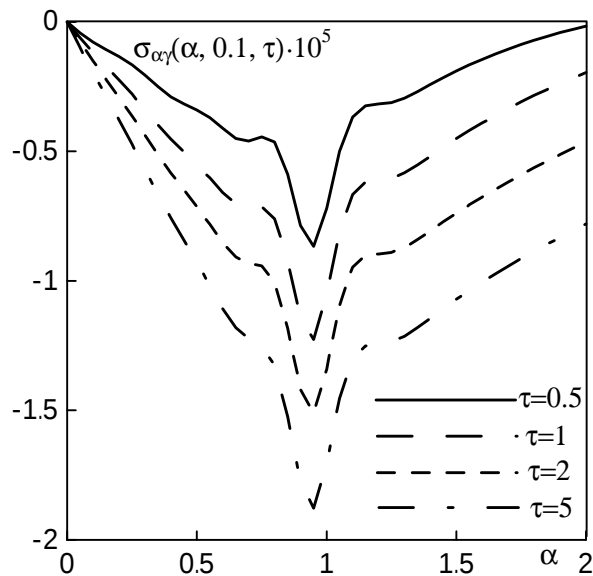


Рис 5.3 Розподіл дотичних напружень на поверхні поділу матеріалів покриття та півпростору в різні моменти часу

Трансформація в часі знерозмірених дотичних напружень  $s_{ag} = s_{ag}^{(i)}(a, g, t) / m_2$  на поверхні між покриттям та основою при  $Bi = 1$  зображена на рис.3. Як і слід було очікувати, максимального за модулем значення ці напруження досягають поблизу лінії поділу крайових умов (5.в областях із найбільшим градієнтом температури) та з плином часу зростають.

## 5.2 Квазістатична задача термопружності для двошарової плити при змішаних умовах нагрівання 2-3-го роду

Розглянемо плиту, що складається з двох шарів різної товщини  $h_i$  ( $h_1 + h_2 = H$ ) з різними коефіцієнтами теплопровідності  $l_T^{(i)}$  и температуропровідності  $a_T^{(i)}$ . Один із шарів ( $i=1$ ) будемо називати покриттям, а інший ( $i=2$ ) - основою. Будемо вважати, що починаючи з моменту часу  $t=0$ , двошарова плита нагрівається на поверхні покриття ( $z=0$ ) потоком тепла інтенсивності  $q(r, t)$ , осесиметрично розподілений в крузі радіуса  $R$ . Поза цього круга відбувається теплообмін за законом Ньютона із зовнішнім середовищем, що має нульову температуру. Нижня основа плити ( $z=H$ ) теплоізована.

У термінах безрозмірних змінних і величин  $a = r/R$ ,  $g = z/R$ ,  $t = a_T^{(0)} t / R^2$ ,  $g_1 = h_1 / R$ ,  $g_2 = H / R$ ,  $Bi = kR / l_T^{(0)}$ ,  $q(a, t) = q(aR, R^2 t / a_T^{(0)}) R / l_T^{(0)}$ ,  $a_T^{(i)} = a_T^{(0)} / a_T^{(i)}$ ,  $l_T^{(i)} = l_T^{(0)} / l_T^{(i)}$ , задачу теплопровідності запишемо таким чином:

$$\partial_{aa}^2 T^{(i)} + a^{-1} \partial_a T^{(i)} + \partial_{gg}^2 T^{(i)} = a_T^{(i)} \partial_t T^{(i)}, \quad i = 1, 2; \quad (5.31)$$

$$T^{(i)}(a, g, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (5.32)$$

$$g = 0: \quad l_T^{(1)} \partial_g T^{(1)} = -q(a, t), \quad a \leq 1; \quad l_T^{(1)} \partial_g T^{(1)} - Bi T^{(1)} = 0, \quad a > 1; \quad (5.33)$$

$$g = g_2: \quad \partial_g T^{(2)} = 0 \quad (5.34)$$

$$g = g_1: \quad T^{(1)} = T^{(2)}; \quad l_T^{(1)} \partial_g T^{(1)} = l_T^{(2)} \partial_g T^{(2)}. \quad (5.35)$$

Тут  $l_T^{(i)}$ ,  $a_T^{(i)}$  – коефіцієнти теплопровідності та температуропровідності покриття ( $i = 1$ ) та основи ( $i = 2$ ) відповідно;  $k$  – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні покриття,  $T^{(i)}(a, g, t)$ ,  $i = 1, 2$ , – температурне поле у покритті та основі.

До рівняння (5.31) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра за змінною  $t$  та, враховуючи симетричність температурного поля відносно осі  $a = 0$ , інтегральне перетворення Ханкеля за змінною  $a$ . Поступаючи далі так, як і в попередніх підрозділах, одержимо трикутну послідовність звичайних диференціальних рівнянь

$$d_{gg}^2 \bar{T}_n^{(i)} - (x^2 + l a_i) \bar{T}_n^{(i)} = l a_i \sum_{k=0}^{n-1} \bar{T}_k^{(i)}, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K}, \quad i = 1, 2, \quad (5.37)$$

де  $\bar{T}_n^{(i)}(x, g) = \int_0^\infty \exp(-lt) \left[ \int_0^\infty a T_n^{(i)}(a, g, t) J_0(xa) da \right] L_n(lt) dt$  – трансформанта за

Лагерром і Ханкелем.

Загальний розв'язок послідовностей (5.37) подамо у вигляді алгебричної згортки

$$\bar{T}_n^{(i)}(x, g) = \sum_{j=0}^n [A_{n-j}^{(i)}(x) G_j^{(i)}(x, g) + B_{n-j}^{(i)}(x) W_j^{(i)}(x, g)], \quad i = 1, 2, \quad (5.38)$$

де  $G_j^{(i)}(x, g)$ ,  $W_j^{(i)}(x, g)$  – лінійно незалежні фундаментальні розв’язки, які згідно з методом невизначених коефіцієнтів мають вигляд

$$G_j^{(i)}(x, g) = \exp(-w_i g) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} \frac{(w_i g)^k}{k!}, \quad W_j^{(i)}(x, g) = \exp(w_i g) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} \frac{(-w_i g)^k}{k!} \quad (5.39)$$

при  $w_i = \sqrt{x^2 + l a_i}$ . Коефіцієнти  $a_{j,k}^{(i)}$  одержуємо із рекурентних співвідношень

$$a_{j,k+1}^{(i)} = \frac{1}{2} \left( a_{j,k+2}^{(i)} - \frac{l a_i}{w_i^2} \sum_{m=k}^{j-1} a_{m,k}^{(i)} \right),$$

в яких для подальших розрахунків покладемо  $a_{0,0}^{(i)} = 1$ ,  $a_{j,0}^{(i)} = 0$ ,  $j \geq 1$ ,  $i = 1, 2$ .

Невідомі  $A_n^{(1)}$ ,  $B_n^{(1)}$ ,  $A_n^{(2)}$ ,  $B_n^{(2)}$  знайдемо з умов (5.33)–(5.37). Розглянемо спочатку змішані умови (5.33), які після застосування інтегрального перетворення Лагерра набудуть вигляду

$$g = 0: \quad \partial_g T_n^{(1)} = -q_n(a), \quad |a| \leq 1, \quad \partial_g T_n^{(1)} - \text{Bi} T_n^{(1)} = 0, \quad |a| > 1. \quad (5.40)$$

Безпосереднє застосування cos-перетворення Фур’є до цих умов знову ж таки неможливе внаслідок їх різнорідності, тому, як і в попередньому підрозділі. Другу з умов (5.40) продовжимо на всю вісь, увівши в розгляд невідому функцію  $g_n(a)$ :

$$g = 0: \quad \partial_g T_n^{(1)} - \text{Bi} T_n^{(1)} = \begin{cases} g_n(a), & |a| \leq 1, \\ 0, & |a| > 1. \end{cases} \quad (5.41)$$

Тут слід зазначити, що, якщо покласти в (5.41)  $g_n(a) = -q_n(a)$ , то отримаємо граничну умову, яка враховує теплообмін за законом Ньютона по всій граничній поверхні покриття, включаючи і область нагріву. Ця умова часто використовується у формулюваннях задач з метою уникнути проблеми різнорідності умов.

Після застосування до (5.41) cos-перетворення Фур’є одержимо

$$\partial_g \bar{T}_n^{(1)} - \text{Bi} \bar{T}_n^{(1)} = \bar{g}_n(x), \quad g = 0, \quad (5.42)$$

$$\text{де } \bar{g}_n(x) = \int_0^1 g_n(a) \cos(ax) da.$$

Застосувавши інтегральне перетворення Лагерра та  $\cos$ -перетворення Фур'є до умов (5.34), (5.35), одержимо

$$g = g_2: d_g \bar{T}_n^{(2)} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K}; \quad (5.43)$$

$$g = g_1: \bar{T}_n^{(1)} = \bar{T}_n^{(2)}; \quad l_T^{(1)} d_g \bar{T}_n^{(1)} = l_T^{(2)} d_g \bar{T}_n^{(2)}, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K}. \quad (5.44)$$

Безпосередньою підстановкою загального розв'язку (5.38) в умови (5.42)-(5.44) і перенесенням усіх доданків, які не містять невідомих з нижніми індексами  $n$ , у праву частину одержимо послідовність систем алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} \\ 0 & 0 & b_{4,3} & b_{4,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ B_n^{(1)} \\ A_n^{(2)} \\ B_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,n} \\ c_{2,n} \\ c_{3,n} \\ c_{4,n} \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K}, \quad (5.45)$$

де

$$\begin{aligned} b_{1,1} &= -l_T^{(1)} w_1 - \text{Bi}; \quad b_{1,2} = l_T^{(1)} w_1 - \text{Bi}; \quad b_{4,3} = -w_2 \exp(-w_2 g_2); \quad b_{4,4} = w_2 \exp(w_2 g_2); \\ b_{2,1} &= \exp(-w_1 g_1); \quad b_{2,2} = \exp(w_1 g_1); \quad b_{2,3} = -\exp(-w_2 g_1); \quad b_{2,4} = -\exp(w_2 g_1); \\ b_{3,1} &= -l_T^{(1)} w_1 \exp(-w_1 g_1); \quad b_{3,2} = l_T^{(1)} w_1 \exp(w_1 g_1); \\ b_{3,3} &= l_T^{(2)} w_2 \exp(-w_2 g_1); \quad b_{3,4} = -l_T^{(2)} w_2 \exp(w_2 g_1), \\ c_{1,n} &= \bar{g}_n(x) - \\ &- \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(1)}(x) \left( l_T^{(1)} d_g G_j^{(1)}(x, 0) - \text{Bi} G_j^{(1)}(x, 0) \right) + B_{n-j}^{(1)}(x) \left( l_T^{(1)} d_g W_j^{(1)}(x, 0) - \text{Bi} W_j^{(1)}(x, 0) \right) \right]; \\ c_{2,n} &= - \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(1)}(x) G_j^{(1)}(x, g_1) + B_{n-j}^{(1)}(x) W_j^{(1)}(x, g_1) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(i+1)}(x) G_j^{(i+1)}(x, g_i) + B_{n-j}^{(i+1)}(x) W_j^{(i+1)}(x, g_i) \right]; \\
c_{3,n} &= -\hbar_T^{(1)} \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(1)}(x) d_g G_j^{(1)}(x, g_1) + B_{n-j}^{(1)}(x) d_g W_j^{(1)}(x, g_1) \right] + \\
& + \hbar_T^{(2)} \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(2)}(x) d_g G_j^{(2)}(x, g_1) + B_{n-j}^{(2)}(x) d_g W_j^{(2)}(x, g_1) \right]; \\
c_{4,n} &= -\sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(2)}(x) d_g G_j^{(2)}(x, g_2) + B_{n-j}^{(2)}(x) d_g W_j^{(2)}(x, g_2) \right].
\end{aligned}$$

Системи (5.45) із використанням процедури Гаусса зведено до трикутного виду

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2}^* & b_{2,3}^* & b_{2,4}^* \\ 0 & 0 & b_{3,3}^* & b_{3,4}^* \\ 0 & 0 & 0 & b_{4,4}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ B_n^{(1)} \\ A_n^{(2)} \\ B_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,n} \\ c_{2,n}^* \\ c_{3,n}^* \\ c_{4,n}^* \end{pmatrix}, \quad (5.46)$$

де

$$\begin{aligned}
b_{2,2}^* &= \left( \hbar_T^{(1)} w_1 - \text{Bi} \right) \exp(-w_1 g_1) + \left( \hbar_T^{(1)} w_1 + \text{Bi} \right) \exp(w_1 g_1); \\
b_{2,3}^* &= -\left( \hbar_T^{(1)} w_1 + \text{Bi} \right) \exp(-w_2 g_1); \quad b_{2,4}^* = -\left( \hbar_T^{(1)} w_1 + \text{Bi} \right) \exp(w_2 g_1); \\
b_{3,3}^* &= \exp(-w_2 g_1) \left[ \exp(-w_1 g_1) \left( \hbar_T^{(1)} w_1 - \hbar_T^{(2)} w_2 \right) \left( \hbar_T^{(1)} w_1 - \text{Bi} \right) - \right. \\
& \left. - \exp(w_1 g_1) \left( \hbar_T^{(1)} w_1 + \hbar_T^{(2)} w_2 \right) \left( \hbar_T^{(1)} w_1 + \text{Bi} \right) \right]; \\
b_{3,4}^* &= \exp(w_2 g_1) \left[ \exp(-w_1 g_1) \left( \hbar_T^{(1)} w_1 + \hbar_T^{(2)} w_2 \right) \left( \hbar_T^{(1)} w_1 - \text{Bi} \right) - \right. \\
& \left. - \exp(w_1 g_1) \left( \hbar_T^{(1)} w_1 - \hbar_T^{(2)} w_2 \right) \left( \hbar_T^{(1)} w_1 + \text{Bi} \right) \right]; \\
b_{4,4}^* &= -w_2 \left[ \exp(-w_2 g_2) b_{3,4}^* + \exp(-w_2 g_2) b_{4,4}^* \right]; \\
c_{2,n}^* &= \exp(-w_1 g_1) c_{1,n} + \left( \hbar_T^{(1)} w_1 + \text{Bi} \right) c_{2,n}; \\
c_{3,n}^* &= 2 \hbar_T^{(1)} w_1 \exp(w_1 g_1) c_{2,n}^* - \left( \hbar_T^{(1)} w_1 c_{2,n} + c_{3,n} \right) b_{2,2}^*; \\
c_{4,n}^* &= -w_2 \exp(-w_2 g_2) c_{3,n}^* - b_{3,3}^* c_{4,n}.
\end{aligned}$$

Із систем (5.46) невідомі  $A_{n-j}^{(i)}(x)$  і  $B_{n-j}^{(i)}(x)$  визначаються із рекурентних співвідношень

$$\begin{aligned} B_n^{(2)} &= \frac{c_{4,n}^*}{b_{4,4}^*}, \quad A_n^{(2)} = \frac{1}{b_{3,3}^*} (c_{3,n}^* - B_n^{(4)} b_{3,4}^*), \\ B_n^{(1)} &= \frac{1}{b_{2,2}^*} (c_{2,n}^* - A_n^{(2)} b_{2,3}^* - B_n^{(2)} b_{2,4}^*), \quad A_n^{(1)} = \frac{1}{b_{1,1}^*} (c_{1,n}^* - B_n^{(1)} b_{1,2}^*). \end{aligned} \quad (5.47)$$

Повернемося до змішаних умов (5.40). Враховуючи подання (5.41) і формули обернення інтегрального перетворення Ханкеля, ці умови запишемо у вигляді послідовності парних інтегральних рівнянь

$$\int_0^\infty x \left[ \bar{g}_n(x) + \text{Bi}(A_n^{(1)}(x) + B_n^{(1)}(x)) \right] J_0(xa) dx = -\bar{q}_n(a), \quad a \leq 1; \quad (5.48)$$

$$\int_0^\infty x \bar{g}_n(x) J_0(xa) dx = 0, \quad a > 1, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K}. \quad (5.49)$$

Враховуючи розв'язок (5.47), після перетворень рівняння (5.48) приведемо до вигляду

$$\int_0^\infty x \bar{g}_n(x) [1 + f(x)] J_0(xa) dx = -\bar{q}_n(a) + \int_0^\infty x F_n(x) J_0(xa) dx, \quad a \leq 1, \quad (5.50)$$

де

$$f(x) = \frac{\text{Bi} \left[ \left( l_T^{(2)} w_2 - l_T^{(1)} w_1 \right) \exp(-w_1 g_1) - \left( l_T^{(2)} w_2 + l_T^{(1)} w_1 \right) \exp(w_1 g_1) \right]}{\left( l_T^{(1)} w_1 + \text{Bi} \right) \left( l_T^{(2)} w_2 + l_T^{(1)} w_1 \right) \exp(w_1 g_1) + \left( l_T^{(1)} w_1 - \text{Bi} \right) \left( l_T^{(2)} w_2 - l_T^{(1)} w_1 \right) \exp(-w_1 g_1)},$$

а  $F_n(x)$  є комбінацією  $c_{n,i}$ , тобто містить  $A_k^{(i)}(x)$  і  $B_k^{(i)}(x)$  вже при  $k \leq n-1$ .

Згідно методики, описаної в другому розділі розкладемо невідомі  $\bar{g}_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \mathbf{K}$  в ряди Неймана:

$$\bar{g}_n(x) = x^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} d_{n,k} J_{2k+1}(x). \quad (5.51)$$

Рівняння (5.49) при цьому задовольняється тотожно при довільних  $d_{n,k}$ , а з рівнянь (5.50) одержимо безмежні системи алгебричних рівнянь

$$d_{n,m} + \sum_{k=0}^{\infty} d_{n,k} h_{km} = z_{n,m}, \quad m = 0, 1, 2, \mathbf{K}, \quad (5.52)$$

де

$$d_{n,m} = \sqrt{2m+1} \cdot d_{n,m}; \quad h_{km} = 2\sqrt{2k+1}\sqrt{2m+1} \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t} J_{2k+1}(t) J_{2m+1}(t) dt;$$

$$z_{n,m} = 2\sqrt{2m+1} \int_0^{\infty} [-\bar{q}_n(t) + F_n(t)] J_{2m+1}(t) dt; \quad \bar{q}_n(t) = \int_0^1 a \bar{q}_n(a) J_0(at) da.$$

Зважаючи на вигляд функцій  $f(t)$  та  $g(t)$  і спираючись на твердження теореми із другого розділу можна встановити, що

$$\sum_{k,m=0}^{\infty} (h_{km})^2 < \infty; \quad \sum_{m=0}^{\infty} (z_{n,m})^2 < \infty, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K},$$

що, в свою чергу обумовлює застосування до систем (5.52) метода редукції.

Розв'язуючи послідовно ( $n = 0, 1, 2, \mathbf{K}$ ) систем (5.52) знаходимо за формулами (5.51) функції  $\bar{g}_n(x)$ . З їх використанням та формул (5.47) визначаємо всі  $A_k^{(i)}(x)$  і  $B_k^{(i)}(x)$ , що входять в розв'язки (5.38). Остаточний розв'язок вихідної задачі має вигляд

$$T^{(i)}(a, g, t) = l \sum_{n=0}^{\infty} L_n(lt) \int_0^{\infty} x \bar{T}_n^{(i)}(x, g) J_0(xa) dx. \quad (5.53)$$

Напружено-деформований стан у плиті з покриттям, викликаний температурним полем (5.53), визначимо в припущенні, що поверхня покриття  $g = 0$  вільна від навантажень, на граничній поверхні основи переміщення дорівнюють нулеві (умови жорсткого закріплення), а на поверхнях поділу матеріалу покриття та півпростору виконуються умови ідеального термомеханічного контакту.

Таким чином, задача полягає у відшуванні розв'язку двох рівнянь Пуассона відносно ключових функцій  $q^{(i)}(a, g, t) = \operatorname{div} \mathbf{U}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , – об'ємного розширення і  $w^{(i)}(a, g, t)$ ,  $i = 1, 2$ , – нормальних компонент вектора пружного переміщення:

$$\begin{aligned} \Delta q^{(i)} &= a_T^{(i)}(3 - 4k_i^{-2})\Delta T^{(i)}, \\ \Delta w^{(i)} &= (1 - k_i^2)\partial_g q^{(i)} + a_T^{(i)}(3k_i^2 - 4)\partial_g T^{(i)}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (5.54)$$

при крайових умовах

$$s_{gg}^{(1)}(a, 0, t) = 0, \quad s_{ag}^{(1)}(a, 0, t) = 0, \quad (5.55)$$

$$u^{(2)}(a, g_2, t) = 0, \quad w^{(2)}(a, g_2, t) = 0 \quad (5.56)$$

і умовах спряження

$$\begin{aligned} w^{(1)}(a, g_1, t) &= w^{(2)}(a, g_1, t), \quad u^{(1)}(a, g_1, t) = u^{(2)}(a, g_1, t), \\ s_{gg}^{(1)}(r, g_1, t) &= s_{gg}^{(2)}(r, g_1, t), \quad s_{ag}^{(2)}(a, g_1, t) = s_{ag}^{(2)}(a, g_1, t). \end{aligned} \quad (5.57)$$

Тут, як і раніше,  $k_i^2 = (l_i + 2m_i)/m_i$ ;  $a_T^{(i)}$ ,  $l_i$ ,  $m_i$  – відповідно коефіцієнти лінійного температурного розширення і сталі Ляме матеріалів покриття і півпростору.

Після застосування до рівнянь (5.54) інтегрального перетворення Лагерра та інтегрального перетворення Ханкеля одержимо їх розв'язок

$$\begin{aligned} \bar{q}_n^{(i)}(x, g) &= C_n^{(i)}(x) \exp(-xg) + D_n^{(i)}(x) \exp(xg) + a_T^{(i)}(3 - 4k_i^{-2})\bar{T}_n^{(i)}(x, g), \\ \bar{w}_n^{(i)}(x, g) &= F_n^{(i)}(x) \exp(-xg) + H_n^{(i)}(x) \exp(xg) + \\ &+ \frac{g}{2}(1 - k_i^2)[C_n^{(i)}(x) \exp(-xg) + D_n^{(i)}(x) \exp(xg)] + \frac{a_T^{(i)}}{b_i}(3 - 4k_i^{-2})d_g \mathcal{T}_n^{(i)}(x, g), \end{aligned} \quad (5.58)$$

де  $\mathcal{T}_n^{(i)}(x, g) = \bar{T}_n^{(i)}(x, g) - \bar{T}_{n-1}^{(i)}(x, g)$ ,  $n = 1, 2, \mathbf{K}$ ;  $\mathcal{T}_0^{(i)}(x, g) = \bar{T}_0^{(i)}(x, g)$ .

Невідомі  $C_n^{(i)}$ ,  $D_n^{(i)}$ ,  $F_n^{(i)}$ ,  $H_n^{(i)}$  визначимо із системи алгебричних рівнянь (3.103) при  $M = 2$ .

Остаточний розв'язок задачі (5.54)–(5.57) одержимо у вигляді

$$\begin{aligned}
 q^{(i)}(a, g, t) &= l \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} x \bar{q}_n^{(i)}(x, g) J_0(xa) dx \right] L_n(lt), \\
 w^{(i)}(a, g, t) &= l \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} x \bar{w}_n^{(i)}(x, g) J_0(xa) dx \right] L_n(lt), \\
 u^{(i)}(a, g, t) &= l \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} [\bar{q}_n^{(i)}(x, g) - d_g \bar{w}_n^{(i)}(x, g)] J_1(xa) dx \right] L_n(lt), \quad (5.59)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\gamma\gamma}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) &= \lambda E_i \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \xi \left( \frac{v_i \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma)}{(1+v_i)(1-2v_i)} + \frac{1}{(1+v_i)} d_{\gamma} \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\alpha_T^{(i)}}{1-2v_i} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \right) J_0(\xi ga) d\xi \right] L_n(\lambda\tau); \\
 \sigma_{\alpha\alpha}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) &= \lambda E_i \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \xi \left( \frac{v_i \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma)}{(1+v_i)(1-2v_i)} - \frac{\alpha_T^{(i)}}{1-2v_i} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \right) J_0(\xi\alpha) d\xi + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{1+v_i} \int_0^{\infty} (\bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - d_{\gamma} \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma)) (\xi J_0(\xi\alpha) - \alpha^{-1} J_1(\xi\alpha)) d\xi \right] L_n(\lambda\tau); \\
 \sigma_{\alpha\gamma}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) &= 2\lambda E_i \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \left( \frac{(1-v_i) d_{\gamma} \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma)}{(1-2v_i)} - \xi^2 \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \alpha_T^{(i)} \frac{1+v_i}{1-2v_i} d_{\gamma} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \right) J_1(\xi\alpha) d\xi \right] L_n(\lambda\tau). \quad (5.60)
 \end{aligned}$$

За формулою (5.53) виконувався розрахунок температурного поля в плиті із алюмінієвого стопу ( $a_T^{(2)} = 9.06 \times 10^{-7}$  м/сек<sup>2</sup>;  $l_T^{(2)} = 2.22 \times 10^2$  Вт/(м×К)) з покриттям із кераміки ( $a_T^{(1)} = 1.19 \times 10^{-7}$  м/сек<sup>2</sup>;  $l_T^{(1)} = 3.6 \times 10$  Вт/(м×К)) при  $R = H$ , у випадку, коли інтенсивність потоку тепла на поверхні покриття задається виразом  $\dot{q}(a, t) = (1 - a^2)^2 (1 - \exp(-t/t_0)) q^*$ , де  $q^*$  – величина, що має розмірність температури (°C). Розрахунки проводились при  $t_0 = 4.0$ . При цьому

інтенсивність потоку тепла була більшою за 90% від стаціонарного значення вже при  $t = 0.6$ . В розрахунках в якості знерозмірюючих величин  $l_T^{(0)}$  и  $a_T^{(0)}$  були вибрані відповідні величини алюмінієвого стопу.

На рисунку 5.4 подані результати розрахунку знерозміреного теплового потоку  $Q(a, g, t) = \frac{h_T^{(i)}}{q^*} \partial_g T^{(i)}(a, g, t)$  за змінною  $a$  в момент часу  $t = 1.0$  при  $g_1 = 0.1$ ,  $Bi = 2$  на різних поверхнях  $g = const$ . Як видно з рисунка, тепловий потік на поверхні  $g = 0$  має розрив першого роду, що є наслідком різнорідності крайових умов і якісно підтверджує їх виконання. При віддаленні від поверхні нагріву розрив зникає, тепловий потік в приповерхневих областях змінює знак при переході через лінію зміни крайових умов ( $a = 1$ ), що свідчить про домінування процесу охолодження в цих областях при  $a > 1$ .

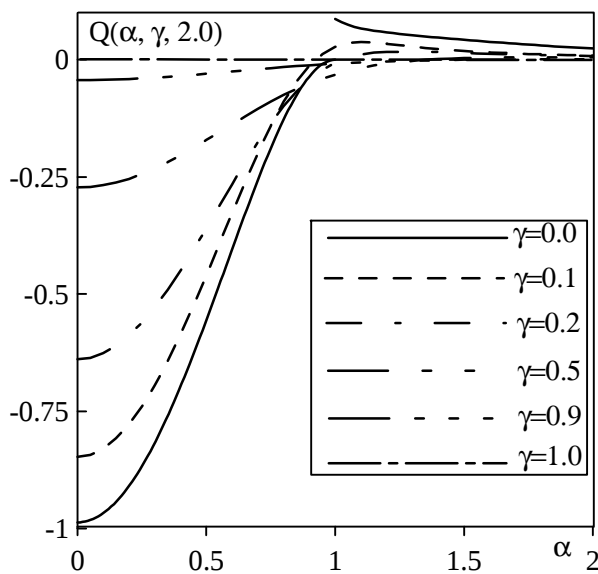


Рис. 5.4 Розподіл теплового потоку на різних поверхнях  $g = const$

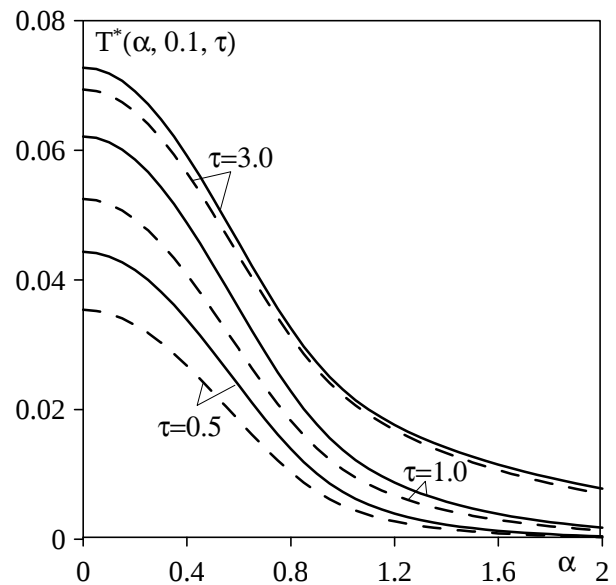


Рис. 5.5 Розподіл температури за змінною  $a$  на поверхні  $g = g_1 = 0.1$

Для з'ясування впливу теплообміну в зоні нагріву на розподіл температури були проведені розрахунки безрозмірною температури  $T^*(a, g, t) = T^{(i)}(a, g, t) / q^*$  на поверхні розділу матеріалів покриття і основи при  $Bi = 1$  і різних значень безрозмірного часу для двох видів крайових умов:

- а) різнорідні крайові умови (5.33) - суцільна лінія;  
 б) крайова умова (5.41) при  $g_n(a) = -q_n(a)$  - переривчаста лінія.

Як впливає з наведених на рисунку 5.5 результатів, процес теплообміну в зоні нагріву значно (до 20%) знижує температуру навіть на деякій відстані від поверхні покриття. На самій поверхні відмінність між відповідними результатами ще істотніше.

На рисунку 5.6 показані результати розрахунку впливу інтенсивності охолодження на розподіл безрозмірної температури по товщині пакета на поверхні  $a = 1.0$  (під лінією розділу граничних умов) для значень часової змінної  $t = 1.0$  і  $t = 10.0$  при  $g_1 = 0.1$ . Як видно з розрахунків, в перші моменти часу вплив охолодження на розподіл температури помітно лише в покритті. Температура вільної поверхні покриття при  $Bi = 5$  трохи нижче, ніж температура поверхні розділу матеріалів покриття і основи. При значенні,  $t = 10.0$ , яке практично відповідає усталеному режиму, вплив теплообміну на розподіл температури можна вважати суттєвим для всієї поверхні.

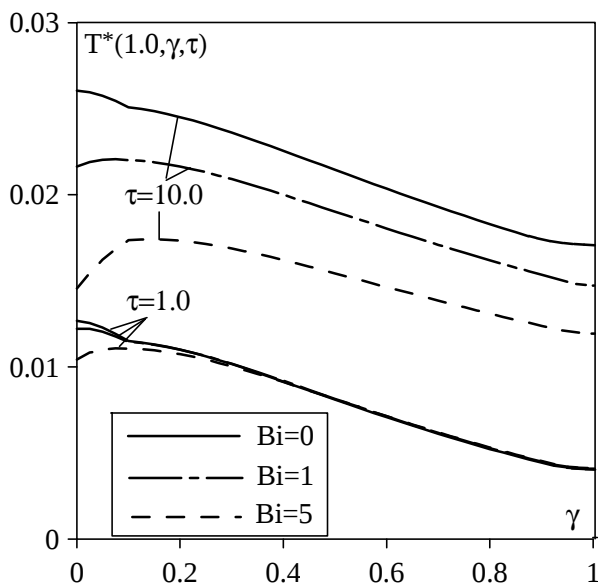


Рис. 5.6 Розподіл температури поверхні  $a = 1.0$  за змінною  $g$

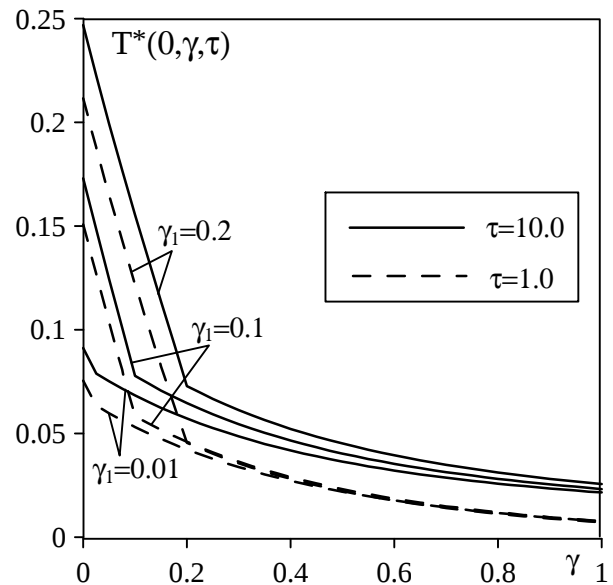


Рис. 5.7. Розподіл температури за змінною  $g$  на лінії  $a = 0$

В області  $a = 0$ , що розташована безпосередньо під центром плями нагріву (рис. 5.7) розподіл температури по змінній  $γ$  при  $Bi = 1$  дещо інший - температура покриття значно вище температури основи, різниця температур в моменти часу

$t = 1.0$  і  $t = 10.0$  не суттєва. Останнє свідчить про те, що час виходу температури на стаціонарне значення в областях під зоною нагріву значно менше, ніж в областях поза цією зоною.

З цього ж рисунка можна зробити висновки про вплив відносної товщини покриття на температуру покриття і основи вздовж лінії  $a = 0$ . Як свідчать наведені результати, найбільший вплив величина товщини покриття має на температуру областей, які розташовані безпосередньо під прямою нагріву.

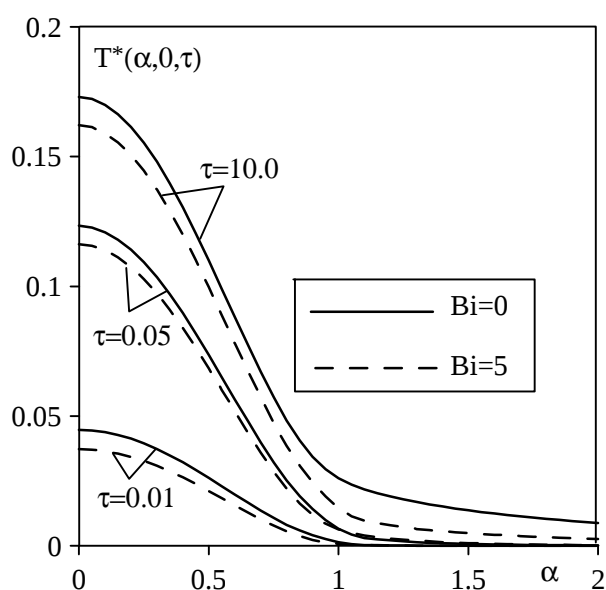


Рис. 5.8 Розподіл температури поверхні покриття в різні моменти часу

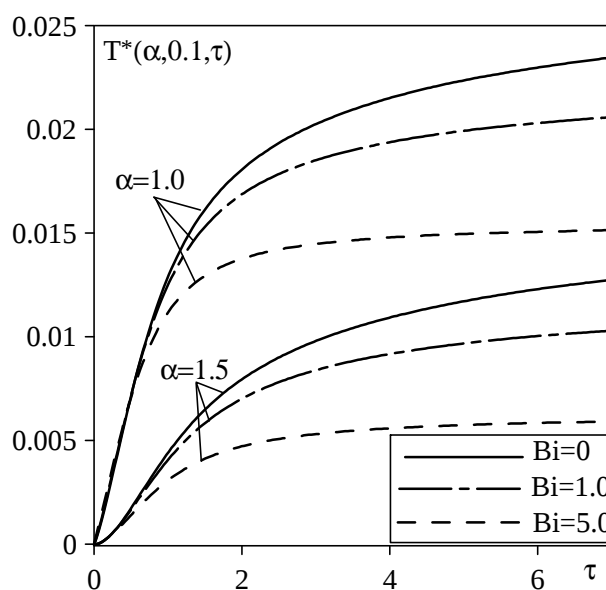


Рис. 5.9 Розподіл в часі температури точок поверхні розділу матеріалів

На рисунку 5.8 показано розподіл температури поверхні  $g = 0$  в різні моменти часу, залежно від інтенсивності охолодження. З розрахунків слідує, що вплив інтенсивності теплообміну на температуру поверхні покриття спостерігається у всіх її точках. Різниця полягає в кількісній оцінці впливу - так для точок розташованих під прямою нагріву відносно відміну результатів, отриманих для  $Bi = 0$  (теплоізоляція) і  $Bi = 5$  знаходиться в межах 10%, а для точок розташованих поза плями нагріву така відмінність досягає 70%.

Ця тенденція зберігається і на поверхні розділу матеріалів покриття і основи. Про це, зокрема, можна судити з результатів розрахунку розподілу в часі температури в різних точках поверхні  $g = g_1 = 0.1$ , поданих на рисунку 5.9. Звідси

можна також зробити висновок про вплив теплообміну на тривалість перехідного процесу - чим інтенсивніше теплообмін, тим швидше температура виходить на стаціонарне значення.

За знайденим температурним полем розраховано напруження у плиті з покриттям. При цьому напруження були знерозмірені з використанням модуля зсуву півпростору:  $\sigma_{kl}(\alpha, \gamma, \tau) = \sigma_{kl}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) / \mu_2$ . На рисунку 5.10 подано результати обчислення дотичних напружень  $\sigma_{\alpha\gamma}(\alpha, \gamma, \tau)$  на поверхні поділу матеріалів покриття та основи в момент часу  $\tau = 2$  при  $Bi = 1$  та при значеннях відносної товщини покриття  $\gamma_1 = 0.01, 0.1, 0.2, 0.5$ . Як свідчить наведене, вказані напруження набувають максимального за модулем значення поблизу лінії поділу крайових умов і зі збільшенням відносної товщини покриття зростають.

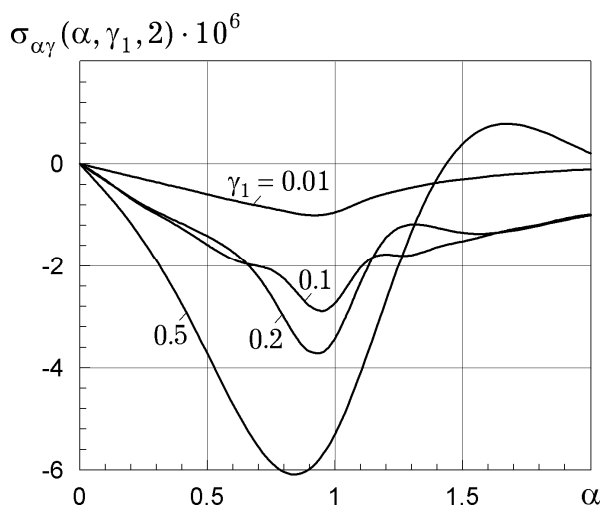


Рис. 5.10 Дотичні напруження на межі поділу матеріалів

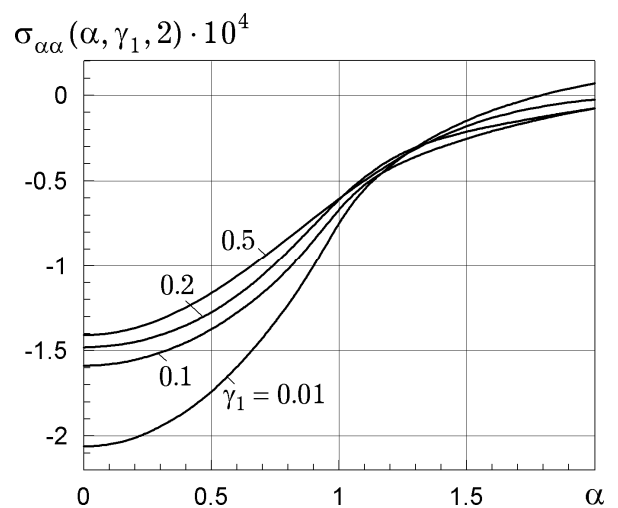


Рис. 5.11 Радіальні напруження на межі поділу матеріалів

На відміну від цих результатів, вплив зміни відносної товщини покриття на розподіл та абсолютне значення знерозмірених напружень  $\sigma_{\alpha\alpha}(\alpha, \gamma, \tau)$ , результати обчислення яких на поверхні поділу матеріалів покриття і півпростору в момент часу  $\tau = 2$  при  $Bi = 1$  зображено на рис. 5.11, є значно меншим. Ці напруження практично скрізь є стискуючими і зі зменшенням відносної товщини покриття їх абсолютне значення зростає. Крім того, ці напруження за абсолютним значенням значно перевищують дотичні.

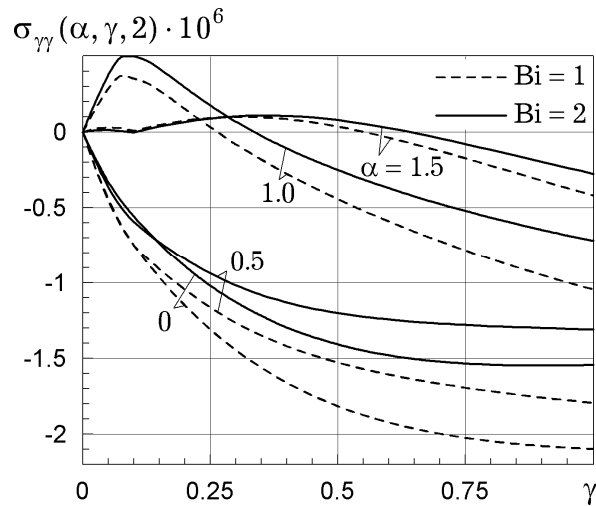


Рис. 5.12 Нормальні напруження на межі поділу матеріалів

На рисунку 5.12 подано результати розрахунку розподілу нормальних напружень  $\sigma_{\gamma\gamma}(\alpha, \gamma, \tau)$  за змінною  $\gamma$  на поверхнях  $\alpha = 0, 0.5, 1.0, 1.5$  при  $\gamma_1 = 0.1$  в момент часу  $\tau = 2$  для значень інтенсивності охолодження  $Bi = 1.0, 2.0$  поза ділянкою нагріву.

Як слідує з наведеного, рівень нормальних напружень є співрозмірним із рівнем дотичних напружень і з віддаленням від центру ділянки нагріву знижується. В областях, розміщених під областю нагріву, ці напруження скрізь є стискуючими, зменшення інтенсивності охолодження призводить у цій зоні до збільшення їх абсолютного значення. В областях поза зоною нагріву ці напруження змінюють знак, причому максимального додатного значення набувають на поверхні поділу матеріалів покриття та основи під лінією  $\alpha = 1$ . Зменшення інтенсивності охолодження ділянки поза зоною нагріву призводить до зменшення рівня нормальних напружень в цій області.

### 5.3 Змішана квазістатична задача термопружності для півбезмежної плити із двостороннім покриттям.

Розглянемо півбезмежну неоднорідну плиту, що складається з основи, товщини  $2h_2$  та нанесених на її бічні сторони однакових покриттів товщини  $h_1$  (рис. 1). З моменту часу  $t = 0$  плита миттєво занурюється на глибину  $L$  в середовище, що має сталу температуру  $T^*$ .

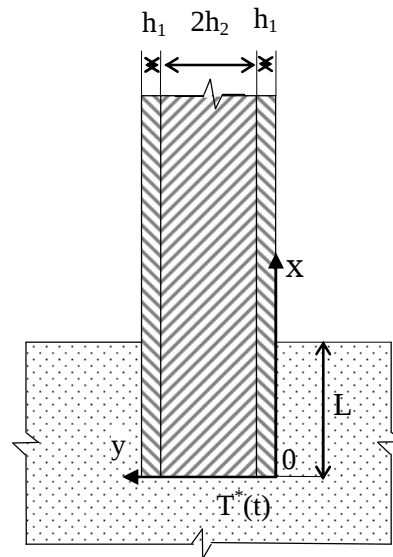


Рис. 5.13

Схема задачі

Нехтуючи процесом теплопровідності в середовищі та приповерхневими явищами в покритті та плиті, будемо вважати, що в результаті цього занурення на торцевих поверхнях плити та покриття та на частинах бічних поверхонь покриття, що мають довжину  $L$  вважається заданим часовий розподіл температури  $T^*(t)$ . Зовні цих ділянок на поверхнях покриття відбувається теплообмін за законом Ньютона із середовищем нульової температури. Вважається, що початкова температура плити та покриття рівна нулю, а на поверхнях поділу матеріалів плити та покриття виконуються умови ідеального теплового контакту.

Зважаючи на геометричну та фізичну симетрію задачі відносно осі  $y = h_1 + h_2$  задачу теплопровідності сформулюємо наступним чином:

$$\partial_{\alpha\alpha}^2 T^{(i)} + \partial_{\gamma\gamma}^2 T^{(i)} = \kappa_T^{(i)} \partial_{\tau} T^{(i)}, \quad i = 1, 2; \quad (5.61)$$

$$T^{(i)} = 0, \quad \tau = 0, \quad i = 1, 2; \quad (5.62)$$

$$T^{(i)} = T^*(\tau), \quad \alpha = 0, \quad i = 1, 2 \quad (5.63)$$

$$T^{(1)} = T^*(\tau), \quad \gamma = 0, \quad \alpha \leq 1; \quad (5.64)$$

$$\partial_{\gamma} T^{(1)} - Bi T^{(1)} = 0, \quad \gamma = 0, \quad \alpha > 1; \quad (5.65)$$

$$T^{(1)} = T^{(2)}, \quad \kappa_T^{(1)} \partial_{\gamma} T^{(1)} = \partial_{\gamma} T^{(2)}, \quad \gamma = \gamma_1; \quad (5.66)$$

$$\partial_{\gamma} T^{(2)} = 0, \quad \gamma = \gamma_2 \quad (5.67)$$

Тут  $\alpha = x/L$ ,  $\gamma = y/L$ ,  $\tau = a_T^{(2)} t / L^2$ ,  $\gamma_1 = h_1/L$ ,  $\gamma_2 = (h_1 + h_2)/L$ ,  $a_T^{(i)} = a_T^{(2)} / a_T^{(i)}$ ,  $\lambda_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)} / \lambda_T^{(2)}$ ,  $q(\alpha, \tau) = Q(\alpha, \tau) d / \lambda_T^{(1)}$ ,  $Bi = \kappa d / \lambda_T^{(1)}$ ,  $\lambda_T^{(i)}, a_T^{(i)}$  – відповідно, коефіцієнти теплопровідності та температуропровідності покриття ( $i=1$ ) та основи ( $i=2$ );  $\kappa$  - коефіцієнт тепловіддачі з поверхні покриття,  $T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$ ,  $i=1, 2$  – температурне поле в покритті та основі.

До рівняння (5.61) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра за змінною  $\tau$  та  $\sin$ -перетворення Фур'є за змінною  $\alpha$ . В результаті, враховуючи нульові початкові умови та умови на торці (5.63) одержимо трикутну послідовність звичайних диференціальних рівнянь

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - (\xi^2 + \lambda a_i) \bar{T}_n^{(i)} = \lambda a_i \sum_{k=0}^{n-1} \bar{T}_k^{(i)} - \xi T_n^*, \quad (5.68)$$

де  $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \int_0^\infty \exp(-\lambda\tau) \left[ \int_0^\infty T_n^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) \sin(\xi\alpha) d\alpha \right] L_n(\lambda\tau) d\tau$  - трансформанта за

Лагерром та Фур'є,  $T_n^* = \int_0^\infty \exp(-\lambda\tau) T^*(\tau) L_n(\lambda\tau) d\tau$ .

Аналогічно до результатів, одержаних в попередніх розділах, загальний розв'язок послідовностей (5.68) запишемо у вигляді

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \gamma) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \gamma) \right] + Q_n^{(i)}, \quad (5.69)$$

де

$$Q_n^{(i)} = \frac{\xi}{\omega_i^2} \left\{ T_n^* - \frac{\lambda a_i^{(i)}}{\omega_i^2} \sum_{k=0}^{n-1} T_k^* \left( \frac{\xi^2}{\omega_i^2} \right)^{n-1-k} \right\}, \quad (5.70)$$

а  $G_j^{(i)}(\xi, \gamma)$ ,  $W_j^{(i)}(\xi, \gamma)$  - лінійно незалежні фундаментальні розв'язки, які мають вигляд (3.25)

Невідомі  $A_n^{(1)}(\xi), B_n^{(1)}(\xi), A_n^{(2)}(\xi), B_n^{(2)}(\xi)$  знайдемо з умов (5.64)-(5.67). Розглянемо спочатку змішані умови (5.64),(5.65), які після застосування інтегрального перетворення Лагерра набудуть вигляду

$$T_n^{(1)} = T_n^*, \alpha \leq 1; \partial_\gamma T_n^{(1)} - Bi T_n^{(1)} = 0, \alpha > 1. \quad (5.71)$$

Безпосереднє застосування  $\sin$ -перетворення Фур'є до цих умов є неможливим, внаслідок їх різнорідності, тому поступимо традиційно для цього розділу - продовжимо другу умову (5.71) на всю вісь, увівши при цьому в розгляд невідому функцію  $g_n(\alpha)$ :

$$\partial_\gamma T_n^{(1)} - Bi T_n^{(1)} = \begin{cases} g_n(\alpha), & \alpha \leq 1; \\ 0, & \alpha > 1. \end{cases} \quad (5.72)$$

Умова (5.72) тепер задана на всьому проміжку зміни  $\alpha$  і є однотипною, а тому після застосування до неї  $\sin$ -перетворення Фур'є одержимо

$$\partial_\gamma \bar{T}_n^{(1)} - Bi \bar{T}_n^{(1)} = \bar{g}_n(\xi), \gamma = 0, \quad (5.73)$$

$$\text{де } \bar{g}_n(\xi) = \int_0^1 g_n(\alpha) \sin(\alpha \xi) d\alpha.$$

Застосовуючи інтегральне перетворення Лагерра та  $\sin$ -перетворення Фур'є до умов (5.66)-(5.67) одержимо

$$\bar{T}_n^{(1)} = \bar{T}_n^{(2)}, \quad \mathcal{L}_T^{(1)} \partial_\gamma \bar{T}_n^{(1)} = \partial_\gamma \bar{T}_n^{(2)}, \quad \gamma = \gamma_1; \quad (5.74)$$

$$\partial \bar{T}_n^{(2)} = 0, \gamma = \gamma_2. \quad (5.75)$$

Безпосередня підстановка розв'язків (5.69) в умови (5.73)-(5.75) після виділення в лівій частині лише невідомих з нижнім індексом  $n$  приводить до систем алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} -\omega_1 - Bi & \omega_1 - Bi & 0 & 0 \\ e^{-\omega_1 \gamma_1} & e^{\omega_1 \gamma_1} & -e^{-\omega_2 \gamma_1} & -e^{\omega_2 \gamma_1} \\ -\lambda \omega_1 e^{-\omega_1 \gamma_1} & \lambda \omega_1 e^{\omega_1 \gamma_1} & \omega_2 e^{-\omega_2 \gamma_1} & -\omega_2 e^{\omega_2 \gamma_1} \\ 0 & 0 & -\omega_2 e^{-\omega_2 \gamma_2} & \omega_2 e^{\omega_2 \gamma_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ B_n^{(1)} \\ A_n^{(2)} \\ B_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1,n} \\ c_{2,n} \\ c_{3,n} \\ c_{4,n} \end{pmatrix} \quad (5.76)$$

в яких права частина з ростом дискретної величини  $n$  поповнюється розв'язками, знайденими при її попередніх значеннях і має вигляд:

$$\begin{aligned} c_{1,n} &= \bar{g}_n(\xi) + Bi Q_n^{(1)} - \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(1)} \left( \mathcal{G}_j^{(1)}(0) - Bi G_j^{(1)}(0) \right) + B_{n-j}^{(1)} \left( \mathcal{W}_j^{(1)}(0) - Bi W_j^{(1)}(0) \right) \right]; \\ c_{2,n} &= Q_n^{(2)} - Q_n^{(1)} + \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(2)} G_j^{(2)}(\gamma_1) + B_{n-j}^{(2)} W_j^{(2)}(\gamma_1) - A_{n-j}^{(1)} G_j^{(1)}(\gamma_1) - B_{n-j}^{(1)} W_j^{(1)}(\gamma_1) \right]; \\ c_{3,n} &= \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(2)} \mathcal{G}_j^{(2)}(\gamma_1) + B_{n-j}^{(2)} \mathcal{W}_j^{(2)}(\gamma_1) - \lambda_T^{(1)} A_{n-j}^{(1)} \mathcal{G}_j^{(1)}(\gamma_1) - \lambda_T^{(1)} B_{n-j}^{(1)} \mathcal{W}_j^{(1)}(\gamma_1) \right]; \\ c_{4,n} &= - \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(2)} \mathcal{G}_j^{(2)}(\gamma_2) + B_{n-j}^{(2)} \mathcal{W}_j^{(2)}(\gamma_2) \right]. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Із використанням результатів попереднього підрозділу, одержано рекурентний розв'язок систем (5.76) у який входить невідома функція  $\bar{g}_n(\xi)$ . Для її визначення повернемось до змішаних умов (5.71). Враховуючи подання (5.73) та формули обернення  $\sin$ -перетворення Фур'є ці умови можна записати у вигляді послідовності парних інтегральних рівнянь

$$\int_0^\infty \xi^{-1} \bar{g}_n(\xi) [1 + f(\xi)] \sin(\xi \alpha) d\xi = -\frac{\pi}{2} T_n^* + \int_0^\infty F_n(\xi) \sin(\xi \alpha) d\xi, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (5.78)$$

$$\int_0^\infty \bar{g}_n(\xi) \sin(\xi \alpha) d\xi = 0, \quad \alpha > 1, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K}, \quad (5.79)$$

де  $\bar{g}_n(\xi)$  - шукана функція,  $f(\xi)$  та  $F_n(\xi)$  - відомі.

Для побудови розв'язку послідовностей парних інтегральних рівнянь (5.78), (5.79) скористаємось описаною в другому розділі методикою та подамо шукану функцію  $\bar{g}_n(\xi)$  у вигляді ряду Неймана

$$\bar{g}_n(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} J_{2k+1}(\xi). \quad (5.80)$$

Як і раніше, безпосередньою підстановкою легко пересвідчитись, що рівняння (5.79) задовольняється тотожно при довільних коефіцієнтах  $a_{n,k}$ , а з рівняння (5.78) одержуємо послідовності безмежних систем лінійних алгебричних рівнянь

$$a_{n,k} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} b_{m,k} = c_{n,k} \quad (5.81)$$

де

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= a_{n,k} (2k+1)^{-1/2}; \\ b_{m,k} &= 2\sqrt{2m+1}\sqrt{2k+1} \int_0^{\infty} \frac{f(\xi)}{\xi} J_{2m+1}(\xi) J_{2k+1}(\xi) d\xi \\ c_{n,k} &= 2\sqrt{2k+1} \int_0^{\infty} \left[ -\frac{\bar{T}_n^*(\xi)}{\sqrt{\xi}} + \frac{F_n(\xi)}{\xi} \right] J_{2k+1}(\xi) d\xi; \quad \bar{T}_n^*(\xi) = T_n^* \frac{1 - \cos \xi}{\xi}. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Використовуючи вигляд функцій  $f(\xi)$  та  $F_n(\xi)$ , властивості рядів Неймана та розривних інтегралів Вебера-Шафхейтліна та теорему з другого розділу можна встановити, що

$$\sum_{m,k=0}^{\infty} (b_{m,k})^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} (c_{n,k})^2 < \infty. \quad (5.83)$$

Знаходження невідомих  $a_{n,k}$  з систем (5.83) завершує побудову розв'язку вихідної задачі теплопровідності. При цьому температурне поле в покритті та

плиті розраховується за формулою

$$T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda\tau) \int_0^{\infty} \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \sin(\xi\alpha) d\xi \quad (5.84)$$

При розрахунку інтегралів в розв'язку (5.84) для малих  $\alpha$  виникають труднощі обчислювального характеру, пов'язані із нерівномірною збіжністю інтегралів виду

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos \xi}{\xi} \sin(\xi\alpha) d\xi = \frac{\pi}{2} S_+(1 - \alpha) \quad (5.85)$$

де  $S_+(x)$  - функція Хевісайда.

Для усунення цієї проблеми частина розв'язку, пов'язана із інтегралами (5.85) виділяється, а сам розв'язок подається у вигляді

$$T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = T^*(\tau) S_+(1 - \alpha) + \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(\lambda\tau) \int_0^{\infty} \left[ T_n^{(i)}(\xi, \gamma) - T_n^* \frac{1 - \cos \xi}{\xi} \right] d\xi. \quad (5.86)$$

Як свідчать подальші числові експерименти, таке подання значно покращує практичну збіжність інтегралів, особливо на границі покриття  $\gamma = 0$  та при малих значеннях  $\alpha$ .

Перед тим, як сформулювати задачу термопружності, або, точніше, умови навантаження на бічній поверхні плити та покрить, як і в третьому розділі слід зробити певні пояснення. По-перше, з рівняння, якому задовольняє об'ємне розширення  $\theta^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \text{div } \mathbf{U}^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, 3$ :

$$\Delta \theta^{(i)} = \alpha_T^{(i)} (3 - 4\kappa_i^{-2}) \Delta T^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad (5.87)$$

знову ж таки слідує, що об'ємне розширення  $\theta^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$  та температура  $T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$  повинні мати однотипне подання інтегралом Фур'є за змінною  $\alpha$ . Для

температури  $T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$  таке подання визначається крайовими умовами задачі теплопровідності на поверхні  $\alpha = 0$  і у нашому випадку має вигляд

$$T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \bar{T}^{(i)}(\xi, \gamma, \tau) \sin(\xi\alpha) d\xi, \quad \bar{T}^{(i)}(\xi, \gamma, \tau) = \int_0^\infty T^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) \sin(\xi\alpha) d\alpha.$$

Для того, щоб таким же чином здійснити подання для об'ємного розширення повинна виконуватись умова

$$\theta^{(i)} \Big|_{\alpha=0} = \theta_0(\tau). \quad (5.88)$$

Аналогічно з рівняння термодинамічної рівноваги відносно компоненти вектора пружного переміщення  $u^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$ :

$$\Delta u^{(i)} = (1 - \kappa_i^2) \partial_\alpha \theta^{(i)} + \alpha_T^{(i)} (3\kappa_i^2 - 4) \partial_\alpha T^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5.89)$$

можна одержати

$$\partial_\alpha u^{(i)} \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.90)$$

З означення об'ємного розширення та умов (5.88), (5.90) знайдемо, що

$$\partial_\gamma w^{(i)} \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.91)$$

Далі, враховуючи, що з міркувань симетрії  $w^{(i)} \Big|_{\alpha=\gamma=0} = 0$ , одержимо, що при  $\alpha = 0$  повинні виконуватись умови

$$\theta^{(i)} \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad w^{(i)} \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.92)$$

Нескладно показати, що умови (5.92) та (5.90) на поверхні  $\alpha = 0$  приводять до умови відсутності нормальних напружень:

$$\sigma_{\alpha\alpha}^{(i)} \Big|_{\alpha=0} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.93)$$

що поряд з другою умовою (5.92) можна трактувати, як наявність на поверхні  $\alpha=0$  абсолютно гнучкої і нерозтягливої мембрани.

Задля виконання умови симетрії покладемо, що граничні поверхні покриті є вільними від зовнішнього навантаження, зокрема:

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}(\alpha, 1, \tau) = 0, \quad \sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}(\alpha, 1, \tau) = 0, \quad (5.94)$$

що призведе до можливості розгляду задачі лише в області  $0 \leq \gamma \leq 1$  та умов при  $\gamma = 0$

$$w^{(2)}(\alpha, 0, \tau) = 0, \quad \sigma_{\alpha\gamma}^{(2)}(\alpha, 0, \tau) = 0. \quad (5.95)$$

Таким чином, задача полягає у визначенні розв'язку двох рівнянь Пуассона: (5.88) та

$$\Delta w^{(i)} = (1 - \kappa_i^2) \partial_\gamma \theta^{(i)} + \alpha_T^{(i)} (3\kappa_i^2 - 4) \partial_\gamma T^{(i)}, \quad i = 1, 2 \quad (5.96)$$

в області  $0 \leq \alpha < \infty$ ;  $0 \leq \gamma \leq 1$  при граничних умовах (5.92), (5.94), (5.95) та умовах спряження

$$w^{(1)}(\alpha, \gamma_1, \tau) = w^{(2)}(\alpha, \gamma_1, \tau), \quad u^{(1)}(\alpha, \gamma_1, \tau) = u^{(2)}(\alpha, \gamma_1, \tau); \quad (5.97)$$

$$\sigma_{\gamma\gamma}^{(1)}(\alpha, \gamma_1, \tau) = \sigma_{\gamma\gamma}^{(2)}(\alpha, \gamma_1, \tau), \quad \sigma_{\alpha\gamma}^{(1)}(\alpha, \gamma_1, \tau) = \sigma_{\alpha\gamma}^{(2)}(\alpha, \gamma_1, \tau). \quad (5.98)$$

Рівняння (5.88), (5.96) та умови (5.94), (5.95) та (5.97)-(5.98) після застосування до них інтегральних перетворень Лагерра за змінною  $\tau$  та  $\sin$ -перетворення Фур'є за змінною  $\alpha$  та урахування умов (5.92) набудуть вигляду

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{\theta}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{\theta}_n^{(i)} = \alpha_T^{(i)} (3 - 4\kappa_i^2) \left[ d_{\gamma\gamma}^2 \bar{T}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{T}_n^{(i)} + \xi T_n^* \right], \quad i = 1, 2; \quad (5.99)$$

$$d_{\gamma\gamma}^2 \bar{w}_n^{(i)} - \xi^2 \bar{w}_n^{(i)} = (1 - \kappa_i^2) d_\gamma \bar{\theta}_n^{(i)} + \alpha_T^{(i)} (3\kappa_i^2 - 4) d_\gamma \bar{T}_n^{(i)}, \quad i = 1, 2; \quad (5.100)$$

$$\bar{\sigma}_{\gamma\gamma,n}^{(1)}(\xi, 1) = 0; \bar{\sigma}_{\alpha\gamma,n}^{(1)}(\xi, 1) = 0; \bar{w}_n^{(2)}(\xi, 0) = 0; \bar{\sigma}_{\alpha\gamma,n}^{(2)}(\xi, 0) = 0; \quad (5.101)$$

$$\bar{w}_n^{(1)}(\xi, \gamma_1) = \bar{w}_n^{(2)}(\xi, \gamma_1); \bar{u}_n^{(1)}(\xi, \gamma_1) = \bar{u}_n^{(2)}(\xi, \gamma_1); \quad (5.102)$$

$$\bar{\sigma}_{\gamma\gamma,n}^{(1)}(\xi, \gamma_1) = \bar{\sigma}_{\gamma\gamma,n}^{(2)}(\xi, \gamma_1); \bar{\sigma}_{\alpha\gamma,n}^{(1)}(\xi, \gamma_1) = \bar{\sigma}_{\alpha\gamma,n}^{(2)}(\xi, \gamma_1). \quad (5.103)$$

Рівняння (5.99), (5.100) містять дискретну змінну  $n$  як параметр, а тому їх розв'язок можна записати у вигляді

$$\bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = C_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) + D_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma) + \alpha_T^{(i)} \left( 3 - \frac{4}{\kappa_i^2} \right) \left( \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - \frac{1}{\xi} T_n^* \right), \quad (5.104)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = & F_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) + H_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma) + \\ & + \frac{\gamma}{2} (1 - \kappa_i^2) \left[ C_n^{(i)}(\xi) \exp(-\xi\gamma) + D_n^{(i)}(\xi) \exp(\xi\gamma) \right] + \frac{\alpha_T^{(i)}}{\beta_i} \left( 3 - 4\kappa_i^{-2} \right) d_\gamma \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma), \end{aligned} \quad (5.105)$$

де  $\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - \bar{T}_{n-1}^{(i)}(\xi, \gamma)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $\bar{T}_0^{(i)}(\xi, \gamma) = \bar{T}_0^{(i)}(\xi, \gamma)$ .

Набір сталих  $C_n^{(i)}, D_n^{(i)}, F_n^{(i)}, H_n^{(i)}$  визначається із крайових умов та умов спряження (3.138)-(3.140). Безпосередня підстановка розв'язків (3.141), (3.142) в ці умови приводить до систем алгебричних рівнянь

$$\left[ d_{k,l} \right] \left\{ C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, F_n^{(1)}, H_n^{(1)}, C_n^{(2)}, D_n^{(2)}, F_n^{(2)}, H_n^{(2)} \right\}^T = \left\{ f_{n,k} \right\} \quad (5.106)$$

де ненульові коефіцієнти матриці  $\left[ d_{k,l} \right]$  містять комбінації експоненціальних функцій та фізико-механічних характеристик покриття та основи, а стовпець вільних членів - знайдені в попередній частині розділу трансформанти температур та теплових потоків.

Системи (3.143) стандартною процедурою Гаусса зводяться до трикутного виду, звідки визначаються всі невідомі  $C_n^{(i)}, D_n^{(i)}, F_n^{(i)}, H_n^{(i)}$ .

Остаточний розв'язок задачі термопружності подається у вигляді

$$\theta^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \sin(\xi \alpha) d\xi \right] L_n(\lambda \tau); \quad (3.144)$$

$$w^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \sin(\xi \alpha) d\xi \right] L_n(\lambda \tau). \quad (3.145)$$

Компонента вектора пружного переміщення  $u^{(i)}(\rho, \gamma, \tau)$  визначається співвідношенням

$$u^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = -\lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} \xi^{-1} \left[ \bar{\theta}_n^{(i)}(\xi, \gamma) - d_\gamma \bar{w}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \right] \cos(\xi \alpha) d\xi \right] L_n(\lambda \tau), \quad (3.146)$$

а ненульові компоненти тензора напружень – за співвідношеннями Дюамеля-Неймана

$$\begin{aligned} \sigma_{\gamma\gamma}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \frac{2\lambda\mu_i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \left[ \left( \kappa_i^2 - 2 \right) \bar{\theta}_n^{(i)} + 2d_\gamma \bar{w}_n^{(i)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha_T^{(i)} \left( 3\kappa_i^2 - 4 \right) \bar{T}_n^{(i)} \right] \cos(\xi \alpha) d\xi \right\} L_n(\lambda \tau) \end{aligned} \quad (3.147)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\gamma}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \frac{2\lambda\mu_i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \xi^{-1} \left[ \kappa_i^2 d_\gamma \bar{\theta}_n^{(i)} - 2\xi^2 \bar{w}_n^{(i)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha_T^{(i)} \left( 3\kappa_i^2 - 4 \right) d_\gamma \bar{T}_n^{(i)} \right] \sin(\xi \alpha) d\xi \right\} L_n(\lambda \tau) \end{aligned} \quad (3.148)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\alpha}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \frac{2\lambda\mu_i}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} \left[ \kappa_i^2 \bar{\theta}_n^{(i)} - 2d_\gamma \bar{w}_n^{(i)} - \right. \right. \\ \left. \left. - \alpha_T^{(i)} \left( 3\kappa_i^2 - 4 \right) \bar{T}_n^{(i)} \right] \cos(\xi \alpha) d\xi \right\} L_n(\lambda \tau) \end{aligned} \quad (3.149)$$

Числовий розрахунок температурного поля в плиті, виготовленій із алюмінієвого сплаву, з покриттям із кераміки ( $a_T^{(1)} = 1.19 \times 10^{-7} \text{ м/сек}^2$ ;  $\lambda_T^{(1)} = 36 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ )  $a_T^{(2)} = 9.06 \times 10^{-7} \text{ м/сек}^2$ ;  $\lambda_T^{(2)} = 2.22 \times 10^2 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$ ) проведено у випадку, коли температура частини поверхні покриття та торця плити

задається співвідношенням  $T^*(\tau) = (1 - \exp(-\tau_0 \tau))q^*$ , де  $q^*$  – величина, що має розмірність температури.

Було прийнято, крім того, що півтовщина плити з покриттям рівна глибині занурення композитного тіла ( $h_1 + h_2 = L$ ), а відносна товщина покриття  $\gamma_1 = 0.1$ .

На рисунку 5.14 подано результати розрахунку температурного поля на поверхні покриття в момент часу  $\tau = 2$ , проведеного за формулою (5.84) (рисунок а) та б)) та формулою (5.86) (рисунок в)). Різниця в результатах, зображених на перших двох рисунках в тому, що для рисунка а) розрахунок інтегралу проводився за стандартними, розробленими для практично всіх розділів роботи квадратурними формулами, які дають високу збіжність і хорошу точність у випадку інтегралів із рівномірною збіжністю. Для розрахунків, зображених на рисунку б) була створена спеціальна квадратурна формула, яка використовувалась для обчислення як інтегралів (5.82), так і інтегралів (5.84), проте повністю позбавитись похибок, пов'язаних із ефектом Гібса так і не вдалося. І лише використання формул (5.84) та звиклої процедури інтегрування дозволило задовольнити крайові умови з точністю до 0.1%.

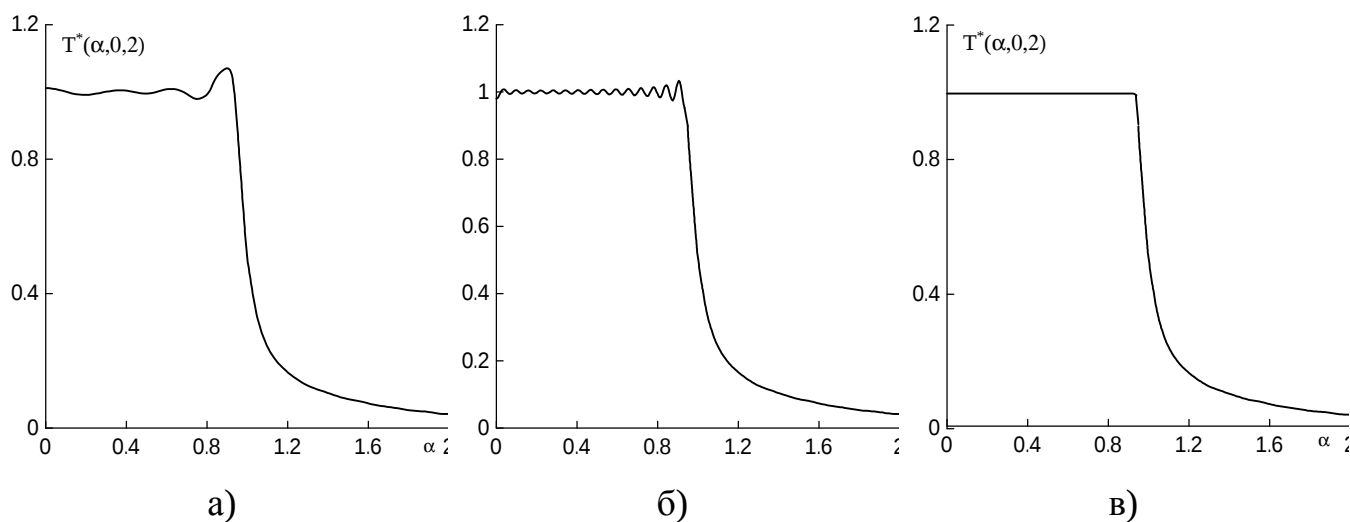


Рис. 5.14 Температурне поле поверхні покриття

## Висновки до розділу 5

- розроблено методику побудови аналітичних розв'язків плоскої та осесиметричної задач нестационарної теплопровідності для тіл з плоскопаралельними покриттями за змішаних умов нагрівання (охолодження) в довільній комбінації;
- досліджено перехідні термонапружені стани в шарі та півпросторі із покриттям за змішаних умов нагрівання 1-3-го та 2-3-го роду;
- виявлено, що найнебезпечнішими стосовно можливого руйнування ділянками є області, розташовані поблизу лінії поділу крайових умов;
- одержано розв'язок змішаної квазістатичної задачі термопружності для півбезмежної плити із двостороннім покриттям та проведено регуляризацию процедури числового обернення інтегрального перетворення Фур'є.

## РОЗДІЛ 6

### ДИНАМІЧНІ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ З ПЛОСКО-ПАРАЛЕЛЬНИМИ ГРАНИЦЯМИ РОЗДІЛУ

#### 6.1. Динамічна задача теорії пружності для прямокутної пластинки

Як зазначалось в першому розділі точних розв'язків просторових задач теорії пружності в динамічному формулювання є дуже мало. Одним із об'єктів для якого вдається одержати замкнутий розв'язок є прямокутна пластинка, на двох протилежних границях якої задано специфічні умови силового навантаження. На прикладі цієї задачі продемонструємо особливості застосування методу поліномів Лагерра до динамічних задач для скінченних тіл в плоскому випадку.

Розглянемо прямокутну пластинку розміром  $2h \times 2l$  по  $x_1$  та  $y_1$ , відповідно, де  $x_1$  та  $y_1$  – декартові координати. З моменту часу  $t = 0$  пластинку навантажено нормальними зусиллями  $p(t)$ , прикладеними до її торців  $x_1 = \pm l$ , які нерухомо закріплені в напрямі осі  $y_1$ . Граничні поверхні  $y_1 = \pm h$  залишаються вільними від навантаження. Введемо у розгляд безрозмірні змінні та величини  $x = x_1 / l$ ,  $y = y_1 / l$ ,  $\tau = c_1 t / l$ ,  $x_0 = h / l$ ,  $\kappa^2 = c_1 / c_2 = (\lambda + 2\mu) / \mu$ , де  $c_1$ ,  $c_2$  – швидкості поширення поздовжніх і поперечних хвиль у матеріалі пластинки,  $\lambda$ ,  $\mu$  – пружні сталі.

У термінах цих змінних, вважаючи, що до моменту часу  $t = 0$  пластинка перебувала в стані спокою, задачу сформулюємо так:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tau^2}; \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial \tau^2} - (\kappa^2 - 1) \frac{\partial \theta}{\partial y}; \quad (6.2)$$

$$\theta = \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = 0, \quad u_y = \frac{\partial u_y}{\partial \tau} = 0, \quad \tau = 0; \quad (6.3)$$

$$u_y(\pm 1, y, \tau) = 0; \quad \sigma_{xx}(\pm 1, y, \tau) = \pm p(\tau); \quad (6.4)$$

$$\sigma_{xx}(x, \pm y_0, \tau) = 0; \quad \sigma_{xy}(x, \pm y_0, \tau) = 0, \quad (6.5)$$

де, як і раніше  $\theta(x, y, \tau) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}$  – об’ємне розширення;  $u_x(x, y, \tau)$ ,  $u_y(x, y, \tau)$  – компоненти вектора пружного переміщення;  $\sigma_{ij}(x, y, \tau)$ ,  $\epsilon_{ij}(x, y, \tau)$  – відмінні від нуля компоненти тензора напруження та тензора деформацій.

З умов (6.4), враховуючи, що  $\theta(\pm 1, y, \tau) = \frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{x=\pm 1}$ , одержимо

$$\mu^{-1} \sigma_{xx}(\pm 1, y, \tau) = \kappa^2 \theta(\pm 1, y, \tau). \quad (6.6)$$

Знайдемо розв’язок сформульованої задачі спочатку із використанням інтегрального перетворення Лапласа. Для цього застосуємо до рівняння (6.1) інтегральне перетворення Лапласа за часовою змінною  $\tau$  та скінчене перетворення Фур’є за змінною  $x$ . Враховуючи симетрію задачі, нульові початкові умови (6.3), співвідношення (6.6) та умови (6.4), замість рівняння (6.1), одержимо

$$\frac{d^2 \bar{\theta}_n}{dy^2} - (\xi_n^2 + s^2) \bar{\theta}_n = (-1)^{n+1} \frac{2\xi_n}{\kappa \mu} \bar{p}(s), \quad (6.7)$$

де  $\bar{\theta}_n(y, s) = \int_{-1}^1 \cos(\xi_n x) \int_0^\infty \theta(x, y, \tau) \exp(-s\tau) d\tau dx$  – зображення за Лапласом і Фур’є,

$$\xi_n = \pi(2n+1)/2, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K}.$$

Трансформоване рівняння (6.2), відповідно, набуде вигляду

$$\frac{d^2 \bar{v}_n}{dy^2} - (\xi_n^2 + \kappa^2 s^2) \bar{v}_n = (1 - \kappa^2) \frac{d \bar{\theta}_n}{dy}, \quad (6.8)$$

$$\text{де } \bar{v}_n(y, s) = \int_{-1}^1 \cos(\xi_n x) \int_0^\infty u_y(x, y, \tau) \exp(-s\tau) d\tau dx.$$

Розв'язок рівняння (6.7), враховуючи, що  $\bar{\theta}_n(y, s)$  є парною функцією змінної  $y$ , подамо у вигляді

$$\bar{\theta}_n(y, s) = A_n(s) \operatorname{ch}(\gamma_1 y) + \frac{(-1)^n 2 \xi_n \bar{p}(s)}{\mu \kappa^2 \gamma_1^2} \quad (6.9)$$

$$\text{при } \gamma_1 = \sqrt{\xi_n^2 + s^2}.$$

З урахуванням (6.9) розв'язок рівняння (6.8) одержимо у вигляді

$$\bar{v}_n(y, s) = B_n(s) \operatorname{sh}(\gamma_2 y) + \frac{\gamma_1}{s^2} A_n(s) \operatorname{sh}(\gamma_1 y) \quad (6.10)$$

$$\text{при } \gamma_2 = \sqrt{\xi_n^2 + \kappa^2 s^2}.$$

Іншу компоненту вектора пружного переміщення

$$\bar{u}_n(y, s) = \int_{-1}^1 \sin(\xi_n x) \int_0^\infty u_x(x, y, \tau) \exp(-s\tau) d\tau dx \quad (6.11)$$

знайдемо, враховуючи співвідношення  $\bar{u}_n = \frac{1}{\xi_n} \left( \bar{\theta}_n - \frac{d\bar{v}_n}{dy} \right)$  у вигляді

$$\bar{u}_n(y, s) = -B_n(s) \xi_n^{-1} \gamma_2 \operatorname{ch}(\gamma_2 y) - \frac{\xi_n}{s^2} A_n(s) \operatorname{ch}(\gamma_1 y) + \frac{(-1)^n 2 \bar{p}(s)}{\mu \kappa^2 \gamma_1^2}. \quad (6.12)$$

Величини  $A_n(s)$  і  $B_n(s)$  знайдемо з крайових умов (6.5), які в трансформантах за Лапласом і Фур'є та в термінах знайдених вище виразів набудуть вигляду

$$(\kappa^2 - 2) \bar{\theta}_n + 2 \frac{d\bar{u}_n}{dy} = 0, \quad \frac{d\bar{u}_n}{dy} - \xi_n \bar{v}_n = 0, \quad y = \pm y_0. \quad (6.13)$$

Враховуючи вирази (6.10)-(6.12), з умов (6.13) знайдемо

$$A_n(s) = \frac{s^2(\xi_n^2 + \gamma_2^2) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \bar{p}_n(s)}{\gamma_1^2 \Delta(\xi, s)}, \quad B_n(s) = \frac{-2\xi_n^2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \bar{p}_n(s)}{\gamma_1 \Delta(\xi, s)}. \quad (6.14)$$

$$\text{Тут } \bar{p}_n(s) = \frac{(-1)^n 2\xi_n(\kappa^2 - 2) \bar{p}(s)}{\mu \kappa^2},$$

$$\Delta(\xi, s) = 4\xi_n^2 \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y_0) - (\xi_n^2 + \gamma_2^2)^2 \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0).$$

За відомими  $A_n(s)$  і  $B_n(s)$  одержимо

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(y, s) &= \left( \frac{1}{(\kappa^2 - 2)\xi_n} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\xi_n}{\Delta} \left[ 2\gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y) - (\xi_n^2 + \gamma_2^2) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_1 y) \right] \right) \frac{\bar{p}_n}{\gamma_1^2}; \\ \bar{v}_n(y, s) &= \gamma_1^{-1} \Delta^{-1} \left[ (\xi_n^2 + \gamma_2^2) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_1 y) - 2\xi_n^2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y) \right] \bar{p}_n \end{aligned} \quad (6.15)$$

Обернення за Лапласом проведемо із використанням теореми розвинення. Остаточно для довільної функції навантаження  $p(\tau)$  отримаємо

$$\begin{aligned} u_x(x, y, \tau) &= \frac{4p^*}{\mu} \left( 1 - \frac{2}{\kappa^2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi_n^2 \sin(\xi_n x) \times \\ &\times \left\{ \sum_{k=1}^{k_1} \frac{2\gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y) - (2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,1}^2) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_1 y)}{\gamma_1^2 \Delta_1(n, k)} f(\eta_{n,k,1}, \tau) + \right. \\ &+ \sum_{k=1}^{k_2} \frac{2\gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \cos(\gamma_2 y) - (2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,2}^2) \sin(\gamma_2 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_1 y)}{\gamma_1^2 \Delta_2(n, k)} f(\eta_{n,k,2}, \tau) + \\ &\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\gamma_1 \gamma_2 \sin(\gamma_1 y_0) \cos(\gamma_2 y) + (2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,3}^2) \sin(\gamma_2 y_0) \cos(\gamma_1 y)}{\gamma_1^2 \Delta_3(n, k)} f(\eta_{n,k,3}, \tau) \right\}; \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned}
u_y(x, y, \tau) = & \frac{4p^*}{\mu} \left(1 - \frac{2}{\kappa^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \xi_n \times \\
& \times \left\{ \sum_{k=1}^{k_1} \frac{(2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,1}^2) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_1 y) - 2\xi_n^2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y)}{\gamma_1 \Delta_1(n, k)} f(\eta_{n,k,1}, \tau) + \right. \\
& + \sum_{k=1}^{k_2} \frac{(2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,2}^2) \sin(\gamma_2 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_1 y) - 2\xi_n^2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \sin(\gamma_2 y)}{\gamma_1 \Delta_2(n, k)} f(\eta_{n,k,2}, \tau) + \\
& \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\xi_n^2 - \kappa^2 \eta_{n,k,3}^2) \sin(\gamma_2 y_0) \sin(\gamma_1 y) - 2\xi_n^2 \sin(\gamma_1 y_0) \sin(\gamma_2 y)}{\gamma_1 \Delta_3(n, k)} f(\eta_{n,k,3}, \tau) \right\} \cos(\xi_n x).
\end{aligned}$$

Тут  $\eta_{n,k,1}$ ,  $\eta_{n,k,2}$ ,  $\eta_{n,k,3}$  – відповідно, додатні корені рівнянь

$$4\xi_n^2 \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y_0) - (\xi_n^2 + \gamma_2^2)^2 \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) = 0 \quad (6.17)$$

при  $\gamma_1 = \sqrt{\xi_n^2 - \eta^2}$ ,  $\gamma_2 = \sqrt{\xi_n^2 - \kappa^2 \eta^2}$ ,  $0 \leq |\eta| \leq \kappa^{-1} \xi_n$ ;

$$4\xi_n^2 \gamma_1 \gamma_2 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \cos(\gamma_2 y_0) - (\xi_n^2 + \gamma_2^2)^2 \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \sin(\gamma_2 y_0) = 0 \quad (6.18)$$

при  $\gamma_2 = \sqrt{\kappa^2 \eta^2 - \xi_n^2}$ ,  $\kappa^{-1} \xi_n < |\eta| \leq \xi_n$ ;

$$4\xi_n^2 \gamma_1 \gamma_2 \sin(\gamma_1 y_0) \cos(\gamma_2 y_0) + (\xi_n^2 + \gamma_2^2)^2 \cos(\gamma_1 y_0) \sin(\gamma_2 y_0) = 0, \quad (6.19)$$

при  $\gamma_1 = \sqrt{\eta^2 - \xi_n^2}$ ,  $|\eta| > \xi_n$ ;

$$\begin{aligned}
\Delta_1(n, k) \equiv \frac{d\Delta}{ds} \Big|_{s=\pm \eta_{n,k,1}} &= \pm i \eta_{n,k,1} \times \\
&\times \left\{ 4\xi_n^2 \left[ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y_0) + \frac{\kappa^2 \gamma_1}{\gamma_2} \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y_0) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +x_0\gamma_2 \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y_0) + \kappa^2 y_0 \gamma_1 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) \Big] - \\
& -4\kappa^2 (\xi_n^2 + \gamma_2^2) \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) - \\
& -(\xi_n^2 + \gamma_2^2)^2 y_0 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \operatorname{sh}(\gamma_2 y_0) / \gamma_1 - (\xi_n^2 + \gamma_2^2)^2 \frac{\kappa^2 y_0}{\gamma_2} \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \operatorname{ch}(\gamma_2 y_0) \Big\}; \\
\Delta_2(n, k) & \equiv \frac{d\Delta}{ds} \Big|_{s=\pm\eta_{n,k,2}} = m\eta_{n,k,2} \left\{ 4\xi_n^2 \left[ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \cos(\gamma_2 y_0) - \right. \right. \\
& - \frac{\kappa^2 \gamma_1}{\gamma_2} \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \cos(\gamma_2 y_0) + x_0 \gamma_2 \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \cos(\gamma_2 y_0) + \kappa^2 y_0 \gamma_1 \times \\
& \times \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \sin(\gamma_2 y_0) \Big] - 4\kappa^2 (\xi_n^2 - \gamma_2^2) \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \sin(\gamma_2 y_0) - \\
& -(\xi_n^2 - \gamma_2^2)^2 y_0 \operatorname{sh}(\gamma_1 y_0) \sin(\gamma_2 y_0) / \gamma_1 + (\xi_n^2 - \gamma_2^2)^2 \frac{\kappa^2 y_0}{\gamma_2} \operatorname{ch}(\gamma_1 y_0) \cos(\gamma_2 y_0) \Big\}; \\
\Delta_3(n, k) & \equiv \frac{d\Delta}{ds} \Big|_{s=\pm\eta_{n,k,3}} = m\eta_{n,k,3} \left\{ 4\xi_n^2 \left[ \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \sin(\gamma_1 y_0) \cos(\gamma_2 y_0) + \right. \right. \\
& + \frac{\kappa^2 \gamma_1}{\gamma_2} \sin(\gamma_1 y_0) \cos(\gamma_2 y_0) + y_0 \gamma_2 \cos(\gamma_1 y_0) \cos(\gamma_2 y_0) - \kappa^2 y_0 \gamma_1 \sin(\gamma_1 y_0) \times \\
& \times \sin(\gamma_2 y_0) \Big] - 4\kappa^2 (\xi_n^2 - \gamma_2^2) \cos(\gamma_1 y_0) \sin(\gamma_2 y_0) - (\xi_n^2 - \gamma_2^2)^2 \frac{y_0}{\gamma_1} \sin(\gamma_1 y_0) \sin(\gamma_2 y_0) + \\
& + (\xi_n^2 - \gamma_2^2)^2 \frac{\kappa^2 y_0}{\gamma_2} \cos(\gamma_1 y_0) \cos(\gamma_2 y_0) \Big\}.
\end{aligned}$$

Функції  $f(\eta, \tau)$  обчислюють з використанням інтегральної згортки

$$f(\eta, \tau) = \int_0^\tau p(\tau - t) \sin(\eta t) dt. \quad (6.20)$$

Формули (6.16) дають точний замкнутий розв'язок динамічної задачі теорії пружності для прямокутної пластини за довільної залежності зовнішнього навантаження від часу. За одержаними компонентами вектора переміщення (6.16)

компоненти тензора деформацій і тензора напружень обчислюють за формулами (6.6).

Знайдемо тепер розв'язок задачі (6.1)-(6.7) із використанням інтегрального перетворення Лагерра поряд із скінченним перетворенням Фур'є. Після вже традиційних перетворень прийдемо до послідовності задач

$$\frac{d^2 \bar{\theta}_{m,n}}{dy^2} - (\xi_n^2 + \lambda^2) \bar{\theta}_{m,n} = \lambda^2 \sum_{k=0}^{m-1} (m-k+1) \bar{\theta}_{k,n} + (-1)^{n+1} \frac{2\xi_n}{\kappa\mu} \bar{p}_m; \quad (6.21)$$

$$\frac{d^2 \bar{v}_{m,n}}{dy^2} - (\xi_n^2 + \kappa^2 \lambda^2) \bar{v}_{m,n} = \lambda^2 \kappa^2 \sum_{k=0}^{m-1} (m-k+1) \bar{v}_{k,n} + (1 - \kappa^2) \frac{d \bar{\theta}_{m,n}}{dy}, \quad (6.22)$$

де  $\bar{\theta}_{m,n}(y) = \int_{-1}^1 \cos(\xi_n x) \int_0^\infty L_m(\lambda \tau) \theta(x, y, \tau) \exp(-\lambda \tau) d\tau dx$  – зображення за Лагерром і

Фур'є,  $\xi_n = \pi(2n+1)/2$ ,  $n = 0, 1, 2, \mathbf{K}$ .

Загальний розв'язок "однорідного" рівняння (6.21) згідно із результатами другого розділу роботи подамо у вигляді

$$\bar{\theta}_{m,n}(y) = \sum_{j=0}^m \left[ A_{m-j,n} G_{j,n}(y) + B_{m-j,n} W_{j,n}(y) \right], \quad (6.23)$$

де  $A_{j,n}$  і  $B_{j,n}$  – набір сталих, а

$$\begin{aligned} G_{j,n}(\omega_1 y) &= \exp(-\omega_{1,n} y) \sum_{k=0}^j a_{j,k,n}^1 \frac{(\omega_{1,n} y)^k}{k!}; \\ W_{j,n}(\omega_1 y) &= \exp(\omega_{1,n} y) \sum_{k=0}^j a_{j,k,n}^1 \frac{(-\omega_{1,n} y)^k}{k!} \end{aligned} \quad (6.24)$$

при  $\omega_{1,n} = \sqrt{\xi_n^2 + \lambda^2}$  і  $a_{j,k,n}^1$ , що задовольняють рекурентним співвідношенням

$$a_{j,k+1,n}^1 = \frac{\lambda}{2\omega_{1,n}} \left[ a_{j,k+2,n}^1 - \sum_{p=k}^{j-1} (j-p+1) a_{p,k,n}^1 \right]. \quad (6.25)$$

Зважаючи, що  $p_m$  не залежить від змінної  $y$  остаточний загальний розв'язок послідовності (6.23) матиме вигляд

$$\bar{\theta}_{m,n}(y) = \sum_{j=0}^m \left[ A_{m-j,n} G_{j,n}(y) + B_{m-j,n} W_{j,n}(y) \right] + (-1)^n \frac{2\xi_n}{\kappa\mu(\xi_n^2 + \lambda^2)} \bar{p}_m. \quad (6.26)$$

Далі, враховуючи рівняння (6.23) та очевидне співвідношення

$$\sum_{l=0}^m (m-l+1) [\bar{q}_l - 2\bar{q}_{l-1} + \bar{q}_{l-2}] = \bar{q}_m,$$

загальний розв'язок рівняння (6.22) подамо у вигляді

$$\bar{w}_{m,n}(y) = \sum_{j=0}^n \left[ C_{m-j,n} G_j(w_{2,n}y) + D_{m-j,n} W_j(w_{2,n}y) \right] + \frac{1}{l^2} d_y q_{m,n}^y(y), \quad (6.27)$$

при  $\omega_{2,n} = \sqrt{\xi_n^2 + \lambda^2 \kappa^2}$  і  $a_{j,k,n}^2$ , що задовольняють рекурентним співвідношенням

$$a_{j,k+1,n}^2 = \frac{\lambda\kappa}{2\omega_{2,n}} \left[ a_{j,k+2,n}^2 - \sum_{p=k}^{j-1} (j-p+1) a_{p,k,n}^2 \right].$$

Невідомі  $A_{m,n}$ ,  $B_{m,n}$ ,  $C_{m,n}$ ,  $D_{m,n}$  знайдемо із трансформованих за Лагерром і Фур'є умов (6.5)

$$\sigma_{xx,m,n}(\pm y_0) = 0; \sigma_{xy,n,m}(\pm y_0) = 0, \quad (6.28)$$

які приводять до систем рівнянь розмірності  $(4 \times 4)$ , побудова розв'язку яких не становить принципових труднощів.

Остаточно розв'язок вихідної задачі подається у вигляді

$$\theta(x, y, \tau) = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\theta}_{m,n}(y) \cos(\xi_n x) L_m(\lambda \tau); \quad (6.29)$$

$$v(x, y, \tau) = \lambda \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{v}_{m,n}(y) \cos(\xi_n x) L_m(\lambda \tau). \quad (6.30)$$

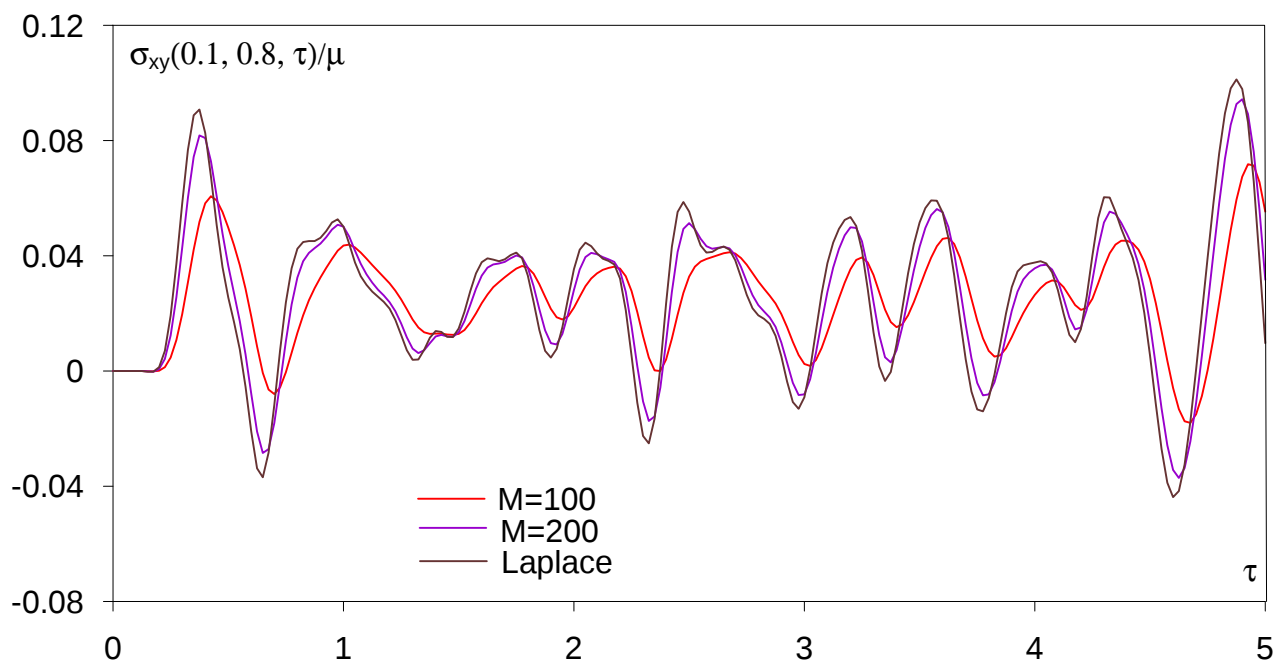


Рис. 6.1 Порівняльний аналіз результатів обрахунку дотичних напружень

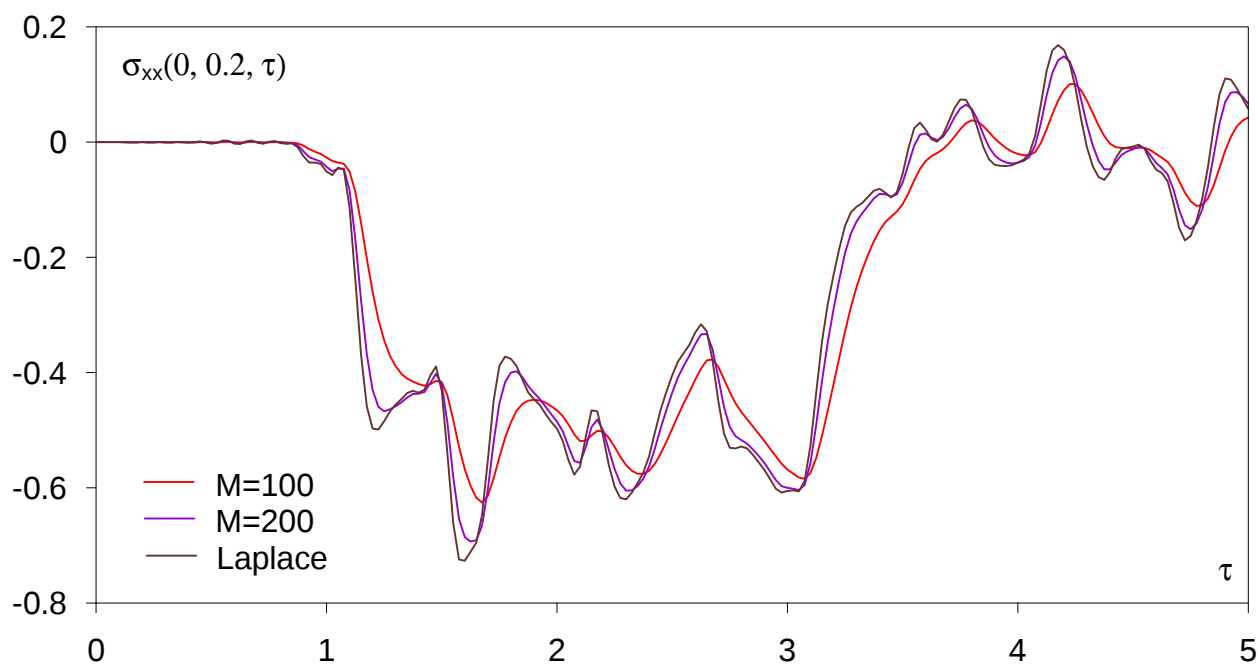


Рис. 6.2. Порівняльний аналіз результатів обрахунку нормальних напружень

На рис. 6.1 і рис. 6.2 показано результати розрахунку дотичних та нормальних напружень в пластинці розрахованих із використанням схем методу

інтегрального перетворення Лапласа та методу поліномів Лагерра.

В обох випадках ряди в перетворенні Фур'є обчислювались до  $n=100$ . В результатах, обчислених за Лапласом ряди за змінною  $\tau$  обчислювались до  $k=100$ . Ряди за поліномами Лагерра обчислювались до  $m=100$  та  $m=200$ . Всі розрахунки приведені для навантаження, яке змінювалось за законом  $p(\tau) = p^* (1 - \exp(-\tau_0 \tau))^2$  при  $\tau_0 = 30$ .

З наведеного видно, що зі збільшенням кількості утримуваних членів в рядах за Лагерром розв'язки зближуються. Подальше збільшення приводить до зменшення відносної похибки між результатами до 1%.

Слід зазначити, що зменшення параметру  $\tau_0$  (зменшення швидкості навантаження) призводить до пониження числа членів рядів за Лагерром, необхідного для досягнення потрібної точності.

## 6.2 Нестационарні коливання шаруватої плити

Розглядається композитна плита, що складається із  $M$  плоских шарів різної товщини та з різними фізико-механічними властивостями. Шар з індексом  $i$  має товщину  $h_i$ ,  $1 \leq i \leq M$  і характеризується пружними сталими Ламе  $l_i$ ,  $m_i$  і густиною  $r_i$ .

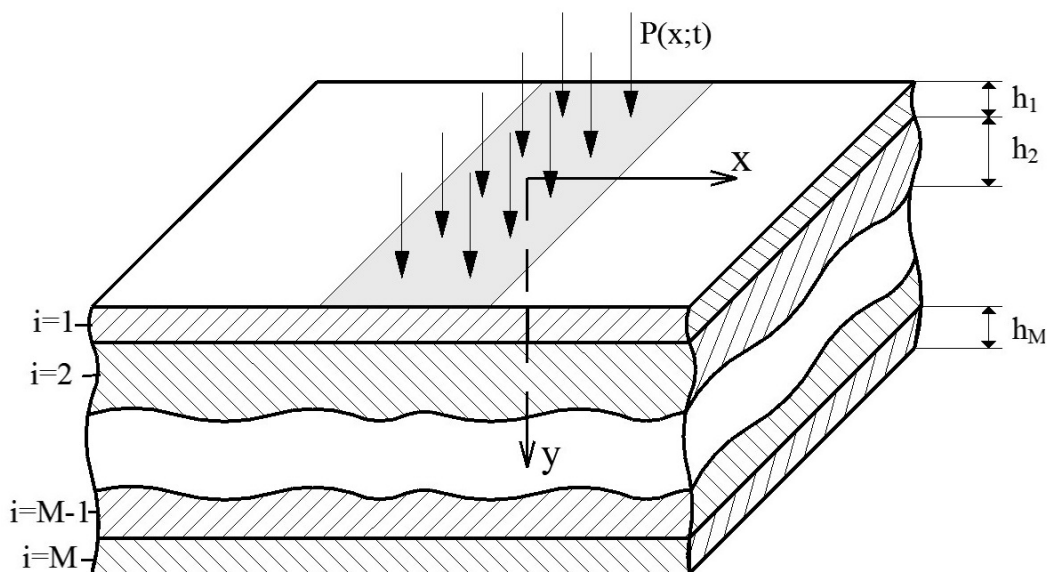


Рис. 6.3 Схема задачі

Вектор переміщення  $\mathbf{U}^{(i)}$  в кожному шарі задовольняє рівнянню руху:

$$c_{1,i}^2 \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{U}^{(i)}) - c_{2,i}^2 \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{U}^{(i)}) = \mathbb{I}_t^2 \mathbf{U}^{(i)} \quad (6.31)$$

з нульовими початковими умовами. Вважається, що гранична поверхня верхнього шару ( $i=1$ ) перебуває під дією високоінтенсивного силового навантаження, розподіленого в смугі ширини  $2l$ , а гранична поверхня нижнього шару ( $i=M$ ) жорстко закріплена (Рис. 6.1). Крім того, впродовж всього перехідного процесу на поверхнях поділу матеріалів шарів виконуються умови ідеального механічного контакту.

Для формулювання початково-крайової задачі теорії пружності, відмінного від формулювання запропонованого в попередньому підрозділі, проведемо неklasичне розділення векторного рівняння руху (6.31) із використанням потенціалів – об'ємного розширення

$$q^{(i)}(x, y) = \partial_x u^{(i)} + \partial_y v^{(i)} \quad (6.32)$$

та функції прискорення зсуву

$$f^{(i)} = \mathbb{H}_{1,i}^2 \partial_t^2 v^{(i)} - \partial_y q^{(i)}. \quad (6.33)$$

В термінах цих функцій векторне рівняння руху (6.31) розділяється на два незалежних скалярних рівняння

$$\partial_x^2 q^{(i)} + \mathbb{I}_y^2 q^{(i)} = \mathbb{H}_{1,i}^2 \mathbb{I}_t^2 q^{(i)}; \quad (6.34)$$

$$\partial_x^2 f^{(i)} + \partial_y^2 f^{(i)} = \mathbb{H}_{2,i}^2 \partial_t^2 f^{(i)}. \quad (6.35)$$

Тут  $x = \frac{x_1}{H}$ ,  $y = \frac{y_1}{H}$  – безрозмірні змінні прямокутної системи координат,

$u^{(i)}(x, y, t)$ ,  $v^{(i)}(x, y, t)$  – компоненти вектора переміщення  $\mathbf{U}^{(i)}(x, y, t)$  в напрямку

осі  $Ox$  та  $Oy$ ;  $t = \frac{c_{1,0} t}{h}$  безрозмірний (динамічний) час;  $\mathbb{H}_{1,i} = \frac{c_{1,0}}{c_{1,i}}$ ,  $\mathbb{H}_{2,i} = \frac{c_{1,0}}{c_{2,i}}$ ,

$c_{1,i} = \sqrt{\frac{l_i + 2m_i}{r_i}}$ ,  $c_{2,i} = \sqrt{\frac{m_i}{r_i}}$  – швидкості поширення хвиль розширення та зсуву в матеріалі  $i$ -го шару.

До рівнянь (4) додаються початкові умови, які в термінах функцій  $q^{(i)}$  та  $f^{(i)}$  мають вигляд

$$q^{(i)} = \dot{q}^{(i)} = f^{(i)} = \dot{f}^{(i)} = 0, \quad t = 0; \quad (6.35)$$

крайові умови на граничних поверхнях

$$s_{yy}^{(1)} = p(x, t), \quad s_{xy}^{(1)} = 0, \quad y = 0; \quad u^{(M)} = v^{(M)} = 0, \quad y = H/h \quad (6.36)$$

та умови ідеального механічного контакту складових

$$u^{(i)} = u^{(i+1)}; \quad v^{(i)} = v^{(i+1)}; \quad s_{yy}^{(i)} = s_{yy}^{(i+1)}; \quad s_{yx}^{(i)} = s_{yx}^{(i+1)}, \quad y = y_i. \quad (6.37)$$

Тут  $y_i = \frac{1}{h} \sum_{m=1}^i h_m$  – координати поверхонь поділу матеріалів композиту.

В попередньому підрозділі ми попередньо знаходили всі компоненти вектора переміщення та тензора напружень через ключові функції, а потім задовольняли крайові умови та умови спряження. В цьому підрозділі, спираючись на результати другого розділу, продемонструємо інший підхід та сформулюємо крайові умови та умови спряження в термінах ключових функцій. Згідно результатів другого розділу крайові умови на граничних поверхнях плити будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} (k_1^2 - 2) \mathbb{I}_t^2 q^{(1)} + \frac{1}{\mathbb{D}_{1,1}^2} (\mathbb{I}_y^2 q^{(1)} + \mathbb{I}_y f^{(1)}) &= \frac{1}{m} \mathbb{I}_t^2 p_y, \quad y = 0; \\ \frac{1}{\mathbb{D}_{1,1}^2} \partial_x^2 [\partial_y q^{(1)} + f^{(1)}] - \frac{k_1^2}{2} \partial_t^2 f^{(1)} &= 0, \quad y = 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\mathbb{I}_x^2 q^{(M)} - \mathbb{I}_y j^{(M)} = 0; \quad \mathbb{I}_y q^{(M)} + j^{(M)} = 0, \quad y = \frac{H}{h}, \quad (6.39)$$

де  $p_y(x, t)$  заданий на поверхні  $y = 0$  розподіл нормального навантаження.

Аналогічні перетворення, пророблені з умовами (6.37), приведуть до умов спряження в термінах функцій  $q^{(i)}$  та  $f^{(i)}$  на поверхнях

$$\begin{aligned} [\mathbb{I}_y q^{(i)} + f^{(i)}] &= \frac{\mathbb{I}_{1,i}^2}{\mathbb{I}_{1,i+1}^2} [\mathbb{I}_y q^{(i+1)} + f^{(i+1)}]; [\mathbb{I}_x^2 q^{(i)} - \mathbb{I}_y j^{(i)}] = \frac{\mathbb{I}_{1,i}^2}{\mathbb{I}_{1,i+1}^2} [\mathbb{I}_x^2 q^{(i+1)} - \mathbb{I}_y j^{(i+1)}]; \\ \left( \frac{k_i^2}{2} - 1 \right) \mathbb{I}_t^2 q^{(i)} + \frac{\mathbb{I}_y^2 q^{(i)} + \mathbb{I}_y f^{(i)}}{\mathbb{I}_{1,i}^2} &= \Omega_i \left\{ \left( \frac{k_{i+1}^2}{2} - 1 \right) \mathbb{I}_t^2 q^{(i+1)} + \frac{\mathbb{I}_y^2 q^{(i+1)} + \mathbb{I}_y f^{(i+1)}}{\mathbb{I}_{1,i+1}^2} \right\}; \\ \frac{\mathbb{I}_x^2 [\mathbb{I}_y q^{(i)} + f^{(i)}]}{\mathbb{I}_{1,i}^2} - \frac{k_i^2}{2} \mathbb{I}_t^2 f^{(i)} &= \Omega_i \left\{ \frac{\mathbb{I}_x^2 [\mathbb{I}_y q^{(i+1)} + f^{(i+1)}]}{\mathbb{I}_{1,i+1}^2} - \frac{k_{i+1}^2}{2} \mathbb{I}_t^2 f^{(i+1)} \right\}, \quad (6.40) \end{aligned}$$

$$\text{де } \Omega_i = \frac{r_{i+1} c_{2,i+1}^2}{r_i c_{2,i}^2}.$$

За відомими  $q^{(i)}$  та  $j^{(i)}$ ,  $1 \leq i \leq M$  нормальна компонента вектора переміщення  $v^{(i)}(x, y, t)$  обчислюється із задачі Коші

$$\mathbb{I}_t^2 v^{(i)} = \frac{1}{\mathbb{I}_{1,i}^2} [f^{(i)} + \mathbb{I}_y q^{(i)}], \quad v^{(i)} = \mathbb{I}_t v^{(i)} = 0, \quad t = 0, \quad (6.41)$$

а компонента  $u^{(i)}(x, y, t)$  визначається за формулою

$$u^{(i)}(x, y, t) = \int_0^x [q^{(i)}(V, y, t) - \mathbb{I}_y v^{(i)}(V, z, t)] dV. \quad (6.42)$$

Покладемо, що нормальне навантаження симетрично розподілено відносно площини  $x = 0$ . Тоді  $q^{(i)}$  і  $f^{(i)}$  - парні функції змінної  $x$ . Враховуючи це, застосуємо до рівнянь (6.34) та (6.35) інтегральне перетворення Лагерра за змінною  $t$  і  $\cos$ -перетворення Фур'є за змінною  $x$ . В результаті одержимо

$$d_y^2 \bar{q}_n^{(i)} - x^2 \bar{q}_n^{(i)} = l^2 \mathbb{I}_{1,i}^2 \sum_{k=0}^n (n-k+1) \bar{q}_k^{(i)}; \quad (6.43)$$

$$d_y^2 \bar{f}_n^{(i)} - x^2 \bar{f}_n^{(i)} = l^2 \mathfrak{d}_{2,i}^2 \sum_{k=0}^n (n-k+1) \bar{f}_k^{(i)}, \quad (6.44)$$

де

$$\begin{bmatrix} \bar{q}_n^{(i)}(x, y) \\ \bar{f}_n^{(i)}(x, y) \end{bmatrix} = \int_0^\infty \exp(-l t) L_n(l t) \int_0^\infty \begin{bmatrix} q_n^{(i)}(x, y) \\ f_n^{(i)}(x, y) \end{bmatrix} \cos(x x) dx dt \quad (6.45)$$

- зображення за Фур'є і Лагерром.

Після перенесення доданку при  $k = n$  з правої частини рівнянь (6.43), (6.44) у ліву частину, одержимо трикутні послідовності звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} d_y^2 \bar{q}_n^{(i)} - z_{1,i}^2 \bar{q}_n^{(i)} &= l^2 \mathfrak{d}_{1,i}^2 \sum_{k=0}^{n-1} (n-k+1) \bar{q}_k^{(i)}; \\ d_y^2 \bar{f}_n^{(i)} - z_{2,i}^2 \bar{f}_n^{(i)} &= l^2 \mathfrak{d}_{2,i}^2 \sum_{k=0}^{n-1} (n-k+1) \bar{f}_k^{(i)}, \end{aligned} \quad (6.46)$$

де  $z_{k,i}^2 = x^2 + l^2 \mathfrak{d}_{k,i}^2$ .

Загальний розв'язок рівнянь (6.46), як відомо із другого розділу, має вигляд алгебричної згортки

$$\begin{aligned} \bar{q}_n^{(i)} &= \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i)} G_{1,j}^{(i)}(y) + B_{n-j}^{(i)} W_{1,j}^{(i)}(y) \right]; \\ \bar{f}_n^{(i)} &= \sum_{j=0}^n \left[ C_{n-j}^{(i)} G_{2,j}^{(i)}(y) + D_{n-j}^{(i)} W_{2,j}^{(i)}(y) \right]. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Тут  $G_{k,j}^{(i)}(y)$  і  $W_{k,j}^{(i)}(y)$  - лінійно незалежні фундаментальних розв'язки послідовностей рівнянь (6.46), які із використанням методу невизначених коефіцієнтів можна подати у вигляді

$$G_{k,j}^{(i)}(y) = \exp(-z_{k,i} y) \sum_{k=0}^j a_{j,k} \frac{(w_{k,i} y)^k}{k!};$$

$$W_{k,j}^{(i)}(y) = \exp(z_{k,i} y) \sum_{k=0}^j a_{j,k} \frac{(-w_{k,i} y)^k}{k!}. \quad (6.48)$$

Безпосередня підстановка подань (6.48) в послідовності рівнянь (6.46) приводить до рекурентних співвідношень для визначення коефіцієнтів  $a_{j,k}$

$$a_{j,k+1} = \frac{w_{l,i}}{2z_{l,i}} \left[ a_{j,k+2} - \sum_{p=k}^{j-1} (j-p+1) a_{p,k} \right]. \quad (6.49)$$

У рекурентних співвідношеннях (6.49) всі  $a_{j,0}$  - довільні і  $a_{j,k} \equiv 0$  при  $k > j$ .

Набір невідомих сталих  $A_{n-j}^{(i)}, B_{n-j}^{(i)}, C_{n-j}^{(i)}, D_{n-j}^{(i)}$ , що входить в загальний розв'язок (16) слугує для задовольнення крайовим умовам (6.38)-(6.39) та умовам спряження (6.40), які після застосування інтегрального перетворення Лагерра та інтегрального перетворення Фур'є набудуть вигляду

$$(k_1^2 - 2) l^2 \sum_{k=0}^n (n-k+1) \bar{q}_k^{(1)} - \frac{X}{\mathfrak{d}_{1,1}^2} (x \bar{q}_n^{(1)} + \bar{f}_n^{(1)}) = \frac{l^2}{m} \sum_{k=0}^n (n-k+1) \bar{p}_k, \quad y=0; \quad (6.50)$$

$$\frac{X^2}{\mathfrak{d}_{1,1}^2} [d_y \bar{q}_n^{(1)} + \bar{f}_n^{(1)}] + \frac{k_1^2 l^2}{2} \sum_{k=0}^n (n-k+1) \bar{f}_n^{(1)} = 0, \quad y=0; \quad (6.51)$$

$$x^2 \bar{q}_n^{(M)} + d_y \bar{J}_n^{(M)} = 0; \quad d_y \bar{q}_n^{(M)} + \bar{J}_n^{(M)} = 0, \quad y = \frac{H}{h} = g_M; \quad (6.52)$$

$$d_y \bar{q}_n^{(i)} + \bar{J}_n^{(i)} = \frac{\mathfrak{d}_{1,i}^2}{\mathfrak{d}_{1,i+1}^2} [d_y \bar{q}_n^{(i+1)} + \bar{J}_n^{(i+1)}], \quad g = g_i; \quad (6.53)$$

$$x^2 \bar{q}_n^{(i)} + d_y \bar{J}_n^{(i)} = \frac{\mathfrak{d}_{1,i}^2}{\mathfrak{d}_{1,i+1}^2} [x^2 \bar{q}_n^{(i+1)} + d_y \bar{J}_n^{(i+1)}], \quad g = g_i; \quad (6.54)$$

$$\begin{aligned} & (k_i^2 - 2) l^2 \sum_{k=0}^n (n-k+1) \bar{q}_k^{(i)} - \frac{X}{\mathfrak{d}_{1,i}^2} (x \bar{q}_n^{(i)} + \bar{f}_n^{(i)}) = \\ & = \Omega_i \left\{ (k_{i+1}^2 - 2) l^2 \sum_{k=0}^n (n-k+1) \bar{q}_k^{(i+1)} - \frac{X}{\mathfrak{d}_{1,i+1}^2} (x \bar{q}_n^{(i+1)} + \bar{f}_n^{(i+1)}) \right\}, \quad g = g_i \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$\frac{X^2}{\mathfrak{d}_{1,i}^2} [d_y \bar{q}_n^{(i)} + \bar{f}_n^{(i)}] - \frac{k_i^2 l^2}{2} \sum_{k=0}^n (n-k+1) \bar{f}_n^{(i)} =$$

$$= \Omega_i \left\{ \frac{x^2}{d_{1,i+1}^2} \left[ d_y \bar{q}_n^{(i+1)} + \bar{f}^{(i+1)} \right] - \frac{k_{i+1}^2 l^2}{2} \sum_{k=0}^n (n-k+1) \bar{f}_n^{(i+1)} \right\}, g = g_i. \quad (6.56)$$

Розглянемо умову (6.50) та врахуємо вирази (6.47) для  $\bar{q}_n^{(i)}$  і  $j_n^{(i)}$ :

$$\begin{aligned} & (k_1^2 - 1) l^2 \sum_{k=0}^n (n-k+1) \sum_{j=0}^k \left[ A_{k-j}^{(1)} G_{1,j}^{(1)}(0) + B_{k-j}^{(1)} W_{1,j}^{(1)}(0) \right] - \\ & - \frac{x^2}{d_{1,1}^2} \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(1)} G_{1,j}^{(1)}(0) + B_{n-j}^{(1)} W_{1,j}^{(1)}(0) \right] - \\ & - \frac{x^2}{d_{1,1}^2} \sum_{j=0}^n \left[ C_{n-j}^{(1)} G_{2,j}^{(1)}(0) + D_{n-j}^{(1)} W_{2,j}^{(1)}(0) \right] = \frac{l^2}{m} \sum_{k=0}^n (n-k+1) \bar{p}_k. \end{aligned} \quad (6.57)$$

В рівняннях (6.57) залишимо в лівій частині доданки, які містять  $A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}$  і  $D_n^{(1)}$ , а решту перенесемо в праву частину. В результаті, врахувавши подання (6.4), одержимо рівняння

$$b_{1,1} A_n^{(1)} + b_{1,2} B_n^{(1)} + b_{1,3} C_n^{(1)} + b_{1,4} D_n^{(1)} = H_n^{(1)}, \quad (6.58)$$

де

$$\begin{aligned} b_{1,1} &= \frac{k_1^2 l^2}{2} - l^2 - \frac{x^2}{d_{1,1}^2}, \quad b_{1,2} = \frac{k_1^2 l^2}{2} - l^2 - \frac{x^2}{d_{1,1}^2}, \quad b_{1,3} = -\frac{x}{d_{1,1}^2}, \quad b_{1,4} = -\frac{x}{d_{1,1}^2}; \\ H_n^{(1)} &= \frac{l^2}{m} \sum_{k=0}^n (n-k+1) \bar{p}_k - (k_1^2 - 1) l^2 \sum_{k=0}^{n-1} (n-k+1) (A_k^{(1)} + B_k^{(1)}). \end{aligned} \quad (6.59)$$

Поступаючи таким самим чином з рештою крайових умов (6.51)-(6.52) та умовами спряження (6.53)-(6.56), одержимо систему алгебричних рівнянь для визначення невідомих  $A_n^{(i)}, B_n^{(i)}, C_n^{(i)}, D_n^{(i)}$

$$\begin{pmatrix}
b_{1,1} & \mathbf{K} & b_{1,4} & 0 & & \mathbf{K} & & \mathbf{K} & & 0 \\
b_{2,1} & \mathbf{K} & b_{2,4} & 0 & & \mathbf{K} & & \mathbf{K} & & 0 \\
b_{3,1} & \mathbf{K} & b_{3,4} & b_{3,5} & \mathbf{K} & b_{3,8} & 0 & \mathbf{K} & 0 & \\
b_{4,1} & \mathbf{K} & b_{4,4} & b_{4,5} & \mathbf{K} & b_{4,8} & 0 & \mathbf{K} & 0 & \\
\mathbb{M} & & \mathbf{K} & & \mathbf{N} & & & \mathbf{K} & & \mathbb{M} \\
0 & \mathbf{K} & 0 & b_{4M-3,4M-7} & \mathbf{K} & b_{4M-3,4M-4} & b_{4M-3,4M-3} & \mathbf{K} & b_{4M-3,4M} & \\
0 & \mathbf{K} & 0 & b_{4M-2,4M-7} & \mathbf{K} & b_{4M-2,4M-4} & b_{4M-2,4M-3} & \mathbf{K} & b_{4M-2,4M} & \\
0 & & \mathbf{K} & \mathbf{K} & & 0 & b_{4M-1,4M-3} & \mathbf{K} & b_{4M-1,4M} & \\
0 & & \mathbf{K} & \mathbf{K} & & 0 & b_{4M,4M-3} & \mathbf{K} & b_{4M,4M} & 
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
A_n^{(1)} \\
B_n^{(1)} \\
C_n^{(1)} \\
D_n^{(1)} \\
\mathbb{M} \\
A_n^{(M)} \\
B_n^{(M)} \\
C_n^{(M)} \\
D_n^{(M)}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
H_n^{(1)} \\
H_n^{(2)} \\
H_n^{(3)} \\
H_n^{(4)} \\
\mathbb{M} \\
H_n^{(4M-3)} \\
H_n^{(4M-2)} \\
H_n^{(4M-1)} \\
H_n^{(4M)}
\end{pmatrix}
\quad (6.60)$$

де

$$b_{2,1} = -\frac{x^2 z_{1,1}}{\mathfrak{d}_{1,1}^2}; b_{2,1} = \frac{x^2 z_{1,1}}{\mathfrak{d}_{1,1}^2}; b_{2,3} = \frac{x^2 z_{2,1}}{\mathfrak{d}_{1,1}^2} + \frac{k_1^2 l^2}{2}; b_{2,4} = -\frac{x^2 z_{2,1}}{\mathfrak{d}_{1,1}^2} + \frac{k_1^2 l^2}{2};$$

$$b_{4M-1,4M-3} = x^2 \exp(-z_{1,M} g_M); b_{4M-1,4M-2} = x^2 \exp(z_{1,M} g_M);$$

$$b_{4M-1,4M-1} = -z_{2,M} \exp(-z_{2,M} g_M); b_{4M-1,4M} = z_{2,M} \exp(z_{2,M} g_M);$$

$$b_{4M,4M-3} = -z_{1,M} \exp(-z_{1,M} g_M); b_{4M,4M-2} = z_{1,M} \exp(z_{1,M} g_M);$$

$$b_{4M,4M-1} = \exp(-z_{2,M} g_M); b_{4M,4M} = \exp(z_{2,M} g_M);$$

$$b_{4i-1,4i-3} = x^2 \exp(-z_{1,i} g_i); b_{4i-1,4i-2} = x^2 \exp(z_{1,i} g_i);$$

$$b_{4i-1,4i-1} = -z_{2,i} \exp(-z_{2,i} g_i); b_{4i-1,4i} = z_{2,i} \exp(z_{2,i} g_i);$$

$$b_{4i-1,4i+1} = -x^2 \exp(-z_{1,i+1} g_i); b_{4i-1,4i+2} = -x^2 \exp(z_{1,i+1} g_i);$$

$$b_{4i-1,4i+3} = z_{2,i+1} \exp(-z_{2,i+1} g_i); b_{4i-1,4i+4} = -z_{2,i+1} \exp(z_{2,i+1} g_i);$$

$$b_{4i,4i-3} = -z_{1,i} \exp(-z_{1,i} g_i); b_{4i,4i-2} = z_{1,i} \exp(z_{1,i} g_i);$$

$$b_{4i,4i-1} = x^2 \exp(-z_{2,i} g_i); b_{4i,4i} = x^2 \exp(z_{2,i} g_i);$$

$$b_{4i,4i+1} = z_{2,i+1} \exp(-z_{1,i+1} g_i); b_{4i,4i+2} = -z_{2,i+1} \exp(z_{1,i+1} g_i);$$

$$b_{4i,4i+3} = x^2 \exp(-z_{2,i+1} g_i); b_{4i,4i+4} = -x^2 \exp(z_{2,i+1} g_i);$$

$$b_{4i+1,4i-3} = \left( \frac{k_i^2 l^2}{2} - l^2 - \frac{x^2}{\mathfrak{d}_{1,i}^2} \right) \exp(-z_{1,i} g_i); b_{4i+1,4i-2} = \left( \frac{k_i^2 l^2}{2} - l^2 - \frac{x^2}{\mathfrak{d}_{1,i}^2} \right) \exp(z_{1,i} g_i);$$

$$b_{4i+1,4i-1} = \frac{x}{\mathfrak{d}_{2,i}^2} \exp(-z_{2,i} g_i); b_{4i+1,4i} = \frac{x}{\mathfrak{d}_{2,i}^2} \exp(z_{2,i} g_i);$$

$$\begin{aligned}
b_{4i+1,4i+1} &= \left( \frac{k_{i+1}^2 l^2}{2} - l^2 - \frac{x^2}{\mathfrak{d}_{1,i+1}^2} \right) \exp(-z_{1,i+1} g_i); \\
b_{4i+1,4i+2} &= \left( \frac{k_{i+1}^2 l^2}{2} - l^2 - \frac{x^2}{\mathfrak{d}_{1,i+1}^2} \right) \exp(z_{1,i+1} g_i); \\
b_{4i+1,4i+3} &= -\frac{x}{\mathfrak{d}_{2,i+1}^2} \exp(-z_{2,i+1} g_i); \quad b_{4i+1,4i+4} = -\frac{x}{\mathfrak{d}_{2,i+1}^2} \exp(z_{1,i+1} g_i); \\
b_{4i+2,4i-3} &= -\frac{x^2 z_{1,i}}{\mathfrak{d}_{1,i}^2} \exp(-z_{1,i} g_i); \quad b_{4i+2,4i-2} = \frac{x^2 z_{1,i}}{\mathfrak{d}_{1,i}^2} \exp(z_{1,i} g_i); \\
b_{4i+2,4i-1} &= \left( \frac{x^2 z_{2,i}}{\mathfrak{d}_{1,i}^2} + \frac{k_i^2 l^2}{2} \right) \exp(-z_{2,i} g_i); \quad b_{4i+2,4i} = \left( -\frac{x^2 z_{2,i}}{\mathfrak{d}_{1,i}^2} + \frac{k_i^2 l^2}{2} \right) \exp(z_{2,i} g_i); \\
b_{4i+2,4i+1} &= \frac{x^2 z_{1,i+1}}{\mathfrak{d}_{1,i+1}^2} \exp(-z_{1,i+1} g_i); \quad b_{4i+2,4i+2} = -\frac{x^2 z_{1,i+1}}{\mathfrak{d}_{1,i+1}^2} \exp(z_{1,i+1} g_i); \\
b_{4i+2,4i+3} &= \left( \frac{x^2 z_{2,i+1}}{\mathfrak{d}_{1,i+1}^2} + \frac{k_{i+1}^2 l^2}{2} \right) \exp(-z_{2,i+1} g_i); \\
b_{4i+2,4i+4} &= \left( -\frac{x^2 z_{2,i+1}}{\mathfrak{d}_{1,i+1}^2} + \frac{k_{i+1}^2 l^2}{2} \right) \exp(z_{2,i+1} g_i);
\end{aligned}$$

Структура матриці  $(b_{k,l})$  систем (6.60) дає змогу як і в попередніх розділах роботи, із використанням процедури Гауса, звести їх до трикутного вигляду

$$\begin{pmatrix}
b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} & 0 & \mathbf{K} & \mathbf{K} & 0 \\
0 & \mathfrak{b}_{2,2} & \mathfrak{b}_{2,3} & \mathfrak{b}_{2,4} & 0 & \mathbf{K} & \mathbf{K} & 0 \\
0 & 0 & \mathfrak{b}_{3,3} & \mathfrak{b}_{3,5} & \mathbf{K} & \mathfrak{b}_{3,8} & 0 & \mathbf{K} \\
0 & \mathbf{K} & 0 & \mathfrak{b}_{4,4} & \mathbf{K} & \mathfrak{b}_{4,8} & 0 & \mathbf{K} \\
\mathbb{M} & & \mathbf{K} & \mathbf{O} & & & \mathbf{K} & \mathbb{M} \\
0 & \mathbf{K} & 0 & \mathbf{K} & 0 & \mathfrak{b}_{4M-3,4M-3} & \mathfrak{b}_{4M-3,4M-2} & \mathfrak{b}_{4M-3,4M-1} & \mathfrak{b}_{4M-3,4M} \\
0 & \mathbf{K} & 0 & 0 & \mathbf{K} & 0 & \mathfrak{b}_{4M-2,4M-2} & \mathfrak{b}_{4M-2,4M-1} & \mathfrak{b}_{4M-2,4M} \\
0 & 0 & \mathbf{K} & \mathbf{K} & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{b}_{4M-1,4M-1} & \mathfrak{b}_{4M-1,4M} \\
0 & 0 & \mathbf{K} & \mathbf{K} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathfrak{b}_{4M,4M}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
A_n^{(1)} \\
B_n^{(1)} \\
C_n^{(1)} \\
D_n^{(1)} \\
\mathbb{M} \\
A_n^{(M)} \\
B_n^{(M)} \\
C_n^{(M)} \\
D_n^{(M)}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
H_n^{(1)} \\
\mathfrak{H}_n^{(2)} \\
\mathfrak{H}_n^{(3)} \\
\mathfrak{H}_n^{(4)} \\
\mathbb{M} \\
\mathfrak{H}_n^{(4M-3)} \\
\mathfrak{H}_n^{(4M-2)} \\
\mathfrak{H}_n^{(4M-1)} \\
\mathfrak{H}_n^{(4M)}
\end{pmatrix}
\quad (6.61)$$

В системах (6.61) величини  $\mathbb{H}_{i,j}$  та  $\mathbb{H}_n^{(i)}$  пов'язані із відповідними  $b_{i,j}$  та  $H_n^{(i)}$  через рекурентні співвідношення.

Трикутна структура систем (6.61) дає змогу одержати її точний рекурентний розв'язок для довільного числа шарів  $M$ :

$$\begin{aligned} D_n^{(M)} &= \frac{\mathbb{H}_n^{(4M)}}{\mathbb{H}_{4M,4M}}, \quad C_n^{(M)} = \frac{\mathbb{H}_n^{(4M-1)} - D_n^{(M)} \mathbb{H}_{4M-1,4M}}{\mathbb{H}_{4M-1,4M-1}}, \mathbf{K}, \\ A_n^{(1)} &= \frac{H_n^{(1)} - b_{1,4} D_n^{(1)} - b_{1,3} C_n^{(1)} - b_{1,2} B_n^{(1)}}{b_{1,1}}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Знайшовши послідовно із (6.62) всі  $A_n^{(i)}, B_n^{(i)}, C_n^{(i)}, D_n^{(i)}$ , одержимо за формулами (17) трансформанти  $\bar{q}_n^{(i)}(y)$  і  $\bar{j}_n^{(i)}(y)$ , із використанням яких трансформанти компонент вектора переміщень обчислюються за формулами

$$\bar{v}_n^{(i)} = \frac{1}{l^2 \mathbb{H}_{1,i}^2} (\mathbb{H}_n^{(i)} - d_y \mathbb{H}_n^{(i)}); \quad \bar{u}_n^{(i)} = \frac{1}{x} \left[ 2\bar{q}_n^{(i)} + \frac{1}{l^2 \mathbb{H}_{1,i}^2} (x^2 \mathbb{H}_n^{(i)} - d_y \mathbb{H}_n^{(i)}) \right], \quad (6.63)$$

де

$$\mathbb{H}_n^{(i)} = \bar{q}_n^{(i)} - 2\bar{q}_{n-1}^{(i)} + \bar{q}_{n+2}^{(i)}, \quad \mathbb{H}_n^{(i)} = \mathbb{H}_n^{(i)} - 2\mathbb{H}_{n-1}^{(i)} + \mathbb{H}_{n-2}^{(i)},$$

при  $\bar{q}_{-1}^{(i)} = \bar{q}_{-2}^{(i)} \equiv 0, \bar{j}_{-1}^{(i)} = \bar{j}_{-2}^{(i)} \equiv 0$ .

Відмінні від нуля трансформанти тензора напружень обчислюються згідно закону Гука

$$\begin{aligned} \bar{s}_{yy,n}^{(i)} / m_i &= (h_i^2 - 2) \bar{q}_n^{(i)} + 2d_y \bar{u}_n^{(i)}; \quad \bar{s}_{xx,n}^{(i)} / m_i = (h_i^2 - 2) \bar{q}_n^{(i)} - 2x \bar{v}_n^{(i)}; \\ \bar{s}_{xy,n}^{(i)} / m_i &= d_y \bar{u}_n^{(i)} - x \bar{v}_n^{(i)}, \end{aligned} \quad (6.64)$$

де  $m_i$  - модуль зсуву в матеріалі  $i$ -го шару.

За відомими трансформантами відповідні оригінали відновлюються за формулами

$$\begin{cases} v^{(i)}(x, y, t) \\ s_{xx}^{(i)}(x, y, t) \\ s_{yy}^{(i)}(x, y, t) \end{cases} = \frac{2l}{p} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(lt) \int_0^{\infty} \begin{cases} \bar{v}_n^{(i)}(y) \\ \bar{s}_{xx,n}^{(i)}(y) \cos(x) dx \\ \bar{s}_{yy,n}^{(i)}(y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^{(i)}(x, y, t) \\ s_{xy}^{(i)}(x, y, t) \end{cases} = \frac{2l}{p} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(lt) \int_0^{\infty} \begin{cases} \bar{u}_n^{(i)}(y) \\ \bar{s}_{xy,n}^{(i)}(y) \sin(x) dx \end{cases} \quad (6.65)$$

За формулами (6.65) розраховувався напружено-деформований стан в плиті періодичної структури, шари якої виготовлені з кераміки та алюмінієвого сплаву (табл. 3.1.). При числових розрахунках було покладено, що нормальне навантаження має вигляд

$$p(x, t) = P^* \left( 1 - \frac{x^2}{l^2} \right)^2 (1 - \exp(-t/t_0))^2, \quad (6.66)$$

де  $P^*$  - розмірна величина ( $GPa$ ),  $t_0$  - параметр, який характеризує час виходу навантаження на стаціонарне значення. Така залежність дає змогу узгодити початкові та крайові умови, а також у багатьох випадках досить точно наблизити реальну залежність динамічного навантаження від часу. За характерний лінійний розмір  $h$  було вибрано товщину плити  $H$ . При цьому вважалось, що півдовжина ділянки навантаження  $l = H$ .

При числових розрахунках враховувалось три випадки кількості та розташування складових плити, кожен з яких передбачає однакове відношення об'ємів матеріалів кераміки та алюмінієвого сплаву.

I-й випадок – кількість шарів  $M = 3$ , шари з кераміки  $i = 1, 3$ ,  $h_1 = h_3 = 0.1$ , шар з алюмінієвого сплаву  $i = 2$ ,  $h_2 = 0.8$ ;

II-й випадок – кількість шарів  $M = 5$ , шари з кераміки  $i = 1, 3, 5$ ,  $h_1 = h_3 = h_5 = 0.067$ , шари з алюмінієвого сплаву  $i = 2, 4$ ,  $h_2 = h_4 = 0.4$ ;

III-й випадок – кількість шарів  $M = 7$ , шари з кераміки  $i = 1, 3, 5, 7$ ,  $h_1 = h_3 = h_5 = h_7 = 0.05$ , шари з алюмінієвого сплаву  $i = 2, 4, 6$ ,  $h_2 = h_4 = h_6 = 0.267$ .

На рис. 6.4 подано розподіл в часі нормальних переміщень на поверхні плити  $y=0$  на лінії  $x=0$ , а на рис. 6.5 часовий розподіл безрозмірних нормальних напружень  $\sigma_{yy}/P^*$  на нижній поверхні плити ( $y=1$ ) на тій же лінії  $x=0$ .

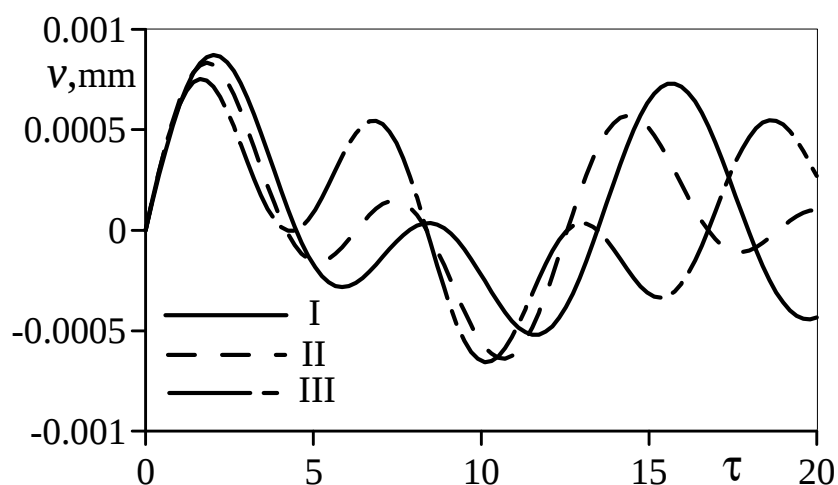


Рис. 6.4 Переміщення на поверхні  $y=0$ .

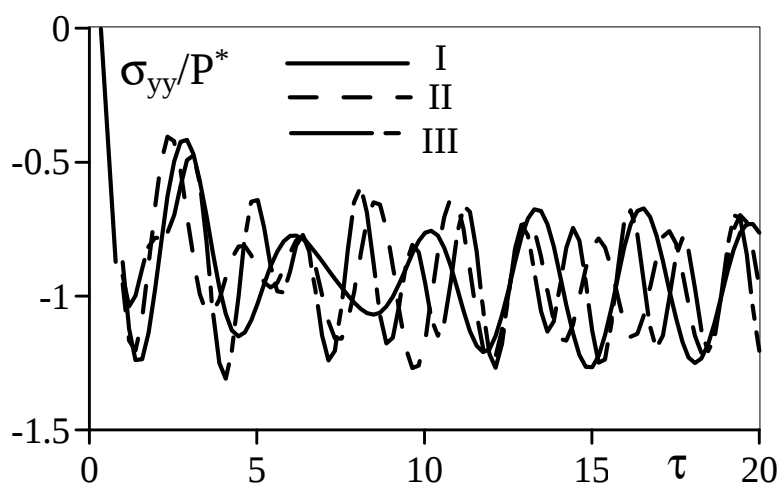


Рис. 6.5 Розподіл в часі нормальних напружень на поверхні  $y=1$ .

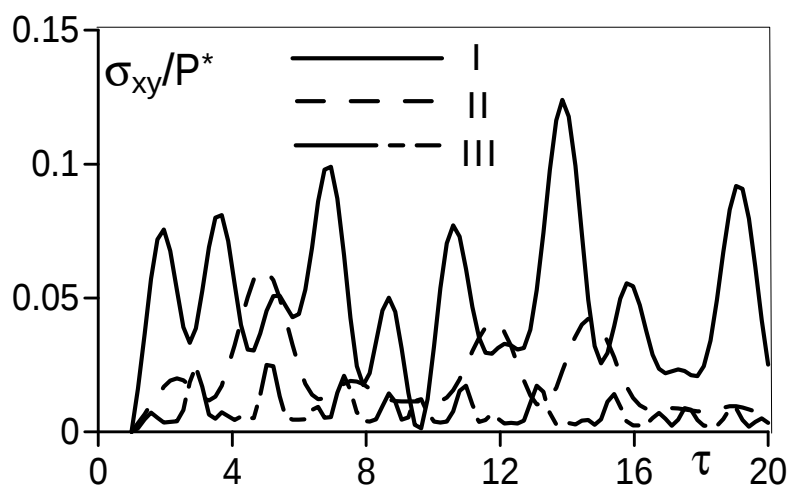


Рис. 6.6 Розподіл в часі дотичних напружень на поверхні  $y=y_{M-1}$ .

Як видно з наведеного, кількість шарів композитної плити практично не впливає на амплітуду коливань вказаних складових напружено-деформованого стану. При цьому дещо змінюється частота коливань нормальних напружень, що пояснюється збільшенням числа відбитих від поверхонь спряження хвиль.

Зовсім інший ефект спостерігається при розгляді дотичних напружень, результати розрахунку яких на поверхні  $y = y_{M-1}$  - поверхні поділу передостаннього та останнього шарів композитної плити на лінії  $x = 0.5$  подано на рис. 6.6. На відміну від попередніх результатів, збільшення числа складових плити значно зменшує як рівень дотичних напружень на поверхнях поділу матеріалів, так і амплітуду їх коливань.

### 6.3 Динамічна осесиметрична задача теорії пружності для шаруватого півпростору

Розглядається багатошаровий півпростір, що складається з  $M$  елементів (елементи з індексами  $1 \leq i \leq M-1$  – плоско-паралельні шари завтовшки  $h_i$ , а з індексом  $M$  – півпростір). Елементом композитного середовища відповідають сталі Ляме  $l_i, m_i$  та густини  $r_i$ . У безрозмірній циліндричній системі координат  $r, z, j$  в осесиметричному випадку, коли відсутня залежність від полярного кута напружено-деформований стан визначається із системи рівнянь

$$r^{-1} \nabla_r (r \nabla_r q^{(i)}) + \nabla_z^2 q^{(i)} = \mathfrak{D}_{1,i}^2 \nabla_t^2 q^{(i)}, \quad 1 \leq i \leq M; \quad (6.67)$$

$$r^{-1} \nabla_r (r \nabla_r f^{(i)}) + \nabla_z^2 f^{(i)} = \mathfrak{D}_{2,i}^2 \nabla_t^2 f^{(i)}, \quad 1 \leq i \leq M \quad (6.68)$$

при нульових початкових умовах

$$q^{(i)} = \nabla_t q^{(i)} = f^{(i)} = \nabla_t f^{(i)} = 0; \quad (6.69)$$

крайових умовах на поверхні композитного тіла  $z = 0$ :

$$\left(\frac{k_1^2}{2} - 1\right) \mathbb{I}_t^2 q^{(1)} + \frac{1}{\mathbb{D}_{1,1}^2} (\mathbb{I}_z^2 q^{(1)} + \mathbb{I}_z f^{(1)}) = \frac{k_1^2}{2} \mathbb{I}_t^2 p_z; \quad (6.70)$$

$$\frac{1}{\mathbb{D}_{1,1}^2} r^{-1} \mathbb{I}_r (r \mathbb{I}_r) [\mathbb{I}_z q^{(1)} + f^{(1)}] - \frac{k_1^2}{2} \mathbb{I}_t^2 f^{(1)} = 0; \quad (6.71)$$

умовах ідеального механічного контакту при  $z = z_i = \frac{1}{h} \sum_{k=1}^i h_k$ :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{k_i^2}{2} - 1\right) \mathbb{I}_t^2 q^{(i)} + \frac{1}{\mathbb{D}_{1,i}^2} (\mathbb{I}_z^2 q^{(i)} + \mathbb{I}_z f^{(i)}) = \\ & = \Omega_i \left\{ \left(\frac{k_{i+1}^2}{2} - 1\right) \mathbb{I}_t^2 q^{(i+1)} + \frac{1}{\mathbb{D}_{1,i+1}^2} (\mathbb{I}_z^2 q^{(i+1)} + \mathbb{I}_z f^{(i+1)}) \right\}; \end{aligned} \quad (6.72)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathbb{D}_{1,i}^2} r^{-1} \mathbb{I}_r (r \mathbb{I}_r) [\mathbb{I}_z q^{(i)} + f^{(i)}] - \frac{k_i^2}{2} \mathbb{I}_t^2 f^{(i)} = \\ & = \Omega_i \left\{ \frac{1}{\mathbb{D}_{1,i+1}^2} r^{-1} \mathbb{I}_r (r \mathbb{I}_r) [\mathbb{I}_z q^{(i+1)} + f^{(i+1)}] - \frac{k_{i+1}^2}{2} \mathbb{I}_t^2 f^{(i+1)} \right\}; \end{aligned} \quad (6.73)$$

$$\frac{1}{\mathbb{D}_{1,i}^2} [\mathbb{I}_z q^{(i)} + f^{(i)}] = \frac{1}{\mathbb{D}_{1,i+1}^2} [\mathbb{I}_z q^{(i+1)} + f^{(i+1)}]; \quad (6.74)$$

$$\frac{1}{\mathbb{D}_{1,i}^2} [r^{-1} \mathbb{I}_r r \mathbb{I}_r q^{(i)} - \mathbb{I}_z f^{(i)}] = \frac{1}{\mathbb{D}_{1,i+1}^2} [r^{-1} \mathbb{I}_r r \mathbb{I}_r q^{(i+1)} - \mathbb{I}_z f^{(i+1)}] \quad (6.75)$$

і умовах на нескінченності

$$q^{(M)} = f^{(M)} = 0, \quad z \rightarrow \infty. \quad (6.76)$$

У співвідношеннях (6.67)–(6.76)  $q^{(i)}(r, z, t) = \operatorname{div} \dot{\mathbf{U}}^{(i)}(r, z, t)$  – об'ємне розширення;  $u^{(i)}(r, z, t)$ ,  $w^{(i)}(r, z, t)$  – відповідно, радіальна і нормальна складові вектора  $\dot{\mathbf{U}}^{(i)}(r, z, t)$  пружних переміщень,  $f^{(i)}(r, z, t) = \mathbb{D}_{1,i}^2 \mathbb{I}_t^2 w^{(i)} - \mathbb{I}_g q^{(i)}$  – прискорення зсуву;  $t = \frac{th}{c_{1,0}}$  – безрозмірний час;  $k_i = \frac{c_{1,i}}{c_{2,i}}$ ,  $\mathbb{D}_{1,i} = \frac{c_{1,0}}{c_{1,i}}$ ,  $c_{1,i}$   $c_{2,i}$  – відповідно, швидкість поздовжньої й поперечної хвилі в матеріалі  $i$ -го шару;

$$\Omega_i = \frac{r_{i+1} c_{2,i+1}^2}{r_i c_{2,i}^2}, \quad p_z = \frac{p(z,t)}{r_1 c_{1,1}^2}; \quad p(z,t) - \text{задане на поверхні } z=0 \text{ нормальне зусилля};$$

$c_{1,0}$ ,  $h$  – деякі розмірні величини.

За знайденими із задачі (6.67)–(6.76) функціями  $q^{(i)}(r,z,t)$  і  $f^{(i)}(r,z,t)$  нормальна компонента  $w^{(i)}(r,z,t)$  вектора переміщень визначається із задачі Коші

$$\mathbb{I}_t^2 w^{(i)} = \frac{1}{\mathbb{I}_{1,i}^2} \left[ f^{(i)} + \mathbb{I}_z q^{(i)} \right], \quad w^{(i)} = \mathbb{I}_t w^{(i)} = 0, \quad t = 0, \quad (6.77)$$

а радіальна компонента  $u^{(i)}(r,z,t)$  із використанням інтеграла

$$u^{(i)}(r,z,t) = \frac{1}{r} \int_0^r \left[ x q^{(i)}(x,z,t) - x \mathbb{I}_z w^{(i)}(x,z,t) \right] dx. \quad (6.78)$$

Після застосування інтегрального перетворення Лагерра та перетворення Ханкеля до рівнянь (6.67), (6.68) отримаємо послідовності звичайних диференціальних рівнянь

$$d_z^2 \bar{q}_n^{(i)} - V_{1,i}^2 \bar{q}_n^{(i)} = w_{1,i}^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1) \bar{q}_m^{(i)}, \quad (6.79)$$

$$d_z^2 \bar{f}_n^{(i)} - V_{2,i}^2 \bar{f}_n^{(i)} = w_{2,i}^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1) \bar{f}_m^{(i)}, \quad 1 \leq i \leq M, \quad (6.80)$$

де  $\bar{F}_n^{(i)}(x,z) = \int_0^\infty \exp(-lt) L_n(lt) \int_0^\infty r F^{(i)}(r,z,t) J_0(rx) dr dt$  – зображення за Лагерром

та Ганкелем,  $V_{1,i}^2 = x^2 + l^2 \mathbb{H}_i^2$ ,  $V_{2,i}^2 = x^2 + l^2 \mathbb{H}_i^2 h_i^2$ ,  $w_{1,i}^2 = l^2 \mathbb{H}_i^2$ ,  $w_{2,i}^2 = l^2 \mathbb{H}_i^2 h_i^2$ .

З точністю до позначень рівняння (6.79), (6.80) повністю співпадають із аналогічними рівняннями попереднього підрозділу (6.) та (6.), а тому їх загальний розв'язок запишемо у вигляді

$$\bar{q}_n^{(i)}(z) = \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i)} G_{1,j}^{(i)}(z) + B_{n-j}^{(i)} W_{1,j}^{(i)}(z) \right]; \quad (6.81)$$

$$\bar{f}_n^{(i)}(z) = \sum_{j=0}^n [C_{n-j}^{(i)} G_{2,j}^{(i)}(z) + D_{n-j}^{(i)} W_{2,j}^{(i)}(z)], \quad (6.82)$$

де  $A_{n-j}^{(i)}, B_{n-j}^{(i)}, C_{n-j}^{(i)}, D_{n-j}^{(i)}, 1 \leq i \leq M$  – невідомі, які визначаються із крайових умов і умов спряження, а  $G_{1,j}^{(i)}(z), W_{1,j}^{(i)}(z), G_{2,j}^{(i)}(z), W_{2,j}^{(i)}(z)$  – послідовність фундаментальних розв'язків рівнянь (15), які з використанням методу невизначених коефіцієнтів можна подати у вигляді

$$G_{l,j}^{(i)}(z) = e^{-V_{l,i}z} \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{l,i} \frac{(w_{l,i}z)^k}{k!}; \quad W_{l,j}^{(i)}(z) = e^{V_{l,i}z} \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{l,i} \frac{(-w_{l,i}z)^k}{k!}. \quad (6.83)$$

Коефіцієнти  $a_{j,k}^{l,i}$  при цьому задовольняють рекурентним співвідношенням

$$a_{j,k+1}^{l,i} = \frac{w_{l,i}}{2V_{l,i}} \left[ a_{j,k+2}^{l,i} - \sum_{p=k}^{j-1} (j-p+1) a_{p,k}^{l,i} \right]. \quad (6.84)$$

У співвідношеннях (6.84)  $j = 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots, j-1$ , всі  $a_{j,k}^{l,i}$  при  $j < k$  дорівнюють нулю,  $a_{j,0}^{l,i}$  залишаються довільними для всіх  $j$ .

Для знаходження коефіцієнтів  $A_{n-j}^{(i)}, B_{n-j}^{(i)}, C_{n-j}^{(i)}, D_{n-j}^{(i)}, 1 \leq i \leq M$  застосуємо інтегральне перетворення Лагерра за часовою та інтегральне перетворення Ганкеля за радіальною змінними до крайових умов (6.70)-(6.71):

$$\begin{aligned} \left( \frac{k_1^2}{2} - 1 \right) l^2 \sum_{m=0}^n (n-m+1) \bar{q}_m^{(1)} + \frac{1}{\phi_{1,i}^2} (d_z^2 \bar{q}_n^{(1)} + d_z \bar{f}_n^{(1)}) = \\ = \frac{l^2 k_1^2}{2} \sum_{m=0}^n (n-m+1) \bar{p}_z^m; \end{aligned} \quad (6.85)$$

$$\frac{x^2}{\phi_{1,i}^2} [d_z \bar{q}_n^{(1)} + \bar{f}_n^{(1)}] + \frac{k_1^2}{2} l^2 \sum_{m=0}^n (n-m+1) \bar{f}_m^{(1)} = 0, \quad z = 0 \quad (6.86)$$

та умов спряження (6.72)-(6.75):

$$\left(\frac{k_i^2}{2}-1\right)l^2\sum_{m=0}^n(n-m+1)\bar{q}_m^{(i)}+\frac{1}{\mathfrak{d}_{1,i}^2}\left(d_z^2\bar{q}_n^{(i)}+d_z\bar{f}_n^{(i)}\right)=\Omega_i\left\{\left(\frac{k_{i+1}^2}{2}-1\right)\times\right. \\ \left.\times l^2\sum_{m=0}^n(n-m+1)\bar{q}_m^{(i+1)}+\frac{1}{\mathfrak{d}_{1,i+1}^2}\left(d_z^2\bar{q}_n^{(i+1)}+d_z\bar{f}_n^{(i+1)}\right)\right\}; \quad (6.87)$$

$$\frac{x^2}{\mathfrak{d}_{1,i}^2}\left[d_z\bar{q}_n^{(i)}+\bar{f}_n^{(i)}\right]+\frac{k_i^2}{2}l^2\sum_{m=0}^n(n-m+1)\bar{f}_m^{(i)}= \\ =\Omega_i\left\{\frac{x^2}{\mathfrak{d}_{1,i+1}^2}\left[d_z\bar{q}_n^{(i+1)}+\bar{f}_n^{(i+1)}\right]+\frac{k_{i+1}^2}{2}l^2\sum_{m=0}^n(n-m+1)\bar{f}_m^{(i+1)}\right\}; \quad (6.88)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{d}_{1,i}^2}\left[d_z\bar{q}_n^{(i)}+\bar{f}_n^{(i)}\right]=\frac{1}{\mathfrak{d}_{1,i+1}^2}\left[d_z\bar{q}_n^{(i+1)}+\bar{f}_n^{(i+1)}\right]; \quad (6.89)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{d}_{1,i}^2}\left[x^2\bar{q}_n^{(i)}+d_z\bar{f}_n^{(i)}\right]=\frac{1}{\mathfrak{d}_{1,i}^2}\left[x^2\bar{q}_n^{(i+1)}+d_z\bar{f}_n^{(i+1)}\right], \quad z=z_i, 1\leq i\leq M-1; \quad (6.90)$$

$$\bar{q}_n^{(M)}=\bar{f}_n^{(M)}=0, \quad z\rightarrow\infty. \quad (6.91)$$

З умов (6.91) відразу одержимо  $B_l^{(M)}\equiv 0, D_l^{(M)}\equiv 0, l=0,1,2,\mathbf{K}.)$

Решта крайових умов та умов спряження в трансформантах співпадають з відповідними умовами попереднього розділу, а тому решта невідомих  $A_{n-j}^{(i)}, B_{n-j}^{(i)}, C_{n-j}^{(i)}, D_{n-j}^{(i)}$  при  $a_{0,0}^{l,i}=1, a_{j,0}^{l,i}=0, j=1,2,3,\mathbf{K}.$  знаходяться із послідовностей систем рівнянь розмірності  $(4M-2)\times(4M-2).$

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & \mathbf{K} & b_{1,4} & 0 & & \mathbf{K} & 0 \\ b_{2,1} & \mathbf{K} & b_{2,4} & 0 & & \mathbf{K} & 0 \\ b_{3,1} & \mathbf{K} & b_{3,4} & b_{3,5} & \mathbf{K} & 0 & 0 \\ b_{4,1} & \mathbf{K} & b_{4,4} & b_{4,5} & \mathbf{K} & 0 & 0 \\ \mathbb{M} & & \mathbf{K} & & \mathbf{N} & \mathbf{K} & \mathbb{M} \\ 0 & \mathbf{K} & 0 & b_{4M-3,4M-7} & \mathbf{K} & b_{4M-3,4M-3} & b_{4M-3,4M-2} \\ 0 & \mathbf{K} & 0 & b_{4M-2,4M-7} & \mathbf{K} & b_{4M-2,4M-3} & b_{4M-2,4M-2} \\ 0 & & \mathbf{K} & \mathbf{K} & & b_{4M-1,4M-3} & b_{4M-1,4M-2} \\ 0 & & \mathbf{K} & \mathbf{K} & & b_{4M,4M-3} & b_{4M,4M-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n^{(1)} \\ B_n^{(1)} \\ C_n^{(1)} \\ D_n^{(1)} \\ \mathbb{M} \\ C_n^{(M-1)} \\ D_n^{(M-1)} \\ A_n^{(M)} \\ C_n^{(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_n^{(1)} \\ H_n^{(2)} \\ H_n^{(3)} \\ H_n^{(4)} \\ \mathbb{M} \\ H_n^{(4M-5)} \\ H_n^{(4M-4)} \\ H_n^{(4M-3)} \\ H_n^{(4M-2)} \end{pmatrix} \quad (6.92)$$

Зведення цієї системи до трикутного вигляду та її рекурентний розв'язок дає змогу формально завершити побудову розв'язку задачі (6.67)–(6.76). При цьому відмінні від нуля компоненти вектора пружних переміщень і тензора напружень будуть мати вигляд

$$\begin{aligned}
 u^{(i)}(r, z, t) &= \int_0^\infty [\bar{q}^{(i)}(x, z, t) - \mathbb{I}_z \bar{w}^{(i)}(x, z, t)] J_1(rx) dx ; \\
 w^{(i)}(r, z, t) &= \int_0^\infty x \bar{w}^{(i)}(x, z, t) J_0(rx) dx, \quad q^{(i)}(r, z, t) = \int_0^\infty x \bar{q}^{(i)}(x, z, t) J_0(rx) dx ; \\
 \frac{s_{rz}^{(i)}(r, z, t)}{r_i c_{1,i}^2} &= - \int_0^\infty \left[ \bar{f}^{(i)}(x, z, t) + 2 \left( \frac{x}{h_i} \right)^2 \bar{w}^{(i)}(x, z, t) \right] J_1(rx) dx ; \\
 \frac{s_{rr}^{(i)}(r, z, t)}{r_i c_{1,i}^2} &= q^{(i)}(r, z, t) - \frac{2}{h_i^2} \left( \mathbb{I}_z w^{(i)}(r, z, t) + \frac{1}{r} u^{(i)}(r, z, t) \right) ; \\
 \frac{s_{jj}^{(i)}(r, z, t)}{r_i c_{1,i}^2} &= \left( 1 - \frac{2}{h_i^2} \right) q^{(i)}(r, z, t) + \frac{2}{h_i^2} \frac{u^{(i)}(r, z, t)}{r} ; \\
 \frac{s_{zz}^{(i)}(r, z, t)}{r_i c_{1,i}^2} &= \left( 1 - \frac{2}{h_i^2} \right) q^{(i)}(r, z, t) + \frac{2}{h_i^2} \mathbb{I}_z w^{(i)}(r, z, t), \tag{6.94}
 \end{aligned}$$

де  $\{\bar{q}^{(i)}, \bar{f}^{(i)}, \bar{w}^{(i)}\} = l \sum_{n=0}^\infty \{\bar{q}_n^{(i)}, \bar{f}_n^{(i)}, \bar{w}_n^{(i)}\} L_n(lt)$ , а компоненти  $\bar{w}_n^{(i)}$  обчислюються з початкової задачі (6.77), яка в трансформантах за Лагерром має вигляд рекурентного рівняння

$$l^2 \sum_{m=0}^n (n-m+1) w_n^{(i)} = \frac{1}{d_{1,i}^2} [f_n^{(i)} + \mathbb{I}_z q_n^{(i)}], \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K}. \tag{6.95)}$$

Враховуючи, що для довільної послідовності  $F_n$  при  $F_{-1} = F_{-2} = 0$ , виконується рівність

$$\sum_{m=0}^n (n-m+1) (F_m - 2F_{m-1} + F_{m-2}) = F_n, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K},$$

розв'язок рівнянь (6.95) знайдемо за формулами

$$w_n^{(i)} = \frac{1}{h_i^2 l^2} [f_n^{(i)} - 2f_{n-1}^{(i)} + f_{n-2}^{(i)} + d_z q_n^{(i)} - 2d_z q_{n-1}^{(i)} + d_z q_{n-2}^{(i)}]. \quad (6.96)$$

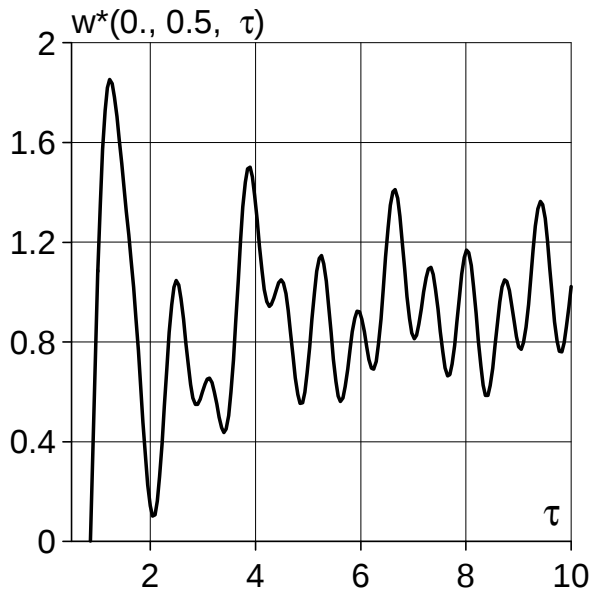


Рис. 1.

Нормальні переміщення в центрі  
поверхні спрężення

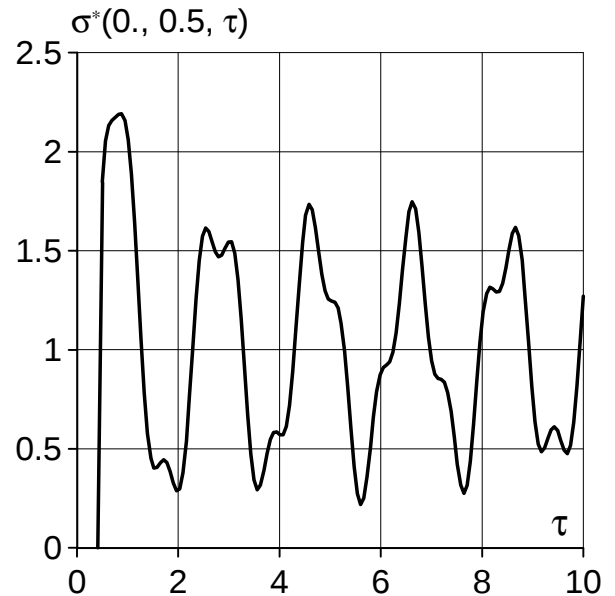


Рис. 2.

Нормальні напруження в центрі  
поверхні спрężення.

Для апробації запропонованої методики були обчислені нормальні переміщення  $w(r, z, t)$  і нормальні напруження  $s_{zz}(r, z, t)$  на межі поділу пружного шару й півпростору, зумовлених ударним навантаженням поверхні  $z=0$  у вигляді  $p(r, t) = p^* \sqrt{1-r^2} S_+(1-r) S_+(t)$  при таких значеннях вхідних параметрів:  $g_1 = h_1/h = 0.5$ ;  $h_1 = 1$ ;  $h_2 = 0.943$ ;  $h_1 = h_2 = 1.528$ ;  $\Omega_1 = 1.543$ . При цьому переміщення й напруження були віднесені до відповідних розв'язків статичних задач, які одержані граничним переходом ( $l \rightarrow 0$ ) з розв'язку для  $w_n^{(1)}(r, z)$  та  $s_{zz,n}^{(1)}(r, z)$  при  $n=0$ .

На рис. 1 і рис. 2 подано результати розрахунку знерозмірених переміщень  $w^*(r, z, t) \equiv w^{(1)}(r, z, t)/w_{st}^{(1)}(r, z)$  і напружень  $s^*(r, z, t) \equiv s_{zz}^{(1)}(r, z, t)/s_{zz,st}^{(1)}(r, z)$  на поверхні поділу матеріалів шару й півпростору в точці  $r=0$ .

Помітно, що зміна в часі переміщень і нормальних напружень під час перехідного періоду має форму коливань біля стану статичної рівноваги (одиничного значення). Для переміщень і для напружень перша хвиля приходить у момент часу  $t = 0.5$ , що повністю відповідає фізиці явища. Найбільшого значення амплітуда коливань досягає в перші після приходу хвилі стиску моменти часу й надалі зменшується. Відповідні екстремальні значення на початку перехідного періоду досягаються під час приходу хвиль, відбитих від поверхні тіла й поверхні поділу матеріалів. Наступне багаторазове відбиття приводить до збільшення частоти коливань і зменшення їх амплітуди.

### **Висновки до розділу 6**

- із використанням неklasичного розщеплення рівнянь руху пружного середовища здійснено нове формулювання динамічної задачі теорії пружності для кусково-однорідних тіл із плоско-паралельними границями поділу;
- розроблено аналітичну методику побудови точних розв'язків динамічних задач теорії пружності для плоскошаруватих тіл із довільною кількістю складових, їх товщини та контрастності;
- досліджено особливості процесу нестационарних коливань композитного шаруватого тіла, залежно від кількості складових та за незмінності об'ємного відношення матеріалів та встановлено при цьому ефект "розмивання" напруженого стану;
- проведено числову апробацію розробленої методики на динамічній задачі для півпростору із покриттям.

## РОЗДІЛ 7

# НЕСТАЦІОНАРНІ КОЛИВАННЯ РАДІАЛЬНО-ШАРУВАТИХ ТІЛ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ФОРМИ

## 7.1. Одновимірні динамічні задачі теорії пружності для тіл із системою циліндричних поверхонь відбиття

### 7.1.1. Нестационарні коливання системи концентричних циліндрів.

Розглядається композит, що складається з  $M$  ладених циліндричних шарів різної товщини і з різними механічними властивостями. Циліндр з індексом «1» є внутрішнім шаром композита, а з індексом « $M$ » - зовнішнім. Джерелом нестационарних процесів в композиті є високоінтенсивне ударне навантаження його внутрішньої поверхні (рис. 7.1).

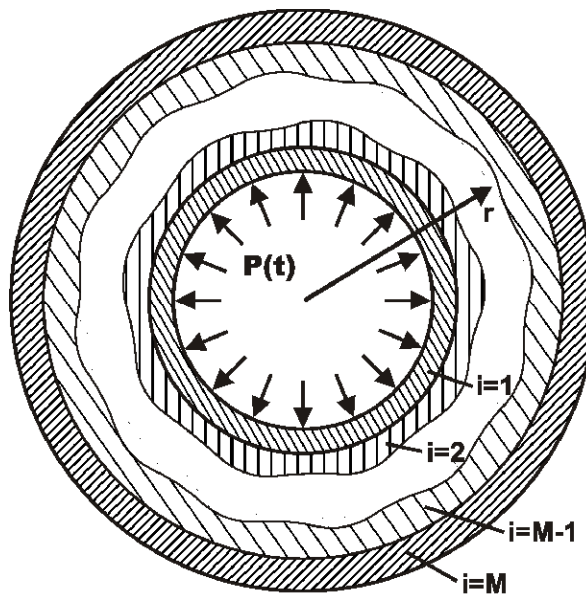


Рис. 7.1. Схема задачі.

Для визначення поля напружень і деформацій в композиті, в припущенні, що на лінії розділу циліндричних шарів виконуються умови ідеального механічного контакту, знайдемо розв'язок початково-крайової задачі:

$$r^{-1} \partial_r \left( r \partial_r u^{(i)} \right) - r^{-2} u^{(i)} - \partial_t^2 u^{(i)} = 0, \quad i = \overline{1, M}; \quad (7.1)$$

$$s_{rr}^{(1)} = -p_0(t), \quad r = r_0 \quad s_{rr}^{(M)} = 0, \quad r = 1; \quad (7.2)$$

$$\left. \begin{aligned} u^{(i)} &= u^{(i+1)} \\ s_{rr}^{(i)} &= s_{rr}^{(i+1)} \end{aligned} \right\} \quad r = r_i, \quad i = \overline{1, M-1}; \quad (7.3)$$

$$u^{(i)} = \partial_t u^{(i)} = 0, \quad t = 0, \quad i = \overline{1, M}, \quad (7.4)$$

де  $r = r/R_M$  - безрозмірна змінна циліндричної системи координат,  $r_i = R_i/R_M$ ,  $R_0$ ,  $R_M$  - радіуси внутрішньої і зовнішньої поверхонь композита  $R_i$ ,  $i = \overline{1, M-1}$  - радіуси поверхонь спряження між шарами,  $u^{(i)}(r, t)$  - віднесене до  $R_M$  радіальне переміщення в тілі,  $\theta_i = \frac{c_{i,1}}{c_1}$ ,  $t = \frac{c_1 t}{R_M}$  - динамічний час,  $c_{i,1}$  - швидкість поширення повздовжніх хвиль в матеріалі  $i$ -го шару,  $c_1$  - швидкість повздовжніх хвиль в деякому матеріалі,  $s_{rr}^{(i)}$  - радіальні напруження в  $i$ -му шарі, які можна записати за допомогою співвідношень закону Гука:

$$s_{rr}^{(i)} = \frac{E_i(1-n_i)}{(1+n_i)(1-2n_i)} \partial_r u^{(i)} + \frac{E_i n_i}{(1+n_i)(1-2n_i)} \frac{u^{(i)}}{r}, \quad (7.5)$$

або

$$s_{rr}^{(i)} = m_i \left( k_i^2 \partial_r u^{(i)} + (k_i^2 - 2) \frac{u^{(i)}}{r} \right), \quad (7.6)$$

де

$$k^2 = \frac{l + 2m}{m}. \quad (7.7)$$

До задачі (7.1)-(7.4) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра. В результаті, враховуючи результати другого розділу, прийдемо до послідовностей задач

$$r^{-1} \partial_r (r \partial_r u_n^{(i)}) - r^{-2} u_n^{(i)} - w_i^2 u_n^{(i)} = w_i^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1) u_m^{(i)}, \quad i = \overline{1, M}; \quad (7.8)$$

$$s_{rr\,n}^{(1)} = -p_{0,n}, \quad r = r_0; \quad s_{rr\,n}^{(M)} = -p_{M,n}, \quad r = 1; \quad (7.9)$$

$$\left. \begin{aligned} u_n^{(i)} &= u_n^{(i+1)} \\ s_{rr\ n}^{(i)} &= s_{rr\ n}^{(i+1)} \end{aligned} \right\} r = r_i, \quad i = \overline{1, M-1}. \quad (7.10)$$

Тут  $X_n(r) = \int_0^\infty \exp(-lFo) X(r, Fo) L_n(l, Fo) dFo$ ,  $n = 0, 1, \dots$  - зображення за

Лагерром,  $w_i = l\phi_i$

Розв'язок послідовності (7.8), як відомо з другого розділу роботи, можна записати у вигляді алгебричної згортки:

$$u_n^{(i)}(r) = \sum_{j=0}^n \left[ C_{n-j}^{(i)} G_j(r) + D_{n-j}^{(i)} W_j(r) \right] \quad (7.11)$$

де

$$G_j(r) = \sum_{k=0}^j a_{j,k} \left( \frac{rw_i}{2} \right)^k \frac{I_{k+1}(rw_i)}{k!}, \quad W_j(r) = \sum_{k=0}^j a_{j,k} \left( \frac{-rw_i}{2} \right)^k \frac{K_{k+1}(rw_i)}{k!}, \quad (7.12)$$

а коефіцієнти  $a_{j,k+1}$  задовольняють рекурентним співвідношенням

$$a_{j,k+1} = \sum_{m=k}^{j-1} (j-m+1) a_{m,k}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, \mathbf{K}, j-1. \quad (7.13)$$

Безпосередня підстановка розв'язку (7.11) в умови (7.9)-(7.10) приводить до співвідношень:

$$\begin{aligned} & k_1^2 \sum_{j=0}^n \left[ C_{n-j}^{(1)} G_j'(w_0 r_0) + D_{n-j}^{(1)} W_j'(w_0 r_0) \right] + \\ & + \frac{k_1^2 - 2}{r_0} \sum_{j=0}^n \left[ C_{n-j}^{(1)} G_j(w_0 r_0) + D_{n-j}^{(1)} W_j(w_0 r_0) \right] = -\frac{p_{n,0}}{m_1}; \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$\sum_{j=0}^n \left[ C_{n-j}^{(i)} G_j(w_i r_i) + D_{n-j}^{(i)} W_j(w_i r_i) \right] = \sum_{j=0}^n \left[ C_{n-j}^{(i+1)} G_j(w_i r_i) + D_{n-j}^{(i+1)} W_j(w_i r_i) \right]; \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned}
& m_i k_i^2 \sum_{j=0}^n \left[ C_{n-j}^{(i)} G_j'(w_i r_i) + D_{n-j}^{(i)} W_j'(w_i r_i) \right] + \frac{m_i (k_i^2 - 2)}{r_i} \sum_{j=0}^n \left[ C_{n-j}^{(i)} G_j(w_i r_i) + D_{n-j}^{(i)} W_j(w_i r_i) \right] = \\
& = m_{i+1} c_{i+1}^2 \sum_{j=0}^n \left[ C_{n-j}^{(i+1)} G_j'(w_{i+1} r_i) + D_{n-j}^{(i+1)} W_j'(w_{i+1} r_i) \right] + \\
& + \frac{m_{i+1} (k_{i+1}^2 - 2)}{r_i} \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i+1)} G_j(w_{i+1} r_i) + B_{n-j}^{(i+1)} W_j(w_{i+1} r_i) \right]; \tag{7.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^n \left[ C_{n-j}^{(M)} G_j'(w_M) + D_{n-j}^{(M)} W_j'(w_M) \right] + \\
& + \frac{k_M^2 - 2}{k_M^2} \sum_{j=0}^n \left[ C_{n-j}^{(M)} G_j(w_M) + D_{n-j}^{(M)} W_j(w_M) \right] = 0; \tag{7.17}
\end{aligned}$$

В рівностях (7.14)-(7.17) залишимо в лівій частині доданки при  $j = 0$ , а решту перенесемо в праву частину. В результаті, як і в попередніх розділах, одержимо системи алгебричних рівнянь

$$[b_{k,l}] \{C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, \dots, C_n^{(l)}, D_n^{(l)}, \dots, C_n^{(M)}, D_n^{(M)}\}^T = \{H_{n,k}\}^T, \tag{7.18}$$

де матриця  $b_{k,l}$  не залежить від номера  $n$  і має вигляд

$$\begin{pmatrix}
b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & b_{2i,2i-1} & b_{2i,2i} & b_{2i,2i+1} & b_{2i,2i+2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_{2i+1,2i-1} & b_{2i+1,2i} & b_{2i+1,2i+1} & b_{2i+1,2i+2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{2M,2M-1} & b_{2M,2M}
\end{pmatrix} \tag{7.19}$$

а її ненульові коефіцієнти обчислюються за формулами

$$\begin{aligned}
b_{1,1} &= k_1^2 w_1 I_0(r_0 w_1) - \frac{2}{r_0} I_1(r_0 w_1); \quad b_{1,2} = -k_1^2 w_1 K_0(r_0 w_1) - \frac{2}{r_0} K_1(r_0 w_1); \\
b_{2i,2i-1} &= I_1(w_i r_i); \quad b_{2i,2i} = K_1(w_i r_i); \quad b_{2i,2i+1} = -I_1(w_{i+1} r_i); \quad b_{2i,2i+2} = -K_1(w_{i+1} r_i);
\end{aligned}$$

$$b_{2i+1,2i-1} = m_i k_i^2 w_i I_0(w_i r_i) - \frac{2m_i}{r_i} I_1(w_i r_i); \quad b_{2i+1,2i} = -m_i k_i^2 w_i K_0(w_i r_i) - \frac{2m_i}{r_i} K_1(w_i r_i);$$

$$b_{2i+1,2i+1} = -m_{i+1} k_{i+1}^2 w_{i+1} I_0(w_{i+1} r_i) + \frac{2m_{i+1}}{r_i} I_1(w_{i+1} r_i); \quad (7.20)$$

$$b_{2i+1,2i+2} = m_{i+1} k_{i+1}^2 w_{i+1} K_0(w_{i+1} r_i) + \frac{2m_{i+1}}{r_i} K_1(w_{i+1} r_i);$$

$$b_{2M,2M-1} = k_M^2 w_M I_0(w_M) - 2I_1(w_M); \quad b_{2M,2M} = -k_M^2 w_M K_0(w_M) - 2K_1(w_M);$$

Відповідно, коефіцієнти стовпця вільних членів в системах (7.18) мають вигляд

$$H_{1,n} = -\frac{p_{0,n}}{m_1} - c_1^2 \sum_{j=1}^n [C_{n-j}^{(1)} G_j'(w_0 r_0) + D_{n-j}^{(1)} W_j'(w_0 r_0)] - \frac{c_1^2 - 2}{r_0} \sum_{j=1}^n [C_{n-j}^{(1)} G_j(w_0 r_0) + D_{n-j}^{(1)} W_j(w_0 r_0)]; \quad (7.21)$$

$$H_{2i,n} = \sum_{j=1}^n [C_{n-j}^{(i+1)} G_j(w_{i+1} r_i) + D_{n-j}^{(i+1)} W_j(w_{i+1} r_i)] - \sum_{j=1}^n [C_{n-j}^{(i)} G_j(w_i r_i) + D_{n-j}^{(i)} W_j(w_i r_i)];$$

$$H_{2i+1,n} = m_{i+1} k_{i+1}^2 \sum_{j=1}^n [C_{n-j}^{(i+1)} G_j'(w_{i+1} r_i) + D_{n-j}^{(i+1)} W_j'(w_{i+1} r_i)] + \frac{m_{i+1} (k_{i+1}^2 - 2)}{r_i} \times \\ \times \sum_{j=1}^n [C_{n-j}^{(i+1)} G_j(w_{i+1} r_i) + D_{n-j}^{(i+1)} W_j(w_{i+1} r_i)] - m_i k_i^2 \sum_{j=1}^n [C_{n-j}^{(i)} G_j'(w_i r_i) + D_{n-j}^{(i)} W_j'(w_i r_i)] - \\ - \frac{m_i (k_i^2 - 2)}{r_i} \sum_{j=1}^n [C_{n-j}^{(i)} G_j(w_i r_i) + D_{n-j}^{(i)} W_j(w_i r_i)];$$

$$H_{M,n} = -k_M^2 \sum_{j=1}^n [C_{n-j}^{(M)} G_j'(w_M) + D_{n-j}^{(M)} W_j'(w_M)] - (k_M^2 - 2) \sum_{j=1}^n [C_{n-j}^{(M)} G_j(w_M) + D_{n-j}^{(M)} W_j(w_M)]; \quad (7.22)$$

Матрицю  $[b_{k,l}]$ , як і в попередніх розділах роботи, зведемо до діагонального вигляду. Для цього розглянемо перший верхній блок

$$\left( \begin{array}{cccc|c} b_{1,1} & b_{1,2} & 0 & 0 & H_{n,1} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & H_{n,2} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & H_{n,3} \end{array} \right) \quad (7.23)$$

який після елементарних перетворень набуде вигляду:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} b_{1,1}^* & b_{1,2}^* & 0 & 0 & H_{n,1}^* \\ 0 & b_{2,2}^* & b_{2,3}^* & b_{2,4}^* & H_{n,2}^* \\ 0 & 0 & b_{3,3}^* & b_{3,4}^* & H_{n,3}^* \end{array} \right), \quad (7.24)$$

де

$$\begin{aligned} b_{1,1}^* &= b_{1,1}, \quad b_{1,2}^* = b_{1,2}, \quad H_{n,1}^* = H_{n,1}, \quad b_{2,2}^* = b_{1,2}b_{2,1} - b_{1,1}b_{2,2}, \quad b_{2,3}^* = -b_{2,3}b_{1,1}, \\ b_{2,4}^* &= -b_{2,4}b_{1,1}, \quad H_{n,2}^* = H_{n,1}b_{2,1} - H_{n,2}b_{1,1}, \\ b_{3,3}^* &= -b_{1,1}b_{2,3}(b_{1,2}b_{3,1} - b_{1,1}b_{3,2}) + b_{1,1}b_{3,3}b_{2,2}^*, \\ b_{3,4}^* &= -b_{1,1}b_{2,4}(b_{1,2}b_{3,1} - b_{1,1}b_{3,2}) + b_{1,1}b_{3,4}b_{2,2}^*, \\ H_{n,3}^* &= H_{n,2}^*(b_{1,2}b_{3,1} - b_{1,1}b_{3,2}) - (H_{n,1}b_{3,1} - H_{n,3}b_{1,1})b_{2,2}^*. \end{aligned}$$

Аналогічно поступимо із загальним блоком, який після перетворень набуде вигляду

$$\left( \begin{array}{cccc|c} b_{2i-1,2i-1}^* & b_{2i-1,2i}^* & 0 & 0 & H_{n,2i-1}^* \\ 0 & b_{2i,2i}^* & b_{2i,2i+1}^* & b_{2i,2i+2}^* & H_{n,2i}^* \\ 0 & 0 & b_{2i+1,2i+1}^* & b_{2i+1,2i+2}^* & H_{n,2i+1}^* \end{array} \right). \quad (7.25)$$

Останній блок після перетворень набуде вигляду:

$$\left( \begin{array}{cc|c} b_{2M-1,2M-1}^* & b_{2M-1,2M}^* & H_{n,2M-1}^* \\ 0 & b_{2M,2M}^* & H_{n,2M}^* \end{array} \right). \quad (7.26)$$

Таким чином ми звели систему (7.24) до трикутної системи рівнянь:

$$\begin{pmatrix} b_{1,1}^* & b_{1,2}^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_{2,2}^* & b_{2,3}^* & b_{2,4}^* & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{2i,2i}^* & b_{2i,2i+1}^* & b_{2i,2i+2}^* & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{2i+1,2i+1}^* & b_{2i+1,2i+2}^* & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & b_{2M-1,2M-1}^* & b_{2M-1,2M}^* \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & b_{2M,2M}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n^{(1)} \\ D_n^{(1)} \\ \mathbb{M} \\ C_n^{(i)} \\ D_n^{(i)} \\ \mathbb{M} \\ \mathbb{M} \\ D_n^{(M)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{n,1}^* \\ H_{n,2}^* \\ \mathbb{M} \\ H_{n,2i}^* \\ H_{n,2i+1}^* \\ \mathbb{M} \\ \mathbb{M} \\ H_{n,2M}^* \end{pmatrix} \quad (7.27)$$

в якій коефіцієнти матриці та вільні члени визначаються рекурентними співвідношеннями

$$b_{1,1}^* = b_{1,1}, \quad b_{1,2}^* = b_{1,2}, \quad b_{2i,2i}^* = b_{2i-1,2i} b_{2i,2i-1} - b_{2i,2i} b_{2i-1,2i-1},$$

$$b_{2i,2i+1}^* = -b_{2i,2i+1} b_{2i-1,2i-1}, \quad b_{2i,2i+2}^* = -b_{2i,2i+2} b_{2i-1,2i-1},$$

$$b_{2i+1,2i+1}^* = b_{2i,2i+1}^* (b_{2i-1,2i} b_{2i+1,2i-1} - b_{2i+1,2i} b_{2i-1,2i-1}) + b_{2i,2i}^* b_{2i+1,2i+1} b_{2i-1,2i-1},$$

$$b_{2i+1,2i+2}^* = b_{2i,2i+2}^* (b_{2i-1,2i} b_{2i+1,2i-1} - b_{2i+1,2i} b_{2i-1,2i-1}) + b_{2i,2i}^* b_{2i+1,2i+2} b_{2i-1,2i-1},$$

$$b_{2M,2M}^* = b_{2M-1,2M}^* b_{2M,2M-1} - b_{2M,2M} b_{2M-1,2M-1}^*,$$

$$H_{n,1}^* = H_{n,1}, \quad H_{n,2i}^* = H_{n,2i-1} b_{2i,2i-1} - H_{n,2i} b_{2i-1,2i-1},$$

$$H_{n,2i+1}^* = H_{n,2i}^* (b_{2i-1,2i} b_{2i+1,2i-1} - b_{2i+1,2i} b_{2i-1,2i-1}) - (H_{n,2i-1} b_{2i+1,2i-1} - H_{n,2i+1} b_{2i-1,2i-1}) b_{2i,2i}^*,$$

$$H_{n,2M}^* = H_{n,2M-1}^* b_{2M,2M-1}^* - H_{n,2M} b_{2M-1,2M-1}^*.$$

Застосовуючи до системи (7.31) «зворотній» хід Гауса, одержимо її рекурентний розв'язок

$$\begin{aligned} C_n^{(M)} &= \frac{H_{n,2M-1}^* - D_n^{(M)} b_{2M-1,2M}^*}{b_{2M-1,2M-1}^*}; \quad D_n^{(M)} = \frac{H_{n,2M}^*}{b_{2M,2M}^*}; \quad C_n^{(i)} = \frac{H_{n,2i-1}^* - B_n^{(i)} b_{2i-1,2i}^*}{b_{2i-1,2i-1}^*}; \\ D_n^{(i)} &= \frac{H_{n,2i}^* - C_n^{(i+1)} b_{2i,2i+1}^* - D_n^{(i+1)} b_{2i,2i+2}^*}{b_{2i,2i}^*}; \end{aligned} \quad (7.28)$$

Визначивши всі коефіцієнти  $C_n^{(i)}, D_n^{(i)}$  з рекурентних співвідношень (7.28) остаточний розв'язок задачі одержимо у вигляді:

$$u^{(i)}(r, t) = l \sum_{n=0}^{\infty} L_n(l t) \sum_{j=0}^n \left[ C_{n-j}^{(i)} G_j(r) + D_{n-j}^{(i)} W_j(r) \right]. \quad (7.29)$$

З метою числової апробації розв'язку (7.29) та встановлення відповідності між кількістю утримуваних складових в ряді та точністю розрахунку переміщень порівняємо розв'язок задачі про нестационарні коливання товстостінного однорідного циліндра, одержаний із використанням інтегрального перетворення Лапласа в праці [ ], та розв'язок (7.29) при  $M = 1$ . Зазначимо, що в роботі [ ] розв'язок одержано при  $p(t) = A(1 - \cos(\omega t))$ .

За формулами (7.29) розраховувались переміщення в однорідному порожнистому циліндрі з відносними радіусами внутрішньої поверхні  $r_0 = 0,5$  та зовнішньої  $r_1 = 1$ . В таблиці 1. наведені результати розрахунку вказаних переміщень в середині циліндра  $r = 0,75$  для різних значень  $t$  та різної кількості членів ряду за Лагерром та результатами, отриманими із використанням інтегрального перетворення Лапласа. З наведеного видно, що хороша збіжність двох методів спостерігається при утриманні 60 членів ряду за поліномами Лагерра.

Таблиця 7.1

Порівняння результатів, отриманих різними методами

| $t$    | $u(0.75, t) \cdot 10^4$<br>Лаплас | $u^*(0.75, t) \cdot 10^4$ , Лагерр |        |        |        |        |        |
|--------|-----------------------------------|------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
|        |                                   | N=28                               | N=34   | N=48   | N=52   | N=56   | N=60   |
| 0.1000 | 0.0550                            | 0.0856                             | 0.0708 | 0.0618 | 0.0576 | 0.0564 | 0.0554 |
| 0.2000 | 0.1356                            | 0.1865                             | 0.1633 | 0.1490 | 0.1414 | 0.1388 | 0.1360 |
| 0.3000 | 0.2331                            | 0.2810                             | 0.2620 | 0.2496 | 0.2411 | 0.2376 | 0.2335 |
| 0.4000 | 0.3372                            | 0.3653                             | 0.3567 | 0.3504 | 0.3442 | 0.3411 | 0.3374 |
| 0.5000 | 0.4378                            | 0.4367                             | 0.4407 | 0.4421 | 0.4405 | 0.4394 | 0.4383 |
| 0.6000 | 0.5263                            | 0.4940                             | 0.5096 | 0.5187 | 0.5231 | 0.5245 | 0.5257 |

|        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0.7000 | 0.5964 | 0.5366 | 0.5613 | 0.5769 | 0.5870 | 0.5911 | 0.5958 |
| 0.8000 | 0.6445 | 0.5647 | 0.5952 | 0.6153 | 0.6301 | 0.6364 | 0.6440 |
| 0.9000 | 0.6693 | 0.5792 | 0.6119 | 0.6342 | 0.6519 | 0.6595 | 0.6673 |
| 1.0000 | 0.6714 | 0.5810 | 0.6126 | 0.6348 | 0.6533 | 0.6612 | 0.6692 |
| 1.1000 | 0.6530 | 0.5716 | 0.5993 | 0.6193 | 0.6364 | 0.6437 | 0.6531 |
| 1.2000 | 0.6172 | 0.5524 | 0.5742 | 0.5902 | 0.6041 | 0.6099 | 0.6169 |
| 1.3000 | 0.5679 | 0.5253 | 0.5395 | 0.5503 | 0.5597 | 0.5633 | 0.5669 |
| 1.4000 | 0.5090 | 0.4916 | 0.4976 | 0.5024 | 0.5063 | 0.5075 | 0.5085 |
| 1.5000 | 0.4444 | 0.4530 | 0.4505 | 0.4492 | 0.4474 | 0.4461 | 0.4449 |
| 1.6000 | 0.3777 | 0.4111 | 0.4005 | 0.3932 | 0.3859 | 0.3823 | 0.3771 |
| 1.7000 | 0.3119 | 0.3671 | 0.3493 | 0.3365 | 0.3245 | 0.3190 | 0.3121 |
| 1.8000 | 0.2496 | 0.3223 | 0.2985 | 0.2812 | 0.2654 | 0.2584 | 0.2503 |
| 1.9000 | 0.1926 | 0.2778 | 0.2495 | 0.2286 | 0.2102 | 0.2025 | 0.1947 |
| 2.0000 | 0.1423 | 0.2346 | 0.2032 | 0.1801 | 0.1604 | 0.1524 | 0.1435 |
| 2.1000 | 0.0994 | 0.1935 | 0.1605 | 0.1364 | 0.1168 | 0.1091 | 0.1005 |
| 2.2000 | 0.0642 | 0.1550 | 0.1220 | 0.0981 | 0.0798 | 0.0729 | 0.0649 |
| 2.3000 | 0.0365 | 0.1198 | 0.0881 | 0.0656 | 0.0494 | 0.0437 | 0.0367 |
| 2.4000 | 0.0158 | 0.0880 | 0.0589 | 0.0387 | 0.0256 | 0.0179 | 0.0161 |
| 2.5000 | 0.0013 | 0.0600 | 0.0345 | 0.0175 | 0.0048 | 0.0019 | 0.0013 |

Крім того, було проведено числове дослідження напруженого стану в трьохшаровому композиті. Числовий аналіз проводився для тришарового циліндра, виготовленого з кераміки ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) ( $E_1 = 70$  ГПа,  $n_1 = 0,33$ ) і алюмінієвого сплаву ( $E_2 = 343$  ГПа,  $n_2 = 0,22$ ), причому циліндричні шари ( $r_0 = 0,5$ ;  $r_1 = 0,6$ ;  $r_2 = 0,9$ ;  $r_3 = 1$ ) з кераміки були зовнішнім та внутрішнім шаром, а з алюмінієвого сплаву – серединним. Навантаження внутрішньої поверхні складеного циліндра було імпульсного типу

$$p_1(t) = \begin{cases} \left[ (0.5 - t)^2 - 0.25 \right]^2, & t \leq 1 \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

На рисунку 7.2 зображено розподіл радіальних переміщень в часі для різних значень радіальної змінної. Наведені результати відповідають фізичній картині деформування циліндричного тіла – час приходу сигналу відповідає геометричному розташуванню точки, перший імпульс фактично повторює імпульс навантаження.

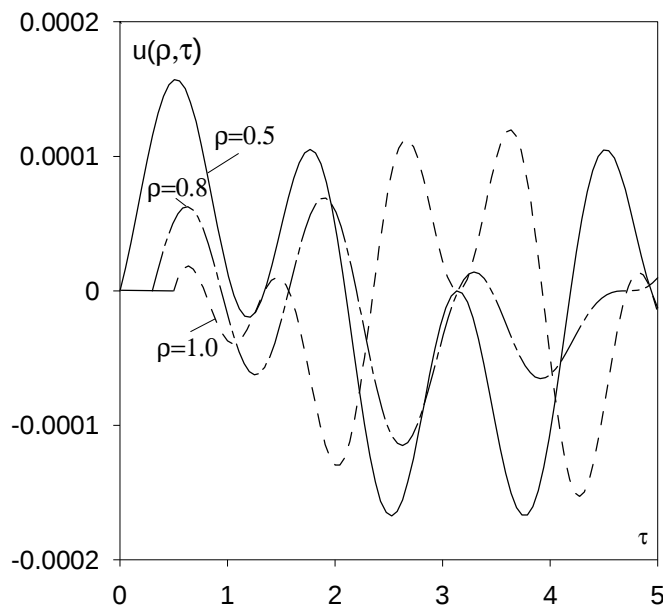


Рис. 7.2. Розподіл радіальних переміщень в часі

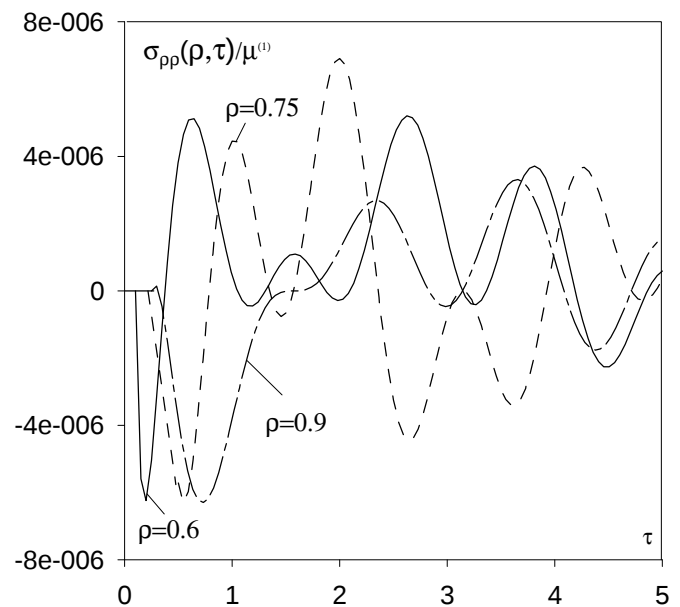


Рис. 7.3. Розподіл радіальних напружень в часі

На рисунку 7.3 подано результати розрахунку безрозмірних радіальних напружень на поверхнях поділу циліндричних шарів та в центрі композитного тіла. З наведеного видно, що після проходження імпульсу навантаження вказані напруження зменшують амплітуду коливань і здійснюють їх біля положення статичної рівноваги. Вплив неоднорідності циліндричного тіла відчутно спостерігається в перші після проходження імпульсу моменти часу і згодом внаслідок накладання набігаючих і відбитих від поверхонь спряження хвиль нівелюється.

### 7.1.2. Нестационарні коливання простору із циліндричною вкладкою.

В попередньому підрозділі використовувався результат, одержаний для однорідного циліндра методом інтегрального перетворення Лапласа. При цьому обернення за Лапласом проводилось із використанням теореми розкладу, що є наслідком відомої теореми про лишки. Слід зазначити, що в піонерських працях, в яких закладалися основи операційного числення (методу перетворення Лапласа), у тому числі і у згаданій праці [ ] проводиться весь спектр необхідних доведень та обґрунтувань, що дають змогу провести математично строге обернення за Лапласом. Зокрема для використаного нами випадку циліндра було проведено аналіз характеристичного рівняння та його коренів, що дало змогу правильно застосувати теорему про лишки. Зазначимо, що у випадку, коли один із розмірів об'єкту, що розглядається є безмежним, використати теорему про лишки не вдається, оскільки всі корені характеристичного рівняння є точками галуження і обчислення контурного інтегралу (формули обернення перетворення Лапласа) проводиться вже іншими методами. Покажемо на конкретному прикладі, що застосування перетворення Лагерра є практично однотипним для скінченних тіл та напівбезмежних середовищ. Для наочності та простоти всіх викладок обмежимося випадком простору із циліндричним включенням, який легко узагальнюється на випадок простору із системою циліндричних вкладок [ ].

Розглянемо пружне середовище з циліндричним отвором, в який без натягу та зазору припасовано пружний циліндр із відмінними від середовища механічними властивостями (рис. 7.4).

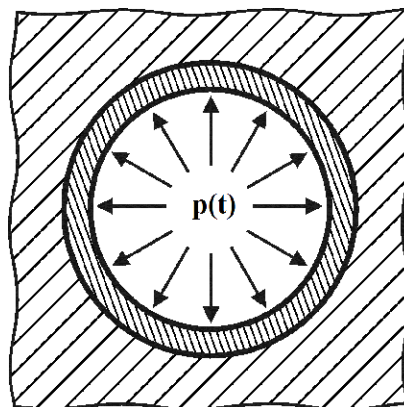


Рис.7.4. Схема задачі

Джерелом нестационарних процесів в такому тілі є змінне в часі силове навантаження внутрішньої поверхні циліндра  $p(t)$ .

Для визначення поля напружень і деформацій в циліндрі та просторі, в припущенні, що на поверхні їх поділу виконуються умови ідеального механічного контакту, знайдемо розв'язок початково-крайової задачі:

$$r^{-1} \partial_r (r \partial_r u^{(i)}) - r^{-2} u^{(i)} - \partial_i^2 \partial_t^2 u^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2; \quad (7.30)$$

$$s_{rr}^{(1)} = -p^*(t), \quad r = r_0; \quad u^{(2)} = 0, \quad r \rightarrow \infty; \quad (7.31)$$

$$u^{(1)} = u^{(2)}, \quad s_{rr}^{(1)} = s_{rr}^{(2)} \quad r = 1; \quad (7.32)$$

$$u^{(i)} = \partial_t u^{(i)} = 0, \quad t = 0, \quad i = 1, 2, \quad (7.33)$$

де  $r = r/R_1$  – безрозмірна радіальна змінна циліндричної системи координат;  $r_0 = R_0/R_1$ ,  $R_0, R_1$  – відповідно, радіуси внутрішньої та зовнішньої поверхні циліндра,  $u^{(i)}(r, t)$  – віднесене до  $R_1$  радіальне переміщення в циліндрі ( $i = 1$ ) та просторі ( $i = 2$ );  $\partial_i = \frac{c_{i,1}}{c_{i,1}}$ ,  $t = \frac{c_{i,1} t}{R_1}$  – безрозмірний час;  $c_{i,1}$  – швидкість розповсюдження хвиль розширення в матеріалі циліндра та простору;  $s_{rr}^{(i)}(r, t)$  – радіальні напруження, які визначаються законом Гука (7.6).

Застосування інтегрального перетворення Лагерра до задачі (7.30)-(7.33) приведе нас до послідовності задач

$$r^{-1} d_r (r d_r u_n^{(i)}) - r^{-2} u_n^{(i)} - w_i^2 u_n^{(i)} = w_i^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1) u_m^{(i)}, \quad i = 1, 2; \quad (7.34)$$

$$s_{rr,n}^{(1)} = -p_n, \quad r = r_0, \quad u_n^{(2)} = 0, \quad r \rightarrow \infty; \quad (7.35)$$

$$u_n^{(1)} = u_n^{(2)}, \quad s_{rr,n}^{(1)} = s_{rr,n}^{(2)}, \quad r = 1. \quad (7.36)$$

Рівняння (7.34) повністю співпадають із рівняннями (7.8) при  $M = 2$ , а тому їх розв'язок має вигляд

$$u_n^{(i)}(r) = \sum_{j=0}^n [C_{n-j}^{(i)} G_j(w_i r) + D_{n-j}^{(i)} W_j(w_i r)], \quad i=1, 2. \quad (7.37)$$

Враховуючи умови на безмежності (7.35) та вигляд фундаментальних розв'язків (7.12), одержимо, що

$$C_j^{(2)} \equiv 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (7.38)$$

Провівши ідентичні до першого підрозділу викладки прийдемо до рекурентних послідовностей систем лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_n^{(1)} \\ D_n^{(1)} \\ D_n^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{n,1} \\ H_{n,2} \\ H_{n,3} \end{pmatrix}, \quad (7.39)$$

де

$$b_{1,1} = k_1^2 w_1 I_0(w_1 r_0) - \frac{2}{r_0} I_1(w_1 r_0); \quad b_{1,2} = -k_1^2 w_1 K_0(w_1 r_0) - \frac{2}{r_0} K_1(w_1 r_0);$$

$$b_{2,1} = I_1(w_1); \quad b_{2,2} = K_1(w_1); \quad b_{2,3} = -K_1(w_2); \quad b_{3,1} = k_1^2 w_1 I_0(w_1) - 2I_1(w_1);$$

$$b_{3,2} = -k_1^2 w_1 K_0(w_1) - 2K_1(w_1); \quad b_{3,3} = \mathfrak{M}_2 (k_2^2 w_2 K_0(w_2) + 2K_1(w_2)),$$

при  $\mathfrak{M}_2 = m_2/m_1$ .

Стовбець вільних членів в системах (7.39) має вигляд:

$$H_{1,n} = -\frac{P_n}{m_1} - \sum_{j=1}^n C_{n-j}^{(1)} [k_1^2 G_j'(w_1 r_0) + (k_1^2 - 2)G_j(w_1 r_0)] -$$

$$- \sum_{j=1}^n D_{n-j}^{(1)} [k_1^2 W_j'(w_1 r_0) + (k_1^2 - 2)W_j(w_1 r_0)];$$

$$H_{2,n} = \sum_{j=1}^n [D_{n-j}^{(2)} W_j(w_2) - C_{n-j}^{(1)} G_j(w_1) - D_{n-j}^{(1)} W_j(w_1)];$$

$$H_{3,n} = \mathfrak{M}_2 \sum_{j=1}^n D_{n-j}^{(2)} [k_2^2 W_j'(w_2) + (k_2^2 - 2)W_j(w_2)] - \sum_{j=1}^n C_{n-j}^{(1)} [k_1^2 G_j'(w_1) + (k_1^2 - 2)G_j(w_1)] -$$

$$- \sum_{j=1}^n D_{n-j}^{(1)} [k_1^2 W_j'(w_1) + (k_1^2 - 2)W_j(w_1)],$$

де

$$G_j'(w_i r) = \sum_{p=0}^j a_{j,p} \frac{(w_i r)^p}{2^p p!} \left[ w_i I_p(w_i r) - \frac{I_{p+1}(w_i r)}{r} \right],$$

$$W_j'(w_i r) = \sum_{p=0}^j a_{j,p} \frac{(-w_i r)^p}{2^p p!} \left[ -w_i K_p(w_i r) - \frac{K_{p+1}(w_i r)}{r} \right].$$

Застосовуючи метод Гауса до систем алгебричних рівнянь (7.39) знайдемо їх рекурентний розв'язок

$$D_n^{(2)} = \frac{(H_{n,1} b_{2,1} - H_{n,2} b_{1,1})(b_{1,2} b_{3,1} - b_{3,2} b_{1,1})}{b_{1,1} \{b_{2,3} (b_{3,2} b_{1,1} - b_{1,2} b_{3,1}) + b_{3,3} (b_{1,2} b_{2,1} - b_{2,2} b_{1,1})\}} -$$

$$- \frac{(H_{n,1} b_{3,1} - H_{n,3} b_{1,1})(b_{1,2} b_{2,1} - b_{2,2} b_{1,1})}{b_{1,1} \{b_{2,3} (b_{3,2} b_{1,1} - b_{1,2} b_{3,1}) + b_{3,3} (b_{1,2} b_{2,1} - b_{2,2} b_{1,1})\}};$$

$$D_n^{(1)} = \frac{H_{n,1} b_{2,1} - H_{n,2} b_{1,1} + b_{2,3} b_{2,1} D_n^{(2)}}{b_{1,2} b_{2,1} - b_{2,2} b_{1,1}}; C_n^{(1)} = \frac{H_{n,1} - b_{1,2} D_n^{(1)}}{b_{1,1}}, \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K}. \quad (7.40)$$

За відомими  $C_n^{(1)}$ ,  $D_n^{(1)}$ ,  $D_n^{(2)}$  остаточний розв'язок вихідної задачі одержано у вигляді

$$u^{(1)}(r, t) = l \sum_{n=0}^{\infty} L_n(l t) \sum_{j=0}^n [C_{n-j}^{(1)} G_j(l r) + D_{n-j}^{(1)} W_j(l r)];$$

$$u^{(2)}(r, t) = l \sum_{n=0}^{\infty} L_n(l t) \sum_{j=0}^n D_{n-j}^{(2)} W_j(l r). \quad (7.41)$$

Для числового аналізу було вибрано циліндр із відносним радіусом внутрішньої поверхні  $r_0 = 0.6$  та  $k_1^2 = 3.5$  на якій діє зовнішнє навантаження:

$$p(t) = p^* (1 - \exp(-t_0 t))^2, \quad (7.42)$$

де  $p^*$  – розмірна величина (Па).

Залежність (7.42) дає змогу добре узгодити нульові початкові умови із крайовими, а параметр  $t_0$  при цьому визначає час виходу зовнішнього навантаження на стаціонарне значення.

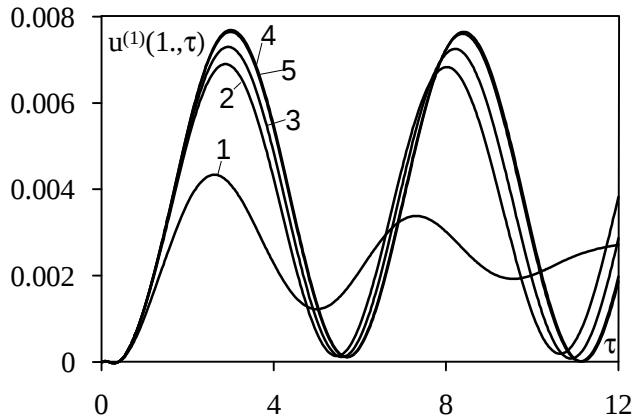


Рис. 7.5. Переміщення зовнішньої поверхні циліндра при різних механічних властивостях простору

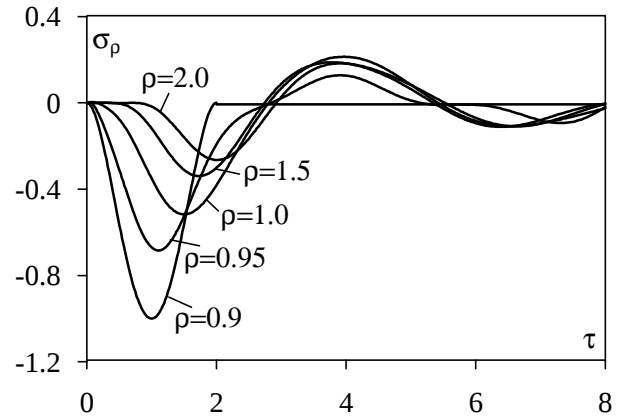


Рис. 7.6. Розподіл в часі радіальних напружень на різних поверхнях

На рис. 7.5 подано часовий розподіл знерозмірених переміщень  $u^{(1)}(r, t)$  на поверхні  $r = 1$  при  $k_2^2 = 2.5$  і різних відносних механічних властивостей простору:  $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{C}_2 = 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005$ , - відповідно, криві 1, 2, 3, 4, 5. Розрахунки проводились при  $t_0 = 3$  і в рядах за поліномами Лагерра утримувалось 60 членів.

Як видно з наведеного, зменшення відносних механічних властивостей простору призводить до збільшення амплітуди коливань та припинення процесу затухання хвиль, що добре узгоджується із фізикою явища. При значеннях відносних характеристик  $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{C}_2 = 0.01$  і  $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{C}_2 = 0.005$  результати практично співпадають (криві 4 та 5).

Результати розрахунку переміщень, отримані для значення  $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{C}_2 = 0.005$  при  $r = 0.8$  порівнювались в свою чергу із результатами, одержаними для однорідного циліндра із використанням інтегрального перетворення Лапласа для навантаження (7.42). Виявилось, що при утриманні 60 членів ряду за поліномами Лагерра відносна похибка між результатами отриманими двома методами не перевищує 0.5 %.

За результатами, отриманими для випадку циліндра і простору було проведено також розрахунок напружено-деформованого стану в сталевому тонкостінному циліндрі ( $r_0 = 0.9$ ,  $k_1^2 = 3.5$ ), вкладеному у середовище із пісковиком ( $k_2^2 = 2.7$ ,  $\mu_2 = 0.67$ ,  $\nu_2 = 0.16$ ).

При цьому вважалось, що навантаження внутрішньої поверхні циліндра є функцією імпульсного типу:

$$p(t) = \begin{cases} p^* \left( (1-t)^2 - 1 \right)^2, & t \leq 2 \\ 0, & t > 2. \end{cases} \quad (7.43)$$

На рис. 7.6 подано часовий розподіл знерозмірених радіальних напружень  $s_r = s_{rr}^{(i)}(r, t) / p^*$  в різних точках циліндра та простору. При цьому, враховуючи результати порівняльного аналізу, наведеного вище, утримувалось 60 членів ряду за поліномами Лагерра. Крива при  $r = 0.9$  описує часову залежність зовнішнього навантаження.

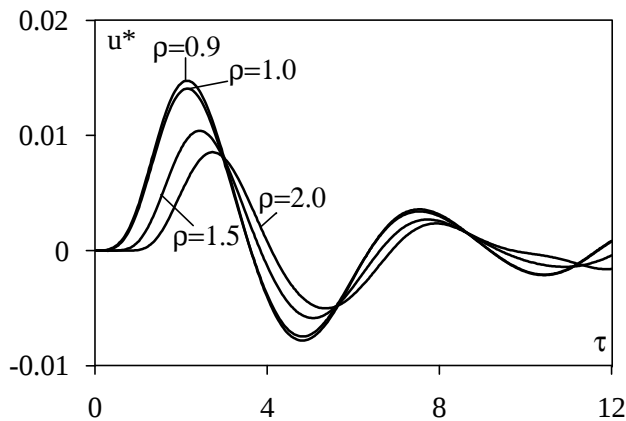


Рис. 7.7 Залежність від часу радіальних переміщень

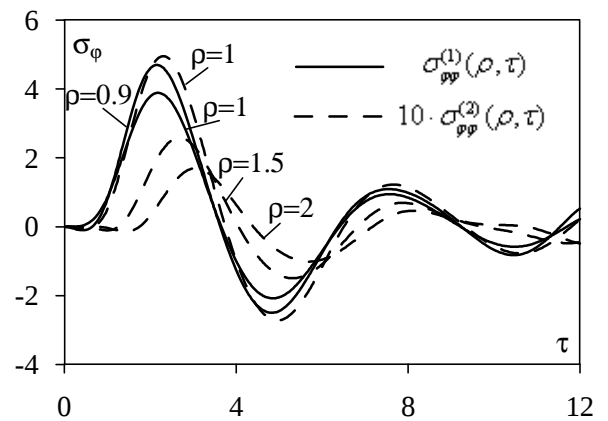


Рис. 7.8 Розподіл в часі радіальних напружень.

Як свідчать наведені результати, максимального за модулем значення вказані напруження досягають на поверхні, де діє навантаження. На поверхні поділу матеріалів циліндра і зовнішнього середовища ( $r = 1$ ) під час дії імпульсу навантаження радіальні напруження складають близько 50% від його рівня, а після моменту часу  $t = 3$  змінюють свій знак і досить швидко затухають.

Приблизно такі самі висновки можна зробити і щодо радіальних напружень в матеріалі середовища.

На рис. 7.7 зображено зміну переміщень в різних точках циліндра і середовища при  $p^*/m_1 = 0.01$ . Як видно з наведеного переміщення двох граничних поверхонь циліндра практично співпадають, що добре узгоджується із малою відносною товщиною циліндра та податливістю оточуючого середовища.

Результати розрахунку безрозмірних колових напружень  $s_j \equiv s_{jj}^{(i)} / p^*$  наведено на рис. 7.8. При цьому напруження, що діють в просторі для наочності були збільшені в 10 разів.

Як свідчать наведені результати колові напруження в циліндрі за абсолютним значенням перевищують відповідні радіальні майже у 5 разів. В просторі рівень цих напружень різко падає, що пояснюється значно нижчими пружними характеристиками його матеріалу. Максимального значення колові напруження набувають в моменти часу, що слідує відразу після закінчення дії імпульсу навантаження і якісно подібні до часового розподілу радіальних переміщень.

## **7.2 Динамічна задача теорії пружності для багат шарового циліндра при осесиметричному локальному навантаженні**

### **7.2.1. Розповсюдження пружних хвиль у пружному просторі із циліндричною порожниною.**

На відміну від задач для тіл з плоско-паралельними границями поділу, динамічні просторові задачі теорії пружності для тіл з циліндричною структурою досі не мають точних, математично обґрунтованих аналітичних розв'язків, навіть у найпростіших випадках. Тому, на нашу думку, доречно розпочати розгляд двовимірних осесиметричних задач із задачі про розповсюдження пружних хвиль в просторі із циліндричною порожниною. Крім того на прикладі цієї задачі із використанням відносно не громіздких викладок можна описати особливості

застосування інтегрального перетворення Лагерра до задач динамічної теорії пружності для тіл циліндричної форми.

Розглянемо пружний простір із порожниною у формі циліндра радіуса  $R$ , джерелом нестаціонарних процесів в якому є локальне за осью змінною осесиметричне навантаження поверхні порожнини (рис. 7.9).

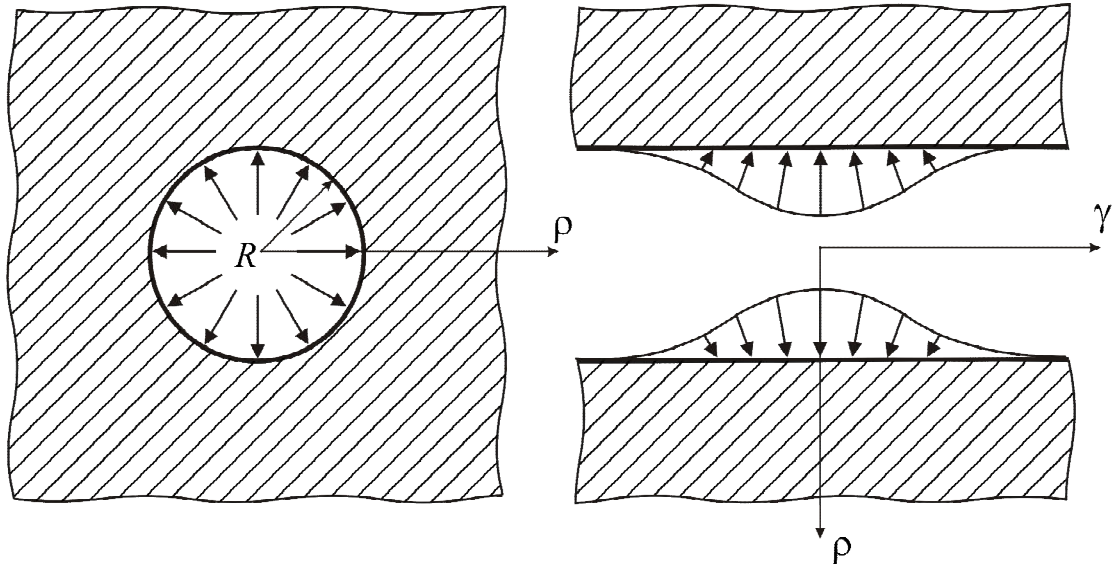


Рис. 7.9 Схема задачі

В термінах безрозмірних змінних і величин  $r = r/R$ ,  $g = z/R$ ,  $t = c_1 t/R$ ,  $k^2 = c_1/c_2 = (l + 2m)/m$  початкова-крайова задача відносно об'ємного розширення  $q(r, g, t)$  і осової компоненти вектора переміщення  $w(r, g, t)$  має вигляд

$$\frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{\partial^2 q}{\partial g^2} = \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}; \quad (7.44)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial g^2} = k^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - (k^2 - 1) \frac{\partial q}{\partial g}; \quad (7.45)$$

$$q(r, g, 0) = \partial_t q(r, g, 0) = w(r, g, 0) = \partial_t w(r, g, 0) = 0; \quad (7.46)$$

$$s_{rr}(1, g, t) = f_1(g, t), \quad s_{rg}(1, g, t) = f_2(g, t); \quad (7.47)$$

$$q = w = 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (7.48)$$

До задачі (7.44)-, (7.48) застосуємо інтегральне перетворення Лагерра за змінною  $t$  і інтегральне перетворення Фур'є за змінною  $g$ . При цьому будемо

вважати, що навантаження симетричне відносно площини  $g = 0$ , і, відповідно,  $q(r, g, t)$  – парна, а  $w(r, g, t)$  – непарна функції змінної  $g$ . В результаті одержимо

$$\frac{\partial^2 \bar{q}_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{q}_n}{\partial r} - (x^2 + l^2) \bar{q}_n = l^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1) \bar{q}_m; \quad (7.49)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{w}_n}{\partial r} - (x^2 + l^2 k^2) \bar{w}_n = l^2 k^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1) \bar{w}_m - (k^2 - 1) d_g \bar{q}_n, \quad (7.50)$$

$$\bar{q}_n = \bar{w}_n = 0, \quad r \rightarrow \infty; \quad (7.51)$$

$$\bar{s}_{rr,n}(1, x) = \bar{f}_{1,n}(x), \quad \bar{s}_{rg,n}(1, x) = \bar{f}_{2,n}(x), \quad (7.52)$$

де  $\begin{cases} \bar{q}_n(r, x) \\ \bar{w}_n(r, x) \end{cases} = \int_0^\infty \exp(-lt) \left[ \int_0^\infty \begin{cases} q(r, g, t) \cos(xg) dg \\ w(r, g, t) \sin(xg) dg \end{cases} L_n(lt) dt \right]$  – зображення за Лагер-ром і Фур'є.

Загальний розв'язок рівнянь (7.49), що задовольняє умові (7.51), згідно результатів другого розділу роботи можна подати у вигляді алгебричної згортки

$$\bar{q}_n(r, x) = \sum_{j=0}^n A_{n-j}(x) W_j(w_1 r), \quad (7.53)$$

де

$$W_j(w_1 r) = \sum_{k=0}^j a_{j,k} \left( -\frac{w_1 r}{2} \right)^k \frac{K_k(w_1 r)}{k!}, \quad w_1 = \sqrt{x^2 + l^2}. \quad (7.54)$$

Коефіцієнти  $a_{j,k}$  при цьому визначаються із рекурентних співвідношень

$$a_{j,k+1} = \sum_{m=k}^{j-1} (j-m+1) a_{m,k}. \quad (7.55)$$

Враховуючи рівняння (7.49) та очевидне співвідношення

$$\sum_{m=0}^n (n-m+1) [\bar{q}_m(r, x) - 2\bar{q}_{m-1}(r, x) + \bar{q}_{m-2}(r, x)] = \bar{q}_n(r, x) \quad (7.56)$$

загальний розв'язок рівняння (7.50) подамо у вигляді

$$\bar{w}_n(r, x) = \sum_{j=0}^n B_{n-j}(x) W_j(w_2 r) - \frac{x}{l^2} \bar{q}_n^{\#}(r, x), \quad (7.57)$$

де  $w_2 = \sqrt{x^2 + l^2 k^2}$ ,  $\bar{q}_n^{\#} = \bar{q}_n - 2\bar{q}_{n-1} + \bar{q}_{n-2}$ , при  $\bar{q}_{-1} = \bar{q}_{-2} \equiv 0$ .

Трансформанту за Лагерром і Фур'є іншої компоненти вектора переміщення  $\bar{u}_n(r, x)$ , враховуючи, що  $\bar{q}_n = r^{-1} \partial_r (r \bar{u}_n) + x \bar{w}_n$ , знайдемо у вигляді

$$\bar{u}_n(r, x) = r^{-1} \int_r^r r (\bar{q}(r, x) - x \bar{w}_n^{(i)}(r, x)) dr. \quad (7.58)$$

Після інтегрування одержимо

$$\bar{u}_n(r, x) = \sum_{j=0}^n \left\{ \left[ \frac{w_1^2}{l^2} A_{n-j}(x) - \frac{x^2}{l^2} (2A_{n-1-j}(x) - A_{n-1-j}(x)) \right] \bar{W}_j(w_1 r) - x B_{n-j} \bar{W}_j(w_2 r) \right\} \quad (7.59)$$

при

$$\bar{W}_j(w_i r) = - \sum_{k=0}^j a_{j,k} \left( -\frac{w_i r}{2} \right)^k \frac{K_{k+1}(w_i r)}{w_i k!}. \quad (7.60)$$

Враховуючи, що  $m^{-1} \bar{s}_{rr,n} = (k^2 - 2) \bar{q}_n + 2 \partial_r \bar{u}_n$ , з першої умови (7.52)

одержимо рівняння

$$\begin{aligned} (k^2 - 2) \sum_{j=0}^n A_{n-j}(x) W_j(w_1) + \frac{2}{l^2} \sum_{j=0}^n \left[ w_1^2 A_{n-j}(x) - x^2 (2A_{n-1-j}(x) - A_{n-2-j}(x)) \right] \bar{W}_j'(w_1) - \\ - 2x \sum_{j=0}^n B_{n-j}(x) \bar{W}_j'(w_2) = \frac{\bar{f}_{1,n}(x)}{m}, \end{aligned} \quad (7.61)$$

де введено позначення  $\bar{W}_j'(wr) \equiv d_r \bar{W}_j(wr)$ .

В лівій частині (7.61) залишимо доданки з індексом  $n$ , а решту перенесемо в праву частину

$$(k^2 - 2) A_n(x) W_0(w_1) + \frac{2w_1^2}{l^2} A_n(x) \bar{W}_0'(w_1) - 2x B_n(x) \bar{W}_0'(w_2) = \frac{f_{1,n}(x)}{m} -$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j} \left\langle (k^2 - 2) W_j(w_1) + 2 \frac{w_1^2}{l^2} \dot{W}_j(w_1) \right\rangle + \right. \\
& \left. + \frac{2x^2}{l^2} \sum_{j=0}^{n-1} \left[ (2A_{n-1-j} - A_{n-2-j}) \times \dot{W}_j(w_1) \right] + 2x \sum_{j=1}^n B_{n-j} \dot{W}_j(w_2) \right]. \quad (7.62)
\end{aligned}$$

Враховуючи значення для  $W_0(w_i)$  та  $\dot{W}_0(w_i)$  при  $a_{0,0} = 1, a_{j,0} = 0, j = 1, 2, \mathbf{K}$ , остаточно одержимо

$$b_{1,1}(x)A_n(x) + b_{1,2}(x)B_n(x) = h_{1,n}(x), \quad (7.63)$$

де

$$\begin{aligned}
b_{1,1} &= \left( k^2 + \frac{2x^2}{l^2} \right) K_0(w_1) + \frac{2w_1}{l^2} K_1(w_1), \quad b_{1,2} = -2x \left( \frac{K_1(w_2)}{w_2} + K_0(w_2) \right) \\
h_{1,n}(x) &= \frac{f_{1,n}(x)}{m} - \sum_{j=1}^n A_{n-j} \left\langle (k^2 - 2) W_j(w_1) + 2 \frac{w_1^2}{l^2} \dot{W}_j(w_1) \right\rangle + \\
& + \frac{2x^2}{l^2} \sum_{j=0}^{n-1} \left[ (2A_{n-1-j} - A_{n-2-j}) \times \dot{W}_j(w_1) \right] + 2x \sum_{j=1}^n B_{n-j} \dot{W}_j(w_2). \quad (7.64)
\end{aligned}$$

Поступаючи так само, із другої умови (7.52) одержимо рівняння

$$b_{2,1}(x)A_n(x) + b_{2,2}(x)B_n(x) = h_{2,n}(x), \quad (7.65)$$

де

$$\begin{aligned}
b_{2,1} &= \frac{2xw_1}{l^2} K_1(w_1), \quad b_{2,2} = -\frac{w_2^2 + x^2}{w_2} K_1(w_2), \\
h_{2,n} &= \frac{f_{2,n}(x)}{m} + \frac{x}{l^2} \sum_{j=1}^n A_{n-j} \left( w_1^2 \dot{W}_j(w_1) + W_j'(w_1) \right) - \\
& - \frac{x^3}{l^2} \sum_{j=0}^{n-1} \left[ (2A_{n-1-j} - A_{n-2-j}) \dot{W}_j(w_1) \right] - \sum_{j=1}^n B_{n-j} \left( x^2 \dot{W}_j(w_2) + W_j'(w_2) \right). \quad (7.66)
\end{aligned}$$

Розв'язуючи спільно рівняння (7.63) і (7.65) одержимо їх розв'язок

$$B_n(x) = \frac{b_{1,1}(x)h_{2,n}(x) - b_{2,1}(x)h_{1,n}(x)}{b_{1,1}(x)b_{2,2}(x) - b_{1,2}(x)b_{2,1}(x)},$$

$$A_n(x) = \frac{h_{1,n}(x) - b_{1,2}(x)B_n(x)}{b_{1,1}(x)}, n = 0, 1, 2, \mathbf{K}$$
(7.67)

Після визначення всіх  $A_n(x)$  і  $B_n(x)$  із рекурентного розв'язку (7.67), компоненти вектора переміщення подаються у вигляді

$$u(r, g, t) = \frac{2l}{p} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(lt) \int_0^{\infty} \bar{u}_n(r, x) \cos(xg) dx$$
(7.68)

$$w(r, g, t) = \frac{2l}{p} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(lt) \int_0^{\infty} \bar{w}_n(r, x) \sin(xg) dx,$$
(7.69)

де  $\bar{w}_n(r, x)$  і  $\bar{u}_n(r, x)$  розраховуються за формулами (7.57) і (7.58), а відмінні від нуля компоненти тензора напружень визначаються згідно закону Гука за формулами

$$s_{rr}(r, g, t)/m = \frac{2l}{p} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(lt) \int_0^{+\infty} [(k_i^2 - 2)\bar{q}_n(r, x) + 2d_r \bar{u}_n(r, x)] \cos(xg) dx;$$

$$s_{rg}(r, g, t)/m = \frac{2l}{p} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(lt) \int_0^{+\infty} [d_r \bar{w}_n(r, x) - x \bar{u}_n(r, x)] \sin(xg) dx;$$

$$s_{gg}(r, g, t)/m = \frac{2l}{p} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(lt) \int_0^{+\infty} [(k_i^2 - 2)\bar{q}_n(r, x) + 2x \bar{w}_n(r, x)] \cos(xg) dx;$$

$$s_{jj}(r, g, t)/m = \frac{2l}{p} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(lt) \int_0^{+\infty} \left[ (k_i^2 - 2)\bar{q}_n(r, x) + \frac{2\bar{u}_n(r, x)}{r} \right] \cos(xg) dx.$$
(7.70)

### 7.2.2 Побудова рекурентного розв'язку динамічної двовимірної задачі для багат шарового циліндра

Спираючись на результати попереднього підрозділу розглянемо тепер динамічну двовимірну задачу для багат шарового циліндра, що навантажений локально на своїх граничних поверхнях (рис. 7.10)

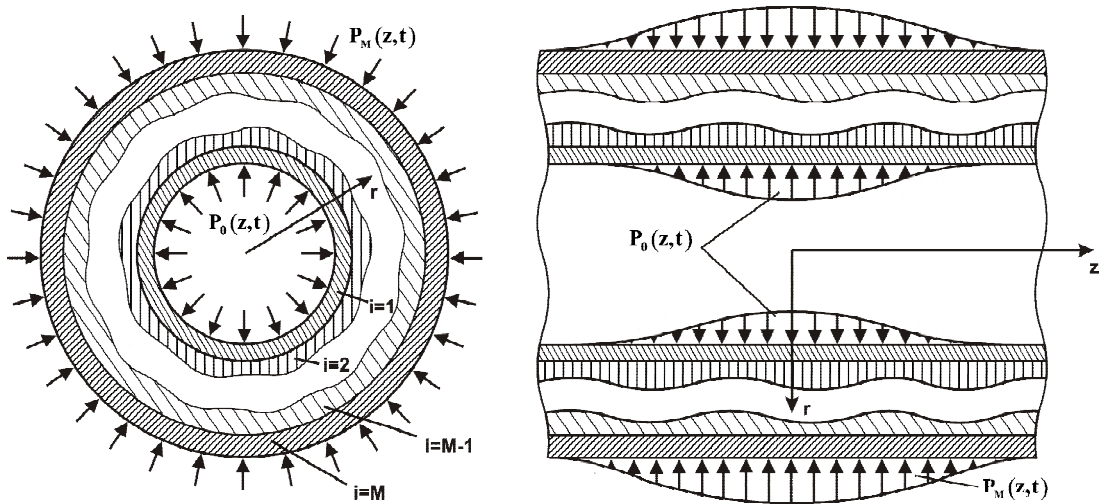


Рис. 7.10. Схема задачі

В математичному плані задача полягає у відшуванні розв'язку  $2M$  хвильових рівнянь

$$\frac{\partial^2 q^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial q^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 q^{(i)}}{\partial g^2} = \mathbb{H}_{1,i}^2 \frac{\partial^2 q^{(i)}}{\partial t^2}; \quad (7.71)$$

$$\frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w^{(i)}}{\partial r} + \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial g^2} = \mathbb{H}_{2,i}^2 \frac{\partial^2 w^{(i)}}{\partial t^2} - (k_i^2 - 1) \frac{\partial q^{(i)}}{\partial g}. \quad (7.72)$$

з нульовими початковими умовами

$$q^{(i)}(r, g, 0) = \partial_t q^{(i)}(r, g, 0) = w^{(i)}(r, g, 0) = \partial_t w^{(i)}(r, g, 0) = 0, \quad (7.73)$$

крайовими умовами для 1-го та  $M$ -го циліндрів

$$s_{rr}^{(1)}(r_0, g, t) = f_{1,0}(g, t), \quad s_{rg}^{(1)}(r_0, g, t) = f_{2,0}(g, t); \quad (7.74)$$

$$s_{rr}^{(M)}(1, g, t) = f_{1,M}(g, t), \quad s_{rg}^{(M)}(1, g, t) = f_{2,M}(g, t), \quad (7.75)$$

та умовами спряження циліндричних шарів

$$u^{(i)}(r_i, g, t) = u^{(i+1)}(r_i, g, t), w^{(i)}(r_i, g, t) = w^{(i+1)}(r_i, g, t); \quad (7.76)$$

$$s_{rr}^{(i)}(r_i, g, t) = s_{rr}^{(i+1)}(r_i, g, t), s_{rg}^{(i)}(r_i, g, t) = s_{rg}^{(i+1)}(r_i, g, t), \quad (7.77)$$

де  $r = r/R_M$ ,  $g = z/R_M$ ,  $t = c_{1,0}t/R_M$ ,  $\mathfrak{d}_{1,i} = c_{1,i}/c_{1,0}$ ,  $\mathfrak{d}_{2,i} = c_{2,i}/c_{1,0}$ ,  $k_i^2 = c_{1,i}/c_{2,i}$ ,  $r_i = R_i/R_M$ ,  $R_M$ ,  $R_0$  – зовнішній та внутрішній радіуси композитного циліндра;  $R_i$  – радіус поверхні поділу матеріалів  $i$ -го та  $i+1$ -го циліндра;  $c_{1,i}$ ,  $c_{2,i}$  – швидкості поширення хвиль розширення та зсуву у матеріалі  $i$ -го циліндра;  $c_{1,0}$  – швидкість поширення хвиль розширення в деякому матеріалі (вибирається залежно від завдань числового аналізу);  $f_{i,0}(g, t)$  і  $f_{i,M}(g, t)$  – задані, відповідно, на внутрішній та зовнішній поверхнях композитного циліндра нормальні ( $i=1$ ) та дотичні ( $i=2$ ) зусилля.

Застосування інтегрального перетворення Лагерра за часовою змінною та інтегрального перетворення Фур'є до рівнянь (7.71), (7.72) з урахуванням початкових умов (7.73) та фізичних умов симетрії призводить до послідовності звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \bar{q}_n^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{q}_n^{(i)}}{\partial r} - (x^2 + l^2 \mathfrak{d}_{1,i}^2) \bar{q}_n^{(i)} = l^2 \mathfrak{d}_{1,i}^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1) \bar{q}_m^{(i)}; \quad (7.78)$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}_n^{(i)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{w}_n^{(i)}}{\partial r} - (x^2 + l^2 \mathfrak{d}_{2,i}^2) \bar{w}_n^{(i)} = l^2 \mathfrak{d}_{2,i}^2 \sum_{m=0}^{n-1} (n-m+1) \bar{w}_m^{(i)} + x \bar{q}_n^{(i)} (k_i^2 - 1). \quad (7.79)$$

де  $\begin{cases} \bar{q}_n^{(i)}(r, x) \\ \bar{w}_n^{(i)}(r, x) \end{cases} = \int_0^\infty \exp(-lt) \left[ \int_0^\infty \begin{cases} q^{(i)}(r, g, t) \cos(xg) dg \\ w^{(i)}(r, g, t) \sin(xg) dg \end{cases} \right] L_n(lt) dt$  – зображення за

Лагерром та Фур'є,  $l$  – масштабний множник.

Загальний розв'язок послідовності (7.76) має вигляд алгебричної згортки

$$\bar{q}_n^{(i)}(r, x) = \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(i)} G_j(w_{1,i} r) + B_{n-j}^{(i)} W_j(w_{1,i} r) \right], \quad (7.80)$$

де  $w_{1,i} = \sqrt{x^2 + l^2 \mathfrak{d}_{1,i}^2}$ ,  $A_{n-j}^{(i)}(x)$ ,  $B_{n-j}^{(i)}(x)$  – набір сталих, а  $G_j(x)$  та  $W_j(x)$  – лінійно незалежні послідовності фундаментальних розв'язків рівнянь (7.78), які, згідно результатів другого розділу роботи, можна подати у вигляді

$$G_j(x) = \sum_{k=0}^j a_{j,k} \left(\frac{x}{2}\right)^k \frac{I_k(x)}{k!}, \quad W_j(x) = \sum_{k=0}^j a_{j,k} \left(-\frac{x}{2}\right)^k \frac{K_k(x)}{k!}, \quad (7.81)$$

де  $I_k(x)$  і  $K_k(x)$  – модифіковані функції Бесселя, а коефіцієнти  $a_{j,k}$  визначаються із рекурентних співвідношень

$$a_{j,k+1} = \sum_{m=k}^{j-1} (j-m+1) a_{m,k},$$

де  $a_{j,k} = 0$  при  $k > j$  і  $a_{j,0}$  – довільні.

Враховуючи отриманий для  $\bar{q}_n^{(i)}(r, x)$  вираз (7.80), розв'язок рівнянь (7.79) можна записати у вигляді

$$\bar{w}_n^{(i)}(r, x) = \sum_{j=0}^n \left[ C_{n-j}^{(i)} G_j(w_{2,i} r) + D_{n-j}^{(i)} W_j(w_{2,i} r) \right] - \frac{x}{l^2 \mathfrak{d}_{1,i}^2} \mathfrak{d}_n^{(i)}(r, x), \quad (7.82)$$

де  $w_{2,i} = \sqrt{x^2 + l^2 \mathfrak{d}_{2,i}^2}$ ,  $\mathfrak{d}_n^{(i)} = \bar{q}_n^{(i)} - 2\bar{q}_{n-1}^{(i)} + \bar{q}_{n-2}^{(i)}$ , при  $\bar{q}_{-1} = \bar{q}_{-2} \equiv 0$ .

Трансформанту за Лагерром і Фур'є іншої компоненти вектора переміщення  $\bar{u}_n^{(i)}(r, x)$ , враховуючи, що  $\bar{q}_n^{(i)} = r^{-1} \partial_r (r \bar{u}_n^{(i)}) + x \bar{w}_n^{(i)}$ , знайдемо у вигляді

$$\bar{u}_n^{(i)}(r, x) = r^{-1} \int_r^r r \left( \bar{q}_n^{(i)}(r, x) - x \bar{w}_n^{(i)}(r, x) \right) dr. \quad (7.83)$$

Обчисливши відповідні інтеграли, одержимо

$$\bar{u}_n^{(i)}(r, x) = \sum_{j=0}^n \left[ \frac{w_{1,i}^2}{l^2 \mathfrak{d}_{1,i}^2} A_{n-j}^{(i)} - \frac{x^2}{l^2 \mathfrak{d}_{1,i}^2} (2A_{n-1-j}^{(i)} - A_{n-2-j}^{(i)}) \right] \mathfrak{G}_j(w_{1,i} r) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=0}^n \left[ \frac{w_{1,i}^2}{l^2 \mathfrak{d}_{1,i}^2} B_{n-j}^{(i)} - \frac{\chi^2}{l^2 \mathfrak{d}_{1,i}^2} (2B_{n-1-j}^{(i)} - B_{n-2-j}^{(i)}) \right] \mathbb{W}_j(w_{1,i} r) - \\
& - \chi \sum_{j=0}^n \left[ C_{n-j}^{(i)} \mathbb{G}_j(w_{2,i} r) + D_{n-j}^{(i)} \mathbb{W}_j(w_{2,i} r) \right],
\end{aligned} \tag{7.84}$$

де

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_j(w_{m,i} r) &= \frac{1}{w_{m,i}} \sum_{k=0}^j a_{j,k} \left( \frac{w_{m,i} r}{2} \right)^k \frac{I_{k+1}(w_{m,i} r)}{k!}, \\
\mathbb{W}_j(w_{m,i} r) &= -\frac{1}{w_{m,i}} \sum_{k=0}^j a_{j,k} \left( -\frac{w_{m,i} r}{2} \right)^k \frac{K_{k+1}(w_{m,i} r)}{k!}.
\end{aligned}$$

Набір функцій  $A_n^{(i)}(x), B_n^{(i)}(x), C_n^{(i)}(x), D_n^{(i)}(x)$  визначимо з крайових умов (7.74), (7.75) та умов ідеального механічного контакту (7.76), (7.77). Для цього розглянемо перше рівняння (7.74), яке після застосування інтегральних перетворень Лагерра і Фур'є набуде вигляду

$$\bar{s}_{rr}^{(1)}(r_0, g, t) = \bar{f}_{1,0,n}(x).$$

Враховуючи, що  $m_1^{-1} \bar{s}_{rr,n} = (k_1^2 - 2) \bar{q}_n^{(1)} + 2 \partial_r \bar{u}_n^{(1)}$ , де  $m_1$  – модуль зсуву матеріалу внутрішнього циліндра, із цього рівняння одержимо

$$\begin{aligned}
& (k_1^2 - 2) \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(1)} \mathbb{G}_j(w_{1,1} r_0) + B_{n-j}^{(1)} \mathbb{W}_j(w_{1,1} r_0) \right] + 2 \sum_{j=0}^n \left[ A_{n-j}^{(1)} \frac{w_{1,1}^2}{l^2 \mathfrak{d}_{1,1}^2} - \frac{\chi^2}{l^2 \mathfrak{d}_{1,1}^2} (2A_{n-1-j}^{(1)} - A_{n-2-j}^{(1)}) \right] \\
& \times \mathbb{G}_j'(w_{1,1} r_0) + 2 \sum_{j=0}^n \left[ B_{n-j}^{(1)} \frac{w_{1,1}^2}{l^2 \mathfrak{d}_{1,1}^2} - \frac{\chi^2}{l^2 \mathfrak{d}_{1,1}^2} (2B_{n-1-j}^{(1)} - B_{n-2-j}^{(1)}) \right] \mathbb{W}_j'(w_{1,1} r_0) - \\
& - 2\chi \sum_{j=0}^n \left[ C_{n-j}^{(1)} \mathbb{G}_j'(w_{2,1} r_0) + D_{n-j}^{(1)} \mathbb{W}_j'(w_{2,1} r_0) \right] = \frac{f_{1,0,n}}{m_1};
\end{aligned} \tag{7.85}$$

де введено позначення

$$\mathbb{G}_j'(w_{m,i} r) \equiv \frac{d\mathbb{G}_j(w_{m,i} r)}{dr} = G_j(w_{m,i} r) - \frac{1}{r} \mathbb{G}_j(w_{m,i} r),$$

$$\mathbb{W}_j'(w_{m,i} r) \equiv \frac{d\mathbb{W}_j(w_{m,i} r)}{dr} = \mathbb{W}_j(w_{m,i} r) - \frac{1}{r} \mathbb{W}_j(w_{m,i} r).$$

В рівняннях (7.85) залишимо в лівій частині лише доданки, що містять невідомі з індексом  $n$ , а всі решта перенесемо в праву частину. В результаті при  $a_{0,0}=1$  після всіх обчислень, аналогічно випадку попереднього підрозділу, одержимо рівняння

$$b_{1,1}A_n^{(1)} + b_{1,2}B_n^{(1)} + b_{1,3}C_n^{(1)} + b_{1,4}D_n^{(1)} = H_{1,n}, \quad (7.86)$$

де

$$\begin{aligned} b_{1,1} &= \left( k_1^2 + \frac{2x^2}{l^2 \mathbb{G}_{1,1}^2} \right) I_0(w_{1,1} r_0) - \frac{2w_{1,1}}{l^2 \mathbb{G}_{1,1}^2 r_0} I_1(w_{1,1} r_0); \quad b_{1,3} = 2x \left[ \frac{I_1(w_{2,1} r_0)}{w_{2,1} r_0} - I_0(w_{2,1} r_0) \right]; \\ b_{1,2} &= \left( k_1^2 + \frac{2x^2}{l^2 \mathbb{G}_{1,1}^2} \right) K_0(w_{1,1} r_0) + \frac{2w_{1,1}}{l^2 \mathbb{G}_{1,1}^2 r_0} K_1(w_{1,1} r_0); \quad b_{1,4} = -2x \left[ \frac{K_1(w_{2,1} r_0)}{w_{2,1} r_0} + K_0(w_{2,1} r_0) \right]; \\ H_{1,n} &= \frac{f_{1,0,n}}{m_1} - \sum_{j=1}^n \left[ A_{n-j}^{(1)} \left\{ (k_1^2 - 2) G_j(w_{1,1} r_0) + \frac{2w_{1,1}^2}{l^2 \mathbb{G}_{1,1}^2} \mathbb{G}_j'(w_{1,1} r_0) \right\} + B_{n-j}^{(1)} \left\{ (k_1^2 - 2) W_j(w_{1,1} r_0) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2w_{1,1}^2}{l^2 \mathbb{G}_{1,1}^2} \mathbb{W}_j'(w_{1,1} r_0) \right\} + \sum_{j=0}^n (2A_{n-1-j}^{(1)} - A_{n-2-j}^{(1)}) \frac{2x^2}{l^2 \mathbb{G}_{1,1}^2} \mathbb{G}_j'(w_{1,1} r_0) + \sum_{j=0}^n (2B_{n-1-j}^{(1)} - B_{n-2-j}^{(1)}) \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{2x^2}{l^2 \mathbb{G}_{1,1}^2} \mathbb{W}_j'(w_{1,1} r_0) + 2x \sum_{j=0}^n [C_{n-j}^{(1)} \mathbb{G}_j'(w_{2,1} r_0) + D_{n-j}^{(1)} \mathbb{W}_j'(w_{2,1} r_0)] \right]. \end{aligned} \quad (7.87)$$

Провівши аналогічні викладки з іншими крайовими умовами (7.74), (7.75) та умовами спряження (7.76), (7.77) прийдемо до послідовності алгебричних рівнянь, відносно невідомих  $A_n^{(i)}, B_n^{(i)}, C_n^{(i)}, D_n^{(i)}$

$$(b_{k,l}) \{ A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, C_n^{(1)}, D_n^{(1)}, \dots, A_n^{(l)}, B_n^{(l)}, C_n^{(l)}, D_n^{(l)}, \dots, A_n^{(M)}, B_n^{(M)}, C_n^{(M)}, D_n^{(M)} \}^T = \{ H_{n,k} \}^T, \quad (7.88)$$

Коефіцієнти матриці системи (7.88) подібно до співвідношень (7.86) є комбінаціями модифікованих функцій Бесселя, а права частина, як і (7.87), окрім заданих функцій містить розв'язки, одержані при попередніх значеннях  $n$ . Перші

дві стрічки в системі (7.86) відповідають умовам (7.74), дві останні – умовам (7.75), а внутрішні блоки – умовам спряження (7.76), (7.77).

Структура матриці в рівняннях (7.88) має, як і в задачах попередніх розділів блоково-теплицеву структуру

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} & b_{3,4} & b_{3,5} & b_{3,6} & b_{3,7} & b_{3,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{4,1} & b_{4,2} & b_{4,3} & b_{4,4} & b_{4,5} & b_{4,6} & b_{4,7} & b_{4,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{5,1} & b_{5,2} & b_{5,3} & b_{5,4} & b_{5,5} & b_{5,6} & b_{5,7} & b_{5,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_{6,1} & b_{6,2} & b_{6,3} & b_{6,4} & b_{6,5} & b_{6,6} & b_{6,7} & b_{6,8} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{4i-1,4i-3} & b_{4i-1,4i-2} & \dots & b_{4i-1,4i+3} & b_{4i-1,4i+4} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{4i,4i-3} & b_{4i,4i-2} & \dots & b_{4i,4i+3} & b_{4i,4i+4} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{4i+1,4i-3} & b_{4i+1,4i-2} & \dots & b_{4i+1,4i+3} & b_{4i+1,4i+4} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{4i+2,4i-3} & b_{4i+2,4i-2} & \dots & b_{4i+2,4i+3} & b_{4i+2,4i+4} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & b_{M-1,M-3} & b_{M-1,M-2} & b_{M-1,M-1} & b_{M-1,M} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & b_{M,M-3} & b_{M,M-2} & b_{M,M-1} & b_{M,M} \end{pmatrix}$$

де  $b_{1,i}$  визначаються співвідношеннями (7.87), а решта має вигляд

$$b_{2,1} = \frac{x}{w_{1,1}} \left[ \frac{(k_1^2 - 1)}{l^2 \mathfrak{d}_1^{(1)} - l^2 \mathfrak{d}_2^{(1)}} (w_{1,1}^2 + x^2) - 1 \right] I_1(w_{1,1} r_0);$$

$$b_{2,2} = -\frac{x}{w_{1,1}} \left[ \frac{(k_1^2 - 1)}{l^2 \mathfrak{d}_1^{(1)} - l^2 \mathfrak{d}_2^{(1)}} (w_{1,1}^2 + x^2) - 1 \right] K_1(w_{1,1} r_0);$$

$$b_{2,3} = \left( \frac{x^2 + w_{2,1}^2}{w_{2,1}} \right) I_1(w_{2,1} r_0); \quad b_{2,4} = -\left( \frac{x^2 + w_{2,1}^2}{w_{2,1}} \right) K_1(w_{2,1} r_0);$$

$$b_{4i-1,4i-3} = \frac{1}{w_{1,i}} \left[ 1 - \frac{(k_i^2 - 1)x^2}{l^2 \mathfrak{d}_1^{(i)} - l^2 \mathfrak{d}_2^{(i)}} \right] I_1(w_{1,i} r_i);$$

$$b_{4i-1,4i-2} = -\frac{1}{w_{1,i}} \left[ 1 - \frac{(k_i^2 - 1)x^2}{l^{2\mathfrak{M}_1(i)} - l^{2\mathfrak{M}_2(i)}} \right] K_1(w_{1,i} r_i);$$

$$b_{4i-1,4i-1} = -\frac{x}{w_{2,i}} I_1(w_{2,i} r_i); \quad b_{4i-1,4i} = \frac{x}{w_{2,i}} K_1(w_{2,i} r_i);$$

$$b_{4i-1,4i+1} = -\frac{1}{w_{1,i+1}} \left[ 1 - \frac{(k_{i+1}^2 - 1)x^2}{l^{2\mathfrak{M}_1(i+1)} - l^{2\mathfrak{M}_2(i+1)}} \right] I_1(w_{1,i+1} r_i);$$

$$b_{4i-1,4i+2} = \frac{1}{w_{1,i+1}} \left[ 1 - \frac{(k_{i+1}^2 - 1)x^2}{l^{2\mathfrak{M}_1(i+1)} - l^{2\mathfrak{M}_2(i+1)}} \right] K_1(w_{1,i+1} r_i);$$

$$b_{4i-1,4i+3} = \frac{x}{w_{2,i+1}} I_1(w_{2,i+1} r_i); \quad b_{4i-1,4i+4} = -\frac{x}{w_{2,i+1}} K_1(w_{2,i+1} r_i);$$

$$b_{4i,4i-3} = \frac{(k_i^2 - 1)x}{l^{2\mathfrak{M}_1(i)} - l^{2\mathfrak{M}_2(i)}} I_0(w_{1,i} r_i); \quad b_{4i,4i-2} = \frac{(k_i^2 - 1)x}{l^{2\mathfrak{M}_1(i)} - l^{2\mathfrak{M}_2(i)}} K_0(w_{1,i} r_i);$$

$$b_{4i,4i-1} = I_0(w_{2,i} r_i); \quad b_{4i,4i} = K_0(w_{2,i} r_i); \quad b_{4i,4i+1} = -\frac{(k_{i+1}^2 - 1)x}{l^{2\mathfrak{M}_1(i+1)} - l^{2\mathfrak{M}_2(i+1)}} I_0(w_{1,i+1} r_i);$$

$$b_{4i,4i+2} = -\frac{(k_{i+1}^2 - 1)x}{l^{2\mathfrak{M}_1(i+1)} - l^{2\mathfrak{M}_2(i+1)}} K_0(w_{1,i+1} r_i); \quad b_{4i,4i+3} = -I_0(w_{2,i+1} r_i);$$

$$b_{4i,4i+4} = -K_0(w_{2,i+1} r_i);$$

$$b_{4i+1,4i-3} = m^{(i)} \left[ 1 - \frac{(k_i^2 - 1)x^2}{l^{2\mathfrak{M}_1(i)} - l^{2\mathfrak{M}_2(i)}} \right] \left\{ k_i^2 I_0(w_{1,i} r_i) - \frac{2}{w_{1,i} r_i} I_1(w_{1,i} r_i) \right\};$$

$$b_{4i+1,4i-2} = m^{(i)} \left[ 1 - \frac{(k_i^2 - 1)x^2}{l^{2\mathfrak{M}_1(i)} - l^{2\mathfrak{M}_2(i)}} \right] \left\{ k_i^2 K_0(w_{1,i} r_i) + \frac{2}{w_{1,i} r_i} K_1(w_{1,i} r_i) \right\};$$

$$b_{4i+1,4i-1} = -xm^{(i)} \left[ k_i^2 I_0(w_{2,i} r_i) - \frac{2}{w_{2,i} r_i} I_1(w_{2,i} r_i) \right];$$

$$b_{4i+1,4i} = -xm^{(i)} \left[ k_i^2 K_0(w_{2,i} r_i) + \frac{2}{w_{2,i} r_i} K_1(w_{2,i} r_i) \right];$$

$$b_{4i+1,4i+1} = -m^{(i+1)} \left[ 1 - \frac{(k_{i+1}^2 - 1)x^2}{l^{2\mathbb{M}_1^{(i+1)}} - l^{2\mathbb{M}_2^{(i+1)}}} \right] \left\{ k_{i+1}^2 I_0(w_{1,i+1} r_i) - \frac{2}{w_{1,i+1} r_i} I_1(w_{1,i+1} r_i) \right\};$$

$$b_{4i+1,4i+2} = -m^{(i+1)} \left[ 1 - \frac{(k_{i+1}^2 - 1)x^2}{l^{2\mathbb{M}_1^{(i+1)}} - l^{2\mathbb{M}_2^{(i+1)}}} \right] \left\{ k_{i+1}^2 K_0(w_{1,i+1} r_i) + \frac{2}{w_{1,i+1} r_i} K_1(w_{1,i+1} r_i) \right\};$$

$$b_{4i+1,4i+3} = xm^{(i+1)} \left[ k_{i+1}^2 I_0(w_{2,i+1} r_i) - \frac{2}{w_{2,i+1} r_i} I_1(w_{2,i+1} r_i) \right];$$

$$b_{4i+1,4i+4} = xm^{(i+1)} \left[ k_{i+1}^2 K_0(w_{2,i+1} r_i) + \frac{2}{w_{2,i+1} r_i} K_1(w_{2,i+1} r_i) \right];$$

$$b_{4i+2,4i-3} = \frac{m^{(i)} x}{w_{1,i}} \left[ \frac{(k_i^2 - 1)}{l^{2\mathbb{M}_1^{(i)}} - l^{2\mathbb{M}_2^{(i)}}} (w_{1,i}^2 + x^2) - 1 \right] I_1(w_{1,i} r_i);$$

$$b_{4i+2,4i-2} = -\frac{m^{(i)} x}{w_{1,i}} \left[ \frac{(k_i^2 - 1)}{l^{2\mathbb{M}_1^{(i)}} - l^{2\mathbb{M}_2^{(i)}}} (w_{1,i}^2 + x^2) - 1 \right] K_1(w_{1,i} r_i);$$

$$b_{4i+2,4i-1} = m^{(i)} \left( \frac{x^2 + w_{2,i}^2}{w_{2,i}} \right) I_1(w_{2,i} r_i); \quad b_{4i+2,4i} = -m^{(i)} \left( \frac{x^2 + w_{2,i}^2}{w_{2,i}} \right) K_1(w_{2,i} r_i);$$

$$b_{4i+2,4i+1} = \frac{m^{(i+1)} x}{w_{1,i+1}} \left[ 1 - \frac{(k_{i+1}^2 - 1)}{l^{2\mathbb{M}_1^{(i+1)}} - l^{2\mathbb{M}_2^{(i+1)}}} (x^2 + w_{1,i+1}^2) \right] I_1(w_{1,i+1} r_i);$$

$$b_{4i+2,4i+2} = \frac{m^{(i+1)} x}{w_{1,i+1}} \left[ \frac{(k_{i+1}^2 - 1)}{l^{2\mathbb{M}_1^{(i+1)}} - l^{2\mathbb{M}_2^{(i+1)}}} (x^2 + w_{1,i+1}^2) - 1 \right] K_1(w_{1,i+1} r_i);$$

$$b_{4i+2,4i+3} = -m^{(i+1)} \left( \frac{x^2 + w_{2,i+1}^2}{w_{2,i+1}} \right) I_1(w_{2,i+1} r_i); \quad b_{4i+2,4i+4} = m^{(i+1)} \left( \frac{x^2 + w_{2,i+1}^2}{w_{2,i+1}} \right) K_1(w_{2,i+1} r_i);$$

$$b_{M-1,M-3} = \left[ 1 - \frac{(k_M^2 - 1)x^2}{l^{2\mathbb{M}_1^{(M)}} - l^{2\mathbb{M}_2^{(M)}}} \right] \left\{ k_M^2 I_0(w_{1,M} r_M) - \frac{2}{w_{1,M} r_M} I_1(w_{1,M} r_M) \right\};$$

$$b_{M-1,M-2} = \left[ 1 - \frac{(k_M^2 - 1)x^2}{l^{2\mathbb{M}_1^{(M)}} - l^{2\mathbb{M}_2^{(M)}}} \right] \left\{ k_M^2 K_0(w_{1,M} r_M) + \frac{2}{w_{1,M} r_M} K_1(w_{1,M} r_M) \right\};$$

$$\begin{aligned}
b_{M-1,M-1} &= -x \left[ k_M^2 I_0(w_{2,M} r_M) - \frac{2}{w_{2,M} r_M} I_1(w_{2,M} r_M) \right]; \\
b_{M-1,M} &= -x \left[ k_M^2 K_0(w_{2,M} r_M) + \frac{2}{w_{2,M} r_M} K_1(w_{2,M} r_M) \right]; \\
b_{M,M-3} &= \frac{x}{w_{1,M}} \left[ \frac{(k_M^2 - 1)}{l^2 \phi_1^{(M)} - l^2 \phi_2^{(M)}} (w_{1,M}^2 + x^2) - 1 \right] I_1(w_{1,M} r_M); \\
b_{M,M-2} &= -\frac{x}{w_{1,M}} \left[ \frac{(k_M^2 - 1)}{l^2 \phi_1^{(M)} - l^2 \phi_2^{(M)}} (w_{1,M}^2 + x^2) - 1 \right] K_1(w_{1,M} r_M); \\
b_{M,M-1} &= \left( \frac{x^2 + w_{2,M}^2}{w_{2,M}} \right) I_1(w_{2,M} r_M); \quad b_{M,M} = -\left( \frac{x^2 + w_{2,M}^2}{w_{2,M}} \right) K_1(w_{2,M} r_M);
\end{aligned}$$

Після знаходження всіх невідомих  $A_n^{(i)}, B_n^{(i)}, C_n^{(i)}, D_n^{(i)}$  розв'язок вихідної задачі одержано у вигляді

$$\begin{cases} q^{(i)}(r, g, t) \\ w^{(i)}(r, g, t) \\ u^{(i)}(r, g, t) \end{cases} = \frac{2l}{p} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(lt) \int_0^{+\infty} \begin{cases} \bar{q}_n^{(i)}(r, x) \cos(xg) dx; \\ \bar{w}_n^{(i)}(r, x) \sin(xg) dx; \\ \bar{u}_n^{(i)}(r, x) \cos(xg) dx, \end{cases} \quad (7.89)$$

де  $\bar{q}_n^{(i)}(r, x)$ ,  $\bar{w}_n^{(i)}(r, x)$ ,  $\bar{u}_n^{(i)}(r, x)$  визначаються формулами (7.80), (7.82) і (7.84), відповідно, а відмінні від нуля компоненти тензора напружень обчислюються за законом Гука

$$\begin{cases} m_i^{-1} s_{rr}^{(i)}(r, g, t) \\ m_i^{-1} s_{rg}^{(i)}(r, g, t) \\ m_i^{-1} s_{gg}^{(i)}(r, g, t) \\ m_i^{-1} s_{jj}^{(i)}(r, g, t) \end{cases} = \frac{2l}{p} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(lt) \int_0^{+\infty} \begin{cases} [(k_i^2 - 2)\bar{q}_n^{(i)}(r, x) + 2d_r \bar{u}_n^{(i)}(r, x)] \cos(xg) dx; \\ [d_r \bar{w}_n^{(i)}(r, x) - x \bar{u}_n^{(i)}(r, x)] \sin(xg) dx; \\ [(k_i^2 - 2)\bar{q}_n^{(i)}(r, x) + 2x \bar{w}_n^{(i)}(r, x)] \cos(xg) dx; \\ [(k_i^2 - 2)\bar{q}_n^{(i)}(r, x) + 2r^{-1} \bar{u}_n^{(i)}(r, x)] \cos(xg) dx. \end{cases} \quad (7.90)$$

### 7.2.3. Числовий аналіз

За формулами (7.89), (7.90) було розраховано напружено-деформований стан у тришаровому циліндрі при  $f_{1,0}(g,t) = p^* (1-g^2)^2 (1-\exp(-at))^2$ ,  $f_{2,0}(g,t) = f_{1,M}(g,t) = f_{2,M}(g,t) = 0$ ,  $p^*/m = 0,01$ , де  $p^*$  – розмірна величина ( $\text{H/i}^2$ );  $a$  – безрозмірний параметр, що характеризує час виходу зовнішнього навантаження на усталене значення. При розрахунках в рядах за поліномами Лагерра утримувалося до 80 членів – це давало змогу обмежити відносну похибку обчислень значеннями меншими за 1%.

На рисунку 7.11 зображено розподіл в часі знерозмірених переміщень вільної поверхні неоднорідного циліндра  $u^* \equiv u(1,0,t)$  при різних значеннях параметра  $a$  (різних швидкостях навантаження) та при різних значеннях  $r_0$ .

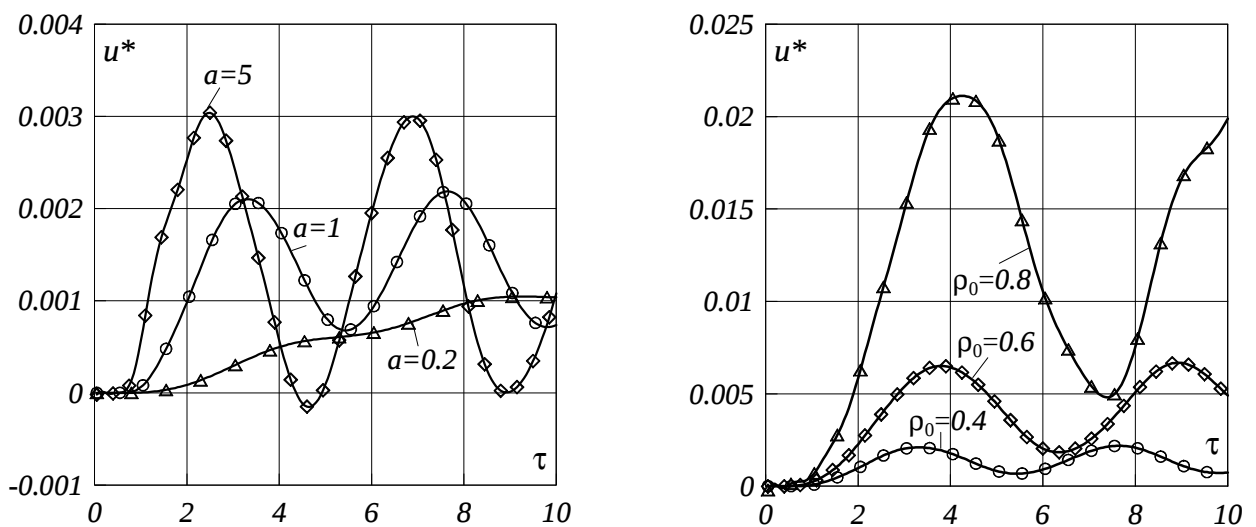


Рис. 7.11. Переміщення вільної границі циліндра та при різних товщині циліндра.

а) при різних швидкостях навантаження

б) при різних товщині циліндра

Помітно, що при  $a = 0,2$  розподіл в часі переміщень має квазістатичний характер і динамічними ефектами в циліндрі можна знехтувати; при  $a = 1$  максимальні динамічні переміщення переважають відповідні статичні в 1,4 рази, а при  $a = 5$  більше ніж вдвічі. Відмітимо, що значення  $a = 0,2$ , наприклад, для знерозмірюючого матеріалу циліндра зі сталі при  $R = 0,1\text{і}$  відповідає швидкості, за якої навантаження досягає 95% усталеного значення приблизно за  $0,3\text{і}$  с.

Зменшення загальної товщини стінки циліндра призводить до значного збільшення амплітуди коливань (зменшення товщини вдвічі від  $r_0 = 0,6$  до  $r_0 = 0,8$  збільшує амплітуду коливань більш ніж втричі). Крім того, зі зміною загальної товщини неоднорідного циліндра змінюється розташування статичної рівноваги, яке добре узгоджується з відомими результатами для відповідної задачі статички.

На рисунках 7.12 та 7.13 подано, відповідно, результати розрахунку знерозмірених радіальних  $s_r = s_{rr}(r, 0, t)/m$  напружень на серединній поверхні циліндра для різної його товщини при  $a=1$  та окружних напружень  $s_j = s_{jj}(r, 0, t)/m$  у різних точках поперечного перерізу. Як видно з рисунків, зменшення загальної товщини циліндра не збільшує амплітуди коливань радіальних напружень, а призводить до зближення їх часового розподілу з відповідним розподілом зовнішнього навантаження. Колові напруження у поперечному перерізі циліндра досягають свого максимуму як за амплітудою коливань, так і за статичним значенням на внутрішній (навантаженій) поверхні циліндра.

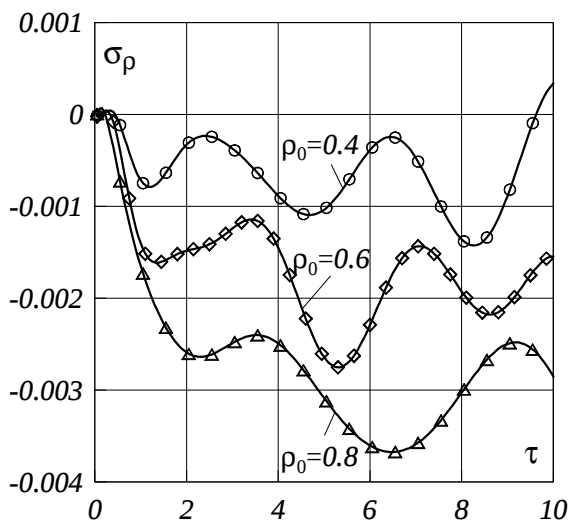


Рис.7.12.

Знерозмірені радіальні напруження при різних значеннях товщини циліндра

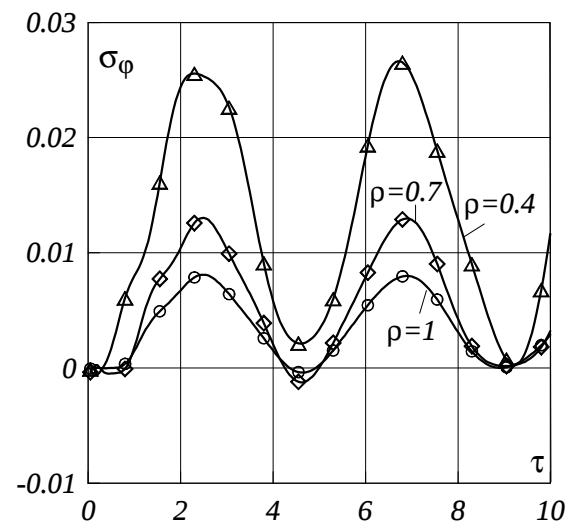


Рис. 7.13

Знерозмірені окружні напруження при різних в різних точках його перерізу

### **Висновки до розділу 7**

- розроблено аналітичну методику дослідження процесу поширення пружних хвиль в радіально-шаруватих тілах циліндричної форми;
- за результатами порівняльного аналізу виявлено хороше співпадіння одержаних в частковому одновимірному випадку розв'язків, із розв'язками, одержаними із використанням інтегрального перетворення Лапласа;
- із використанням розробленої методики проведено числовий аналіз задачі про нестационарні коливання простору із системою циліндричних вкладок, який може використовуватись при моделюванні технологічного процесу гідравлічного розриву сланцевих пластів;
- вперше одержано та числово апробовано розв'язки динамічних двовимірних осесиметричних задач теорії пружності для простору із циліндричною порожниною та шаруватого циліндра.

## ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано важливу науково-технічну проблему, що полягала у розробці методів аналітико-числового аналізу процесу трансформації двовимірних нестационарних температурних полів та напружено-деформованих станів у плоско- та циліндрично-шаруватих тілах і середовищах, зумовленого змінюваними в часі тепловими та силовими навантаженнями, у тому числі мішаного типу. Основні наукові результати є такими.

1. На основі методу поліномів Лагерра створено високоефективний математичний апарат для побудови та числового дослідження розв'язків початково-крайових задач механіки шаруватих тіл та середовищ. При цьому:

- а) зведено початково-крайові задачі для рівняння теплопровідності та хвильового рівняння в кожному шарі до трикутних послідовностей звичайних диференціальних рівнянь;
- б) знайдено загальні розв'язки цих послідовностей у вигляді алгебричних згорток та показано спосіб одержання їх фундаментальних розв'язків для прямокутної та циліндричної систем координат;
- в) розроблено методику розв'язування систем алгебричних рівнянь, що моделюють силове чи температурне навантаження граничних поверхонь неоднорідного тіла та термомеханічну взаємодію складових за їх довільної кількості;
- г) із використанням методу рядів Неймана створено аналітично-числову методику розв'язування послідовностей систем парних інтегральних рівнянь, які виникають при застосуванні методу інтегральних перетворень до нестационарних задач із мішаними крайовими умовами
- д) з'ясовано умови на відомі вхідні функції та параметри, при яких послідовності нескінчених систем лінійних алгебричних рівнянь, що одержуються при застосуванні вищезгаданої методики, є квазірегулярними;

2. Одержано точні замкнуті розв'язки квазістатичних двовимірних задач термопружності для кусково-однорідних тіл із плоскопаралельними границями

поділу для довільної кількості складових, їх довільної відносної товщини та контрастності фізико-механічних властивостей, що дає змогу використовувати одержані розв'язки при аналізі мезо- та наноструктур. При цьому:

- а) виявлено, що зміною взаємного розташування та кількості ізолюючих (кераміка) та зміцнюючих (алюмінієвий стоп) шарів можна досягнути значного зменшення внутрішніх температурних напружень за незмінності теплоізолюючих властивостей композитного тіла;
- б) встановлено, що урахування відносної товщини покриття слід обов'язково пов'язувати із його відносними термомеханічними характеристиками (контрастністю); в окремих випадках значні зміни в остаточних результатах спостерігаються в діапазоні відносної товщини покриття  $10^{-4} - 10^{-5}$ , що, на нашу думку, вимагає певного уточнення класичних уявлень механіки композитів;
- в) з'ясовано, що збільшення товщини зовнішнього ізолюючого покриття в півбезмежній неоднорідній плиті при змінному в часі нагріві її торцевої поверхні значно впливає на часову трансформацію внутрішніх температурних напружень і може призвести до специфічних видів руйнування.

3. Розроблено аналітичну методику побудови розв'язку квазістатичних задач термопружності радіально-шаруватих тіл циліндричної форми та досліджено особливості часової трансформації температурних полів та напружено-деформованого стану в таких тілах за різного виду теплового навантаження та при різних кількостях складових неоднорідного тіла.

4. Запропоновано та апробовано використання розробленої методики до аналізу квазістатичного термонапруженого стану циліндричних тіл із функційно-градієнтних матеріалів.

5. Досліджено перехідні термонапружені стани в шарі та півпросторі із покриттям за змішаних умов нагрівання різного роду та виявлено найістотніші механічні ефекти, зумовлені наявністю лінії поділу крайових умов.

6. Розроблено новий метод побудови точних розв'язків динамічних задач теорії пружності для плоскошаруватих тіл із довільною кількістю складових. При цьому:

- а) із застосуванням неklasичного розщеплення векторного рівняння руху пружного середовища в загальній циліндричній системі координат, що використовує фізичні функції – об'ємне розширення, нормальну компоненту вектора переміщення та прискорення зсуву сформульовано першу та другу основні задачі теорії пружності для шаруватих тіл за умов ідеального механічного контакту складових;
- б) досліджено динамічну реакцію плоскошаруватої плити на локальне високоінтенсивне нормальне навантаження та показано, що порядок взаємного розміщення та відносної товщини шарів істотно впливає на розподіл напружено-деформованого стану, максимальні за модулем значення напружень та їх стрибків на поверхнях поділу шарів протягом усього перехідного періоду.

7. Розроблено аналітичну методику дослідження процесу поширення пружних хвиль в радіально-шаруватих тілах циліндричної форми із використанням якої здійснено числовий аналіз задачі про нестационарні коливання простору із системою циліндричних вкладок, який може використовуватись при моделюванні технологічного процесу гідравлічного розриву газонесних пластів.

8. Одержано та чисельно апробовано розв'язки динамічних двовимірних осесиметричних задач теорії пружності для простору із циліндричною порожниною та шаруватого циліндра.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Абрамовиц М. Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган – М.: Наука, 1979. – 832 с.
2. Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень. Механіка / за ред. В. В. Мелешка, В. Н. Олійника. – К. : Наук. думка, 2007. – 361 с.
3. Аленицин А.Г. О задаче Лемба для неоднородного упругого полупространства / А.Г. Аленицин // Проблемы мат. физики. – № 2. – Л., – 1966. – С.5-32.
4. Амербаев В. М. Операционное исчисление и обобщенные ряды Лагерра / В. М. Амербаев – Алма-Ата, 1974.
5. Андрейків О. Узагальнений метод дослідження трибоконтактної взаємодії у циліндричній напрямній з різнотипним ограненням її елементів / О. Андрейків, М. Чернець, Н. Лебедева // Машинознавство. – 2006. – № 7 (109). – С. 43-46.
6. Бабаев А.Э. Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей/ А.Э. Бабаев– К.: Наук. думка, 1990. – 176 с.
7. Беляев Н. М. Математические методы теплопроводности / Н. М. Беляев, А. В. Рядно – К. : Вища школа, 1993. – 415 с.
8. Бенерджи П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи , Р. Баттерфилд – М. : Мир, 1984. – 494 с.
9. Бережницкий Л. Т. Взаимодействие жестких линейных включений и трещин в деформируемом теле / Л. Т. Бережницкий, В. В. Панасюк, Н. Г. Стащук – К. : Наук. думка, 1983. – 288 с.
10. Блажевский С. Г. Термоупругое состояние симметричных пространств / С. Г. Блажевский , М. П. Ленюк М. П. – Черновцы : Черновицкий гос. ун-т, 1992. – 85 с.
11. Божидарник В.В. Елементи теорії пластичності та міцності/ В.В. Божидарник, Г.Т. Сулим– Львів: Світ, 1999. – I–II – 944с.
12. Божидарник В. В. Елементи теорії пружності : навч. посібник /

- В. В. Божидарник, Г. Т. Сулим – Львів : Світ, 1994. – 560 с.
13. Боли Б. Теория температурных напряжений / Б. Боли, Дж. Уэйнер – М. : Мир, 1964. – 517 с.
  14. Болотин В. В. Механика многослойных конструкций / В. В. Болотин, Ю. Н. Новичков – М. : Машиностроение, 1980. – 375 с.
  15. Бреbia К. Применение метода граничных элементов в технике/ К. Бреbia, С. Уокер – М.: Мир, 1982. – 248с.
  16. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье./ Г. Бремерман – М.: Мир, 1968. – 276с.
  17. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах / Л.М. Бреховских - М.: Наука, 1973. - 343 с.
  18. Брычков Ю.А. Интегральные преобразования обобщенных функций/ Ю.А. Брычков, А.П. Прудников – М.: Наука, 1977. – 288с.
  19. Бурак Я. Й. Термомеханіка багатокomпонентних тіл низької електропровідності / Я. Й. Бурак, О. Р. Гачкевич, Р. Ф. Терлецький // Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл. Т. 1. ; за ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра. — Львів : СПОЛОМ, 2006. – 300 с.
  20. Вайсфельд Н.Д. Нестационарные динамические задачи концентрации упругих напряжений возле сферического дефекта / Н.Д. Вайсфельд, Г.Я. Попов // Изв. РАН. МТТ.– 2002. – №3. – С. 90–102.
  21. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Часть первая./ Г.Н. Ватсон - М.: Издательство иностранной литературы, 1949. - 798 с.
  22. Вендин С. В. К расчету нестационарной теплопроводности в многослойных объектах при граничных условиях третьего рода / С. В. Вендин // Инж.-физ. журн. – 1993. –№ 2 (65). – С. 249-251.
  23. Вигак В.М. Температурные напряжения в многослойном кусочно-однородном цилиндре/ В.М. Вигак, А.М. Ригин А.М. // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1982. –Вып. 15. – С. 63–67.
  24. Вигак В. М. О построении решения уравнения теплопроводности для кусочно-однородного тела / В. М. Вигак // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 1.

- С. 30-32.
25. Вишневский К. В. Граничные интегральные уравнения для тела с инородными включениями / К. В. Вишневский, Р. М. Кушнир // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 1996. – Т. 39, № 1. – С. 37-41.
  26. Вігак В. М. Дослідження напружень у термочутливих циліндричних тілах / В. М. Вігак, Б. М. Калиняк // Машинознавство. – 1999. – № 9. – С. 10-14.
  27. Владимиров В.С. Уравнения математической физики./ В.С. Владимиров – М.: Наука, 1976. –528с.
  28. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров – М. : Наука, 1979. – 320 с.
  29. Власов В. В. Применение функций Грина к решению инженерных задач теплофизики / В. В. Власов – М. : Изд.-во Московского ин-та хим. маш, 1972.
  30. Гаврись А. П. Определение остаточных напряжений в системе слой-покрытие при двухстороннем высокотемпературном напылении / А. П. Гаврись, Д. В. Иващук, П. Р. Шевчук // Мат. методы и фіз.-мех. поля. – 1989. – Вып. 29. – С. 8-12.
  31. Галазюк В.А., Горечко О.М. Про один метод розв'язування динамічних задач теорії пружності в сферичних і циліндричних координатах/ В.А. Галазюк, О.М. Горечко // Доп. АН УРСР, Сер.А. – 1980. – №6. – С. 40–43.
  32. Галазюк В.А. Исследование нестационарных температурных полей в телах сферической формы методом полиномов Чебышева–Лагерра/ В.А. Галазюк, Я.Ю. Коляно // Инж.–фіз. журн. – 1987.– Т.52, №5. – С. 844–851.
  33. Галазюк В.А. Метод поліномів Чебишева–Лагерра в просторовій динамічній задачі термopружності/ В.А. Галазюк, Я.Ю. Коляно // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць – Київ: Ін-т математики НАН України, 2000. – Вип. 5. – С. 18–47.
  34. Галазюк В. А. Метод поліномів Чебишева-Ларерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами / В. А. Галазюк // Доп. АН УРСР, Сер. А. – 1981. – № 1. – С. 3-7.

35. Галазюк В. А. Общее решение бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений / В. А. Галазюк, А. Н. Горечко // Укр. матем. журнал. – 1983. – Т. 35, № 6. – С. 742–745.
36. Галицын А.С. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности / А.С. Галицын, А.Н. Жуковский – Киев: Наук. думка, 1976. – 283 с.
37. Гарматій Г. Числове розв'язування нестационарних задач теплопровідності термочутливих тіл при конвективному теплообміні / Г. Гарматій, М. Кутнів, В. Попович // Машинознавство. – 2002, № 1 (55). – С. 21-25.
38. Гачкевич А.Р. Методика решения комплексной задачи термомеханики электропроводных тел при импульсных электромагнитных воздействиях / А.Р. Гачкевич, Р.С. Мусий, Г.Б. Стасюк, И.И. Шимчак // Теорет. и прикл. механика. – 2006, – Вып. 42. – С. 105–111.
39. Гачкевич А.Р. Оптимальный нагрев внешней средой кусочно–однородных оболочек вращения при наличии внутренних источников тепла/ А.Р. Гачкевич, Н.Г. Гачкевич // Прикл. механика. – 1995. – 31, №11. – С. 51 – 57.
40. Гачкевич О.Р. Температурні поля і напруження в довгому порожнистому циліндрі при електромагнетній дії в режимі згасної синусоїди / О.Р. Гачкевич, Р.С. Мусій, Г.Б. Стасюк // Фіз.-хім механіка матеріалів. – 2003. – Т. 39 – № 5. – С. 67–72.
41. Гачкевич А. Р. Термодинамика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электро-магнитных полей / А. Р. Гачкевич – К. : Наукова думка, 1992. – 191 с.
42. Гельфанд И.М. Обобщенные функции и действия над ними./ И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов– М.: Физматгиз, 1959. – 470 с.
43. Головчан В.Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6 т./ В.Т. Головчан, В.Д. Кубенко, Н.А. Шульга и др. – Киев: Наукова думка. – 1986. – Т.5: Динамика упругих тел. – 286 с.
44. Горечко Н. О. Розрахунок квазістатичного термонапруженого стану напів-безмежних контактуючих тіл / Н. О. Горечко , Р. М. Кушнір // Мат. методи та

- фіз.-мех. поля. – 2005. – Т. 48, № 3. – С. 82–87.
45. Горшков А.Г. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы / А.Г. Горшков, Д.В. Тарлаковский – М.: Наука, 1990. – 264 с.
  46. Горшков А.Г. Волны в сплошных средах./ А.Г. Горшков, А.Л. Медведский, Л.Н. Рабинский, Д.В. Тарлаковский – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
  47. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик – М.: Наука, 1975. – 1108 с.
  48. Григолюк Э.И. Нестационарная гидроупругость оболочек./ Э.И. Григолюк, А.Г. Горшков А.Г. – Л.: Судостроение, 1974. – 208 с.
  49. Григолюк Э.И. Перфорированные пластины и оболочки./ Э.И. Григолюк, Л.А. Фильштинский – М.: Наука, 1970. – 556с.
  50. Григолюк Э. И. Пути развития теории упругих многослойных пластин и оболочек / Э.И. Григолюк, Г. М. Куликов // Вестник ТГТУ. – 2005. – Т. 11, № 2. – С. 439-448.
  51. Григоренко Я.М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости./ Я.М. Григоренко – Киев: Наук. думка, 1973 228с.
  52. Григоренко Я.М. Напружений стан шаруватих оболонок обертання при проковзуванні шарів/ Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко // Доп. НАН України. – 1999. – №3 – С. 49–52.
  53. Григоренко Я.М., Застосування скінченних різниць і приграничних елементів в задачі пружності для неоднорідного тіла/ Я.М. Григоренко, Є. Г. Грицько, Л.М. Журавчак // Доп. НАН України. – 1993. – №4. – С 49–53.
  54. Григоренко Я. М. Визначення напружено-деформованого стану анізотропних термочутливих циліндрів / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 1. – С. 73-77.
  55. Григоренко Я. М. Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко – М.: Наука, 1992. – 332 с.
  56. Григоренко Я. М. Задачи теории упругости неоднородных тел / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, Н. Д. Панкратова – Киев.: Наук. думка, 1991. – 216 с.

57. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости / Я. М. Григоренко – Киев : Наук. думка, 1973. – 228 с.
58. Грилицкий Д.В. Упругие напряжения в плоскости с тонкостенным включением/ Д.В. Грилицкий, Г.Т. Сулим // Мат. методы и физ.–мех. поля. – 1975. – Вып. 1. – С. 41–48.
59. Грилицкий Д. В. Периодическая задача для кусочно-однородной плоскости с тонкостенными включениями / Д.В. Грилицкий, Г.Т. Сулим // Прикл. механика. – 1975. – **11**, № 1. – С. 74-81.
60. Грингауз М.Г. Метод интегральных уравнений в двумерных задачах теории упругости для кусочно–однородных сред с разрезами/ М.Г. Грингауз, Л.А. Фильштинский // Мат. методы и физ.–мех. поля. – 1986. – Вып. 24. – С. 28–31.
61. Гринченко В.Т. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках / В.Т. Гринченко, И.В. Вовк. – К: Наук. думка, 1986. – 240 с
62. Гринченко В.Т. Гармонические колебания и волны в упругих телах / В.Т. Гринченко, В.В. Мелешко. – К.: Наук. думка, 1981. – 283 с.
63. Гринченко В.Т. Задачи термоупругости для областей, ограниченных перпендикулярными граничными поверхностями/ В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1969 – Вып 8 – С. 110–125.
64. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Равновесие упругих тел канонической формы./ В.Т. Гринченко – Киев: Наук. думка, 1985. – 280с.
65. Гринченко В. Т. О локальных особенностях в математических моделях физических полей/ В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко // Мат. методы та фіз.–мех. поля. – 1998. – Т. 41, № 1. – С. 12–34.
66. Гринченко В. Т. Об одном подходе к исследованию температурных напряжений в составном цилиндре / В.Т. Гринченко, А. Ю. Шевченко // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – Киев : Наук. думка, 1978. – Вып. 18. – С. 60–65.

67. Григоренко Я.М. Механика композитов: В 12-ти т.– Т.8. Статика элементов конструкций / Я.М. Григоренко, А.Т. Василенко, И.Г. Емельянов И.Г. и др.– К.: А.С.К. – 1999, –379 с.
68. Гузь А.Н. Гидроупругость систем оболочек / А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко, А.Е. Бабаев. – К.: Вища шк., 1984. – 207 с
69. Гузь А.Н. Дифракция упругих волн./ А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко, М.А. Черевко. – Киев: Наукова думка, 1978. – 308 с.
70. Гузь А.Н. Механика композитных материалов и элементов конструкций: В 3-х т.– Т.2. Механика элементов конструкций / А.Н. Гузь, Я.М. Григоренко, Бабич И.Ю. и др.– К.: Наук. думка, 1982– 464с.
71. Дияк І. І. Числовий аналіз задач теплопровідності прямим методом граничних елементів / І. І. Дияк , Н. П. Кухарська // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – 48, № 3. – С. 157-161.
72. Долгих В.Н. Об одной модели регулярной кусочно–неоднородной среды/ В.Н. Долгих, Л.А. Фильштинский // Изв. АН СССР. МТТ – 1976. – №2. – С. 158–164.
73. Дяконюк Л. Математичне моделювання процесів теплопровідності в багат шарових середовищах із тонкими включеннями / Л. Дяконюк, В. Кухарський, Я. Савула // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів, – 2000. – Т. 1. – С. 212-215.
74. Евтушенко А. А. Осесимметричный контакт между термочувствительными телами с различными температурами / А. А. Евтушенко, Е. В. Коваленко, Р. Д. Кульчицкий-Жигайло // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 1. – С. 70-77.
75. Ефимов В.В. Задачи о концентрации напряжений возле кругового дефекта в составной упругой среде/ В.В. Ефимов, А.Ф. Кривой, Г. Я. Попов Г. Я. // Изв. РАН. МТТ. – 1998. – №2. – С. 42 58.
76. Євтушенко О. О. Розігрів фрикційним теплом багат шарового простору / О. О. Євтушенко, Є. Г. Іваник, Н. В. Горбачова // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – 40, № 1. – С. 111-116.

77. Жук Я.А. Связанное термомеханическое поведение трехслойной вязко-пластической балки при гармоническом нагружении / Я.А. Жук, И.К. Сенченков // Приклад. механика. – 2000. – 36, № 2. – С. 135–143.
78. Жук Я.О. Вплив мікроструктурних перетворень на напружено-деформований стан локально опроміненого сталевго диска / Я.О. Жук, І.К. Сенченков, Л.Я. Васильєва // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – Т. 54, № 1. – С. 101-115.
79. Жук Я.А. Волны напряжений в цилиндре, возбуждаемые тепловым импульсом на одном из торцов / Я.А. Жук, И.К. Сенченков, Е.В. Бойчук // Теор. и прикл. механика. – 2006. – Вып. 42. – С. 136-141.
80. Завьялов Ю.С. Методы сплайн-функций./ Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко– М.: Наука, 1980. – 352 с.
81. Зорий Л.М. К применению обобщенных функций в аналитических методах исследования сложных упругих систем/ Л.М. Зорий // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1978. – №11 – С. 991–994.
82. Иванов В. В. Процессы прогрева многослойных тел лучисто-конвективным теплом / В. В. Иванов, Ю. В. Видин, В. А. Колесник – Ростов-на Дону: Изд-во Ростов. ун-та, 1990. – 160 с.
83. Ильюшин А.А. Основы математической теории термо-вязкоупругости/ А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря– М.: Наука, 1970. – 280с.
84. Каландия А.И. Математические методы двумерной упругости./А.И. Каландия – М.: Наука, 1973.– 304с.
85. Калиняк Б.М. Напружений стан багатосферного термочутливого циліндра за умов асимптотичного теплового режиму / Б.М. Калиняк, В.С. Попович // Машинознавство. – 2004. – №6(82). – С. 1–10.
86. Калиняк Б. М. Напружений стан термочутливого циліндра в умовах асимптотичного теплового режиму / Б.М. Калиняк, В.С. Попович // Машинознавство. – 2004. – № 4. – С. 3-9.
87. Калоев С.А. Приложение задачи сопряжения к исследованию напряженного состояния многосвязной изотропной полуплоскости/

- С.А. Калоеров // Теор. и прикл. механика. – 1993.– Вып. 24 – С. 27–33.
88. Канторович Л.В. Приближенные методы высшего анализа./ Л.В. Канторович, В.И. Крылов М.-Л.: Физматлит, 1962. – 708 с.
  89. Карнаухов В.Г. Связанные задачи термовязкоупругости./ В.Г. Карнаухов– К.: Наук. думка, 1982. – 258с.
  90. Карнаухов В.Г. Электротермовязкоупругость / В. Г. Карнаухов, И. Ф. Киричок. – К.: Наук. думка, 1988. – 320 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. Т. 4.
  91. Карнаухов В. Г. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек / В. Г. Карнаухов, И. Ф. Киричок. – К. : Наук. думка, 1986. – 224 с.
  92. Карслоу Г. Теплопроводность твердых тел / М. Карслоу , Д. Егер – М. : Наука, 1964. – 487 с.
  93. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел / Э. М. Карташов – 3-е изд. – М. : Высш. школа, 2001. – 550 с.
  94. Киселев С. Н. Температурные поля при сварке цилиндрических оболочек из разнородных металлов / С. Н. Киселев // Сварочное производство. – 1975. – № 12 – С. 1–3.
  95. Кит Г.С. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами./ Г.С. Кит, М.В. Хай. – К.: Наук. думка, 1989. – 288с.
  96. Кіт Г.С. Методи визначення статичних і динамічних напружень у тілах з підповерхневими тріщинами / Г.С. Кіт, Р.М. Кушнір, В.В. Михаськів, М.М. Николишин // Фіз.- хім. механіка матеріалів. – 2011. – 47, № 2. – С. 56–66.
  97. Кіт Г.С. Метод потенціалів у тривимірних статичних і динамічних задачах теорії тріщин/ Г.С. Кіт, В.В. Михаськів, М.В. Хай // Фіз. хім. механіка матеріалів. – 1996. – №1.– С. 22–32
  98. Кіт Г. С. Термопружність кусково–однорідного тіла із закритою міжфазною тріщиною при наявності контактного термоопору між її берегами / Г. С. Кіт , Р. М. Мартиняк // Доп. НАН України.– 1996. № 10. -С. 84–88.
  99. Коваленко А. Д. Избранные труды / А. Д. Коваленко – К. : Наук. думка, 1976. – 762 с.

100. Коваленко А. Д. Термоупругость / А. Д. Коваленко – К. : Вища школа, 1975. – 215 с.
101. Колчин Г. Б. Плоская задача теории упругости неоднородных тел / Г. Б. Колчин – Кишинев : Штиинца, 1977. – 119 с.
102. Коляно Ю.М. Температурные напряжения в слоистых телах при неидеальном термомеханическом контакте на поверхностях раздела/ Ю.М. Коляно, Р.М. Кушнир, Ю.А. Музычук // Прикл. механика.– 1986.– 22, №11.– С– 28–36.
103. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно – К. : Наук. думка, 1992. – 280 с.
104. Коляно Ю. М. Нестационарное температурное поле в многослойном ортотропном цилиндре / Ю. М. Коляно, Б. В. Процюк, В. М. Синюта, и др. // Инж.-физ. журнал. – 1992. – **62**, № 2 .– С. 325-330.
105. Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные напряжения в армированной полосе–пластинке / Ю. М. Коляно, Р. М. Кушнир // Прикл. механика. – 1979. – 15, № 7. – С. 124–128.
106. Коляно Ю. М. Об одном эффективном методе решения задач термоупругости для кусочно–однородных тел, нагреваемых внешней средой / Ю. М. Коляно, В. С. Попович // Физ.–хим. механика материалов. – 1976. – № 2. – С. 108–112.
107. Коляно Ю. М. Про постановку узагальненої задачі спряження для рівнянь термопружності кусково-однорідних тіл / Ю. М. Коляно, О. М. Кулик, Р. М. Кушнір // Доповіді АН УРСР. Сер. А. – 1980. – № 2. – С. 43–47.
108. Коляно Ю. М. Температурные напряжения от объемных источников / Ю. М. Коляно, А. Н. Кулик – К. : Наук. думка, 1983. – 288 с.
109. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров./ Г. Корн, Т. Корн– М.: Наука, 1977. – 831с.
110. Космодамианский А.С. Динамические задачи теории упругости для анизотропных сред / А.С. Космодамианский, В.И. Сторожев. – К.: Наук. думка, 1985. – 179 с.

111. Космодамианский А.С. Температурные напряжения в многосвязных пластинах./ А.С. Космодамианский, С.А. Калоеров К., Донецк: Вища школа, 1983.– 160с.
112. Крауч С. Методы граничных элементов в механике твердого тела / С. Крауч , А. Старфилд – М. : Мир, 1987. – 328 с.
113. Кричевец Ю.М. Термонапряженное состояние полупространства с инородным цилиндрическим включением/ Ю.М. Кричевец, Е.Г. Иваник, И.Р. Татчин // Мат методы и физ–мех. поля – 1989 – Вып.30.– С.41–45.
114. Крылов В. И. Методы приближенного преобразования Фурье и обращение преобразования Лапласа / В. И. Крылов, Н. С. Скобля – М. : Наука, 1974. – 223 с.
115. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой / В.Д. Кубенко. – К.: Наук. думка, 1979. – 184 с.
116. Кубенко В. Д. Плоская задача нестационарного вдавливания затупленного жесткого индентора в поверхность упругого слоя / В. Д. Кубенко, Т. А. Марченко // Прикладная механика. – 2008. – 44, № 3. – С. 55-65.
117. Кудинов В. А. Тепломассоперенос и термоупругость в многослойных конструкциях / В. А. Кудинов, В. В. Калашников, Э. М. Карташов [и др.] – М. : Энергоатомиздат, 1997. – 420 с.
118. Кунець Я.І. Розсіяння імпульсів пружних SH–хвиль на тонкостінному пружному криволінійному включенні / Я.І. Кунець, В.В. Матус, В.В. Пороховський // Мат. методи та фіз.- мех. поля. – 2000. – 43, № 4. – С. 150–154.
119. Купрадзе В.Д. Трехмерные задачи теории упругости и термоупругости / В.Д. Купрадзе, Т.Г. Гегелия, М.О. Башелейшвили, Т.В. Бурчуладзе– М.: Наука, – 1976, – 663 с.
120. Купрадзе В. Д. Еще раз о решении граничных задач теории упругости для неоднородных тел кусочно–однородной структуры / В. Д. Купрадзе // Труды Тбил. ун–та. 1985. – № 18. – С. 521.

121. Кушнір Р.М. О методике определения динамических напряжений в теле с трещинами при антиплоской деформации / Р.М. Кушнір, Т.Я. Соляр // Теор. и прикл. механика. – 2012. – Вып. 4 (50). – С. 160–166.
122. Кушнір Р. М. О построении решений обыкновенных дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами / Р. М. Кушнір // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1980. – № 9. – С. 55-59.
123. Кушнір Р.М. Визначення термopужного стану кусково–однорідної циліндричної оболонки з тріщиною/ Р. М. Кушнір // Доп. НАН України– 1999.–№6.– С. 73–78.
124. Кушнір Р.М. Використання методу узагальнених задач спряження в термopужності кусково–однорідних тіл при неідеальному контакті/ Р. М. Кушнір // Мат. методи та фіз. мех. поля. 1998, **41**. №1. С. 108–116
125. Кушнір Р.М. Квазістатичні температурні напруження в багатопаровому термочутливому циліндрі / Р.М. Кушнір, Б.В. Процюк, В.М. Синюта // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – 40, № 4. – С. 7-16.
126. Кушнір Р.М. Про побудову розв'язків звичайних лінійних диференціальних рівнянь з кусково–сталими коефіцієнтами/ Р. М. Кушнір // Доп. АН УРСР. Сер. А– 1980.– №9– С. 54–57.
127. Кушнір Р.М. Про один підхід до побудови розв'язку узагальненої задачі спряження/ Р. М. Кушнір, Г. П. Лопушанська // Мат. методи і фіз.–мех. поля. 1992– Вил. 35 –С. 198–203.
128. Кушнір Р.М. Температурні напруження у кусково однорідній циліндричній оболонці, зумовлені наявністю поздовжньої гріщини/ Р.М. Кушнір, В.А. Осадчук // Мат. методи та фіз.–мех. поля.– 1999.– 42, №1.– С. 108 113.
129. Кушнір Р. М. Аналітично-чисельне розв'язування контактних задач термopужності для термочутливих тіл / Р. М. Кушнір, В. С. Попович, Г. Ю. Гарматій // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2001. – № 6. – С. 39-44.
130. Кушнір Р. М. Використання методу узагальнених задач спряження в термopужності кусково–однорідних тіл при неідеальному контакті / Р. М. Кушнір // Мат. методи та фіз. мех. поля. - 1998. - 41. № 1. - С. 108–116.

131. Кушнір Р. М. Квазістатичні температурні напруження в багатошаровому термочутливому циліндрі / Р. М. Кушнір, Б. В. Процюк, В. М. Синюта // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004. – № 4. – С. 7-16.
132. Кушнір Р. М. Про побудову розв'язків звичайних лінійних диференціальних рівнянь з кусково–сталими коефіцієнтами / Р. М. Кушнір // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1980. – № 9 – С. 54–57.
133. Лавренюк В.И. К решению пространственной квазистатической задачи термоупругости для кусочно–однородных тел./ В.И. Лавренюк // Изв. АН СССР. МТТ. 1979. №3. С. 63–69
134. Лавренюк В.І. Напружений стан кусково–однорідних тіл при дії нестационарних теплових полів/ В.І. Лавренюк, В.М. Терещенко // Мат. методи та фіз.–мех. поля– 1997.– 40, №1– С. 53–58.
135. Лавренюк В. І. Напружений стан кусково-однорідного циліндра при дії нестационарних температурних полів / В.І. Лавренюк, В.М. Терещенко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – 40. № 1. – С. 53-58.
136. Лазарян В.А. Обобщенные функции в задачах механики/ В.А. Лазарян, С.И. Конашенко–К.: Наук. думка, 1974.– 190с.
137. Лазарян В. А. Обобщенные функции в задачах механики / В.А. Лазарян, С.И. Конашенко – К. : Наук. думка, 1974. – 189 с.
138. Лебедева А. В. Об обращении преобразования Лапласа с помощью рядов Лагерра / А. В. Лебедева, В. М. Рябов // Вестн. С.-Петерб. ун-та, 1997. – № 22. – С. 49–54.
139. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Ч. 1. / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик – Чернівці : Прут, 2004. – 368 с.
140. Леонова Э. А. Температурные напряжения в цилиндре с переменными термоупругими характеристиками / Э. А. Леонова // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1976. – № 1. – С. 161-166.
141. Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел./ В.А. Ломакин– М.: Изд–во МГУ, 1976.–367с.

142. Ломакин В.А. Об одном способе решения плоских задач упругости кусочно–однородных тел./ В.А. Ломакин, В.А. Лавренюк // Прикл. механика.– 1979.– 15, №7– С. 62–67.
143. Ломакин В. А. Об одном способе решения плоских задач упругости кусочно–однородных тел / В.А. Ломакин, В.А. Лавренюк // Прикл. механика. – 1979. – 15, № 7 – С. 62–67.
144. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков – М. : Высшая школа, 1967. – 599 с.
145. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации./ Ю. Люк– М.: Мир, 1980–608с.
146. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации / Ю. Люк – М. : Мир, 1980. – 608 с.
147. Максимович В. М. Визначення методами Фур'є та граничних елементів неосесиметричного термопружного стану тіл обертання / В. М. Максимович, Г. В. Пляцко, О. О. Цибульський - Л., 1995. – 62 с. -Препр. / АН України ІППММ, № 9-94.
148. Максимович В. М. Визначення стаціонарних і нестаціонарних температур у багатозв'язних просторі та шарі / В. М. Максимович, В. В. Геворгян, Т. Я. Соляр // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 3. – С. 135-139.
149. Максимович В. М. Сумісне застосування узагальненого методу відокремлення змінних і перетворення Лапласа до тривимірних задач нестаціонарної теплопровідності / В. М. Максимович, Т. Я. Соляр // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 2. – С. 70–75.
150. Максимук О. В. Математичне моделювання та методи розрахунку тонкостінних композитних конструкцій / О. В. Максимук, Р. М. Махницький, Н. М. Щербина – Львів : ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2005. – 386 с.
151. Мартиняк Р. М. Математична модель механічного контакту тіл через тонкий неоднорідний прошарок / Р. М. Мартиняк , Р. М. Швець // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – 40, № 2. – С. 107–109.

152. Мартиняк Р. М. Термопружний контакт півпросторів, що мають однакові термічні дистортивності, за наявності теплопроникного міжповерхневого просвіту / Р. М. Мартиняк, К. А. Чумак // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – 51, № 3. – С. 163–175.
153. Мелешко В. В. Теплові напруження у прямокутних пластинах / В. В. Мелешко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – Т. 48, № 4. – С. 140–164.
154. Михаськів В. В. Використання граничних і приграничних елементів у двовимірній моделі нестационарної теплопровідності / В. В. Михаськів, Л. М. Журавчак, Г. В. Фітель // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – 46, № 2. – С. 155-161.
155. Михлин С.Г. Интегральные уравнения в теории упругости./ С.Г. Михлин, Н.Ф. Морозов, М.А. Паукшто – Спб.: Изд-во С.-Петербургского у и та, 1994.– 272с.
156. Мотовиловец И.А. Теплопроводность пластин и тел вращения./ И.А. Мотовиловец – К.: Наук. думка, 1969. – 144с.
157. Мотовиловец И.А. Термоупругость / И.А. Мотовиловец, В.И. Козлов // Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. Т. 1.– К.: Наук. думка, 1987. – 264 с.
158. Мусій Р.С. Динамічна задача електромагнітотермопружності для довгого порожнистого біметалевого циліндра при нестационарній електромагнітній дії / Р.С. Мусій, Н.Б Мельник // Машинознавство. – 2001. – № 9. – С. 18-23.
159. Назарчук З.Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах / З.Т. Назарчук. – К.: Наук. думка, 1989. – 256 с.
160. Немиш Ю. Н. Элементы механики кусочно-однородных тел с неканоническими поверхностями раздела / Ю. Н. Немиш – К. : Наук. думка, 1989.– 372 с.
161. Николишин М. Розкриття наскрізної тріщини в кусково–однорідній пластині/ М. Николишин, Р. Кушнір, Р.Боднар // Машинознавство,– 1999.– №8.– С. 19–22.
162. Новацкий В. Теория упругости./ В. Новацкий – М.: Мир, 1975.– 872с.
163. Новацкий В. Вопросы термоупругости / В. Новацкий – М. : Изд-во АН СССР,

1962. – 364 с.
164. Образцов И.Ф. Строительная механика скошенных тонкостенных систем/ И.Ф.Образцов, Г.Г. Онанов – М.: Машиностроение, 1973. 659с.
  165. Онанов Г. Г. Уравнения с сингулярными коэффициентами типа дельта-функции и ее производных / Г. Г. Онанов – Докл. АН СССР. – 1970. – **191**, № 5. - С. 997-1000.
  166. Онишко Л.Й. Напружений стан порожнистого двошарового циліндра під динамічним навантаженням/ Л.Й. Онишко, М.М. Сенюк // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – 45, №1. С. 55–61.
  167. Опанасович В.К. Двовісний згин ізотропної пластини з урахуванням ширини області контакту її берегів і за наявності пластичних зон біля її вершин / В.К. Опанасович, М.С. Слободян // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 4. - С. 128-135.
  168. Панасюк В.В. Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, З.Т. Назарчук. – К.: Наук. думка, 1984. – 344 с.
  169. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения / Г. Паркус – М. : Физматгиз, 1963. – 252 с.
  170. Партон В.З. Динамическая механика разрушения / В.З. Партон, В.Г. Борисковский. – М.: Машиностроение, 1985. – 264 с.
  171. Партон В.З. Методы математической теории упругости./ В.З. Партон, П.И. Перлин–М.: Наука, 1981–688 с.
  172. Пастернак Я.М. Розв’язування методами інтегральних рівнянь задач антиплоского деформування тіл із тонкими стрічковими включеннями. II. Аналіз концентрації та інтенсивності напружень / Я.М. Пастернак, Г.Т. Сулим // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2012. – 48, № 6. – С. 86–91.
  173. Пелех Б. Л. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями / Б. Л. Пелех, А. В. Максимук, И. М. Коровайчук – К. : Наук. думка, 1988. – 279 с.
  174. Пискунов В. Г. Развитие теории слоистых пластин и оболочек / В. Г. Пис-

- кунов , А. О. Рассказов // Прикладная механика. – 2002. – 38, № 2. – С. 22–56.
175. Підстригач Я.С. Вибрані праці/ Я.С. Підстригач— К.: Наук. думка, 1995.— 460 с
176. Підстригач Я.С. Умови стрибка напружень і переміщень на тонкостінному включенні в суцільному середовищі/ Я.С. Підстригач // Доп. АН УРСР Сер А. 1982 – №12– С. 29 31.
177. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности/ Б. Е. Победря –М.: Изд-во Моск. ун та, 1981.– 344с.
178. Победря Б. Е. Численные методы в теории упругости и пластичности / Б. Е. Победря – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1981. – 344 с.
179. Подильчук Ю.Н. Граничные задачи статики упругих тел/ Ю.Н. Подильчук // Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6-ти т. / Под общ.ред. А.Н.Гузя– К.: Наук. думка, 1984– Т.1– 303с.
180. Подильчук Ю.Н. Лучевые методы в теории распространения и рассеяния волн / Ю.Н. Подильчук, Ю.К. Рубцов.– К.: Наук. думка, 1988. – 219 с.
181. Подстригач Я.С. Рассеяние звуковых пучков на упругих телах сферической и цилиндрической формы / Я.С. Подстригач, А.П. Поддубняк. – К.: Наук. думка, 1986. – 264 с.
182. Подстригач Я.С. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках/ Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно – К.: Наук. думка, 1972.– 308с.
183. Подстригач Я.С. Обобщенная термомеханика/ Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно – К.: Наук. думка, 1976.– 312с.
184. Подстригач Я.С. Температурные поля и напряжения в элементах электровакуумных приборов/ Я.С. Подстригач, Ю.М. Коляно, М.М. Семерак– К.: Наук. думка, 1981.–342с.
185. Подстригач Я.С. Термоупругость тел неоднородной структуры/ Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно, – М.: Наука, 1984– 368 с.

186. Подстригач Я.С. Введение в механику поверхностных явлений в деформируемых твердых телах/ Я.С. Подстригач, Ю.З. Повстенко— Киев; Наук. думка, 1985.—200с.
187. Подстригач Я.С. Термоупругость тонких оболочек/ Я.С. Подстригач, Р.Н. Швец— К.: Наук. думка, 1978.— 344с.
188. Подстригач Я. С. Температурне поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями / Я.С. Подстригач, П. Р. Шевчук // Тепловые напряжения в элементах конструкций. — 1967. — Вып. 3. — С. 227-233.
189. Попов В.Г. Взаимодействие плоских упругих волн с системами радиальных дефектов / В.Г. Попов // Известия РАН МТТ. — 1999. — №4. — С. 118–129.
190. Попов В.Г. Сравнительный анализ дифракционных полей при прохождении упругих волн через дефекты различной природы / В.Г. Попов, А.Э. Улановский // Известия РАН МТТ.— 1995. — №4. — С. 99– 109.
191. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений/ Г. Я. Попов — М.; Наука, 1982— 344с.
192. Попов Г. Я. Об одном методе получения интегральных преобразований с применением к построению точных решений краевых задач математической физики / Г. Я. Попов // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2003. — Т. 46, № 3. — С. 74-89.
193. Попов Г. Я. Об одном способе решения задач механики для слоистых сред / Г. Я. Попов, С. Т. Грибняк // Прикладная механика. — 1980. — **16**, № 10. — С. 68-74.
194. Попович В.С. Температурные напряжения в телах с переменными коэффициентами линейного расширения/ В.С. Попович // Математические методы в термомеханике.— К.: Наук. думка, 1978.— С. 127 137.
195. Попович В.С. Про розв'язування задач теплопровідності термочутливих тіл/ В.С. Попович, І.М. Махоркін // Мат. методи та фіз.—мех поля.— 1997— 40, №1.—С. 36–44.
196. Попович В. Термопружний стан термочутливої тонкої пластини за умов нагрівання джерелом тепла та теплообміну з оточуючим середовищем /

- В. Попович, Г. Гарматій, О. Вовк // Машинознавство. – 2007. – № 7. – С. 21-25.
197. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости / В.Б. Поручиков. – М.: Наука, 1986. – 328 с.
198. Постольник Ю.С. Приближенные методы исследований в термомеханике/ Ю.С. Постольник– Донецьк: Вища школа, 1984.– 158с.
199. Протасов В. Д. Механика конструкций из композиционных материалов: сб. науч. статей / В. Д. Протасов, Н. А. Алфутов, В. В. Болотин ; под ред. В. Д. Протасова – М. : Машиностроение, 1992. – Вып. 1. – 349 с.
200. Процюк Б.В. Про розв'язки задач теплопровідності й термопружності для багат шарових тіл/ Б. В. Процюк // Доп. АН УРСР. Сер А. – 1977. – №11. С. 1019 1021
201. Процюк Б. В. Статичні та квазістатичні осесиметричні задачі термопружності для шаруватих тіл з плоско-паралельними границями/ Б. В. Процюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 4. – С. 103–112.
202. Процюк Б.В. Розв'язування двовимірних квазістатичних задач термопружності багат шарових тіл/ Б. В. Процюк, В.М. Синюта // Мат. методи та фіз.-мех. поля– 1997.– **40**, №1– С. 49–52.
203. Процюк Б. В. О решении задач теплопроводности и термоупругости для многослойных тел / Б. В. Процюк // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1977, № 11. – С. 1019–1021.
204. Процюк Б. В. Статические и квазистатические задачи термоупругости для мноослойных анизотропных тел / Б. В. Процюк // III Всесоюзная конф. по мех. неоднор. структур: тез. докл. – Львов, 1991. – Ч. 1. – С. 271.
205. Процюк Б. В. Фундаментальна система розв'язків звичайних диференціальних рівнянь з кусково-неперервними коефіцієнтами і її використання при розв'язуванні задач термопружності / Б. В. Процюк // Крайові задачі термомеханіки: зб. наук. пр. – Київ : Ін-т математики НАН України, 1996. – Ч. 2. – С. 89-94.
206. Прудников А. П. Интегралы и ряды. Специальные функции / А. П. Пруд-

- ников, Ю. А. Брычков, О. И. Марычев – М. : Физматлит, 2003. – 664 с.
207. Прусов И. А. Метод сопряжения в теории плит / И. А. Прусов — Минск : Изд-во Белорус. ун-та, 1975. – 256 с.
208. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости / И. А. Прусов — Минск : Изд-во Белорус. ун-та, 1972. – 199 с.
209. Пяныло Я.Д. Об исследовании приближенного обращения преобразования Лапласа с помощью многочленов Якоби/ Я.Д. Пяныло // Мат. методы и физ. мех. поля – 1984. – Вып. 20– С. 7–11.
210. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев – К. : Наук. думка, 1982. – 552 с.
211. Ромалис Н.Б. Разрушение структурно-неоднородных тел/ Н.Б. Ромалис, В.П. Тамуж– Рига: Зинатне, 1989. 224с.
212. Саврук М.П. Концентрація напружень у твердих тілах з вирізами / М.П. Саврук, А. Казберук // Механіка руйнування та міцність матеріалів: Довідн. посіб. За заг. ред.В. В. Панасюка // Львів: СПОЛОМ. – 2012. – 384 с.
213. Саврук М.П. Плоска динамічна осесиметрична задача для порожнистого циліндра / М. П. Саврук, Л.Й. Онишко, М.М. Сенюк // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – 44, №1. С. 7–14.
214. Саврук М. П. Новий метод розв'язування динамічних задач теорії пружності та механіки руйнування / М. П. Саврук // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2003. – № 4. С. 7–11.
215. Савула Я.Г. Чисельне моделювання вільних коливань пружних тіл з тонким покриттям/ Я.Г. Савула, О.С. Коссак // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – 42, №1. – С. 118–124.
216. Савула Я. Г. Дослідження варіаційної задачі теплопровідності у багатошарових середовищах з тонкими включеннями / Я.Г. Савула, Л. М. Дяконюк // Вісник Львівського університету. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2000. – Вип. 3. – С. 125-131.
217. Савула Я. Г. Метод скінченних елементів / Я. Г. Савула – Вид-во Львів. ун-ту. – К. : НМК ВО. – 1993. – 98 с.

218. Сеймов В.М. Колебания и волны в слоистых средах / В.М. Сеймов, В.М. Трофимчук, О.А. Савицкий. – К.: Наук. думка, 1990. – 224 с.
219. Селезов И.Т. Волны в магнитоупругих средах / И. Т. Селезов, Л. В. Селезова. – К.: Наук. думка, 1975. – 163 с.
220. Селезов И.Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах / И.Т. Селезов. – К.: Наук. думка, 1989. – 204 с.
221. Слепьян Л.И. Нестационарные упругие волны/ Л.И. Слепьян Л.: Судостроение, 1972. – 374 с.
222. Слепьян Л.И. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики/ Л.И. Слепьян, Ю.С. Яковлев– Л.: Судостроение, 1980. – 343 с.
223. Снеддон И. Преобразования Фурье/ И. Снеддон М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 668 с.
224. Справочник по специальным функциям / под ред. Абрамовиц М., Стиган И.. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
225. Стасюк М.Ф. Структура розв'язків звичайних і квазідиференціальних рівнянь з кусково–змінними коефіцієнтами/ М. Ф. Стасюк // Доп. АН УРСР. Сер. А– 1982– №12 –С. 31–35.
226. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены/ П.К. Суетин – М.: Наука, 1976, – 328 с.
227. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформованих твердих тіл з тонкими включеннями / Г. Т. Сулим. – Львів : Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. – 716 с.
228. Терлецкий Р.Ф. Моделирование термомеханического поведения слоистых тел с учетом излучения и поглощения тепловой энергии / Р.Ф. Терлецкий, О.П. Турий // Теоретическая и и прикладная механика. – 2009. – 45. – С. 19- 31.
229. Технологические напряжения и деформации в композитных материалах// А.Н. Гузь, В.Т. Томашевский, Н.А. Шульга, В.С. Яковлев.– К.:Вища школа, 1988.– 280с.
230. Углов А. А. Моделирование теплофизических процессов импульсного воздействия на металлы /А. А. Углов, И. Ю. Смуров, А. М. Лашин,

- А. Г. Гуськов - М. : Наука, 1991. – 287 с.
231. Угодчиков А.Г. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела/ А.Г. Угодчиков, Н.М. Хуторянский – Казань: Изд-во КГУ, 1986. – 296 с.
  232. Улитко А.Ф. Полубесконечный разрез вдоль границы жестко соединенных полуплоскостей из различных материалов/ А.Ф. Улитко // Современные проблемы механики сплошной среды.– Ростов—на—Дону: Книга, 1995–С. 185–193.
  233. Улітко А.Ф. Магнітопружність при динамічному навантаженні / А.Ф. Улітко, Л.В. Мольченко, В.Ф. Ковальчук. – К.: Либідь, 1994. – 155с.
  234. Улітко А. Ф. Вибрані праці / А. Ф. Улітко – К.: Видав.-полігр. центр „Київський університет”, 2004. – 457 с.
  235. Федик И. И. Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах / И. И. Федик, В. С. Колесов, В. Н. Михайлов – М. : Энергоатомиздат, 1985. – 280 с.
  236. Физические свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике: справочник. / ред. Б. Е. Неймарк. – М. – Л. : Энергия, 1967. – 240 с.
  237. Фильштинский Л.А. Дифракция упругих волн на трещинах, отверстиях, включениях в изотропной среде / Л.А. Фильштинский // Изв. АН СССР. МТТ. – 1991. – № 4. – С. 119–127.
  238. Фильштинский М.Л. Исследование колебаний пьезоэлектрического цилиндра с тунельным жестким включением / М.Л. Фильштинский // Вестник Сумского ГУ. – 1999. – №1 (12). – С. 3–10.
  239. Фізико-математичне моделювання складних систем / Я.Бурак, Є. Чапля, Т. Нагірний [та ін.]; за ред. Я. Бурака, Є. Чаплі. – Львів : СПОЛОМ, 2004. – 264 с.
  240. Хай М.В. Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения / М.В. Хай. – К.: Наук. думка, 1993. – 254 с.

241. Хай М.В. Вплив межі розділу середовищ на концентрацію напружень в околі тріщини/ М.В. Хай, О.І. Степанюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля.–1997 –40, №2– С. 64–69.
242. Хорошун Л. П. О построении уравнений слоистых пластин и оболочек / Л. П. Хорошун // Прикл. механіка. – 1978. – **14**, № 10. – С. 3-21.
243. Чекурін В.Ф. До ідентифікації параметрів багат шарових покриттів за відомими переміщеннями поверхні при локальному нагріві / В.Ф. Чекурін, Б.В. Процюк // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2004.– 40, № 1. – С. 7-15.
244. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения/ Г.П. Черепанов М: Наука, 1974.–640с.
245. Чернецкий С.А Вариационные принципы и математические методы решения граничных задач для кусочно однородных нелинейных сред/ С.А Чернецкий, Н.К. Швайко // Мат. методы и физ.–мех. поля.– 1988.— Вып. 2' С.64–67.
246. Швець Р.Н. Термоупругое контактное взаимодействие тел при наличии поверхностных теплофизических неоднородностей/ Р.Н. Швець, Р.М. Мартыняк // Мат. методы и физ.–мех. поля. 1988.– Вып. 27.– С. 23–28.
247. Швець Р.М.Взаємозв'язана задача механотермодифузії для шаруватих тіл канонічної форми з тонкими прошарками/ Р.М. Швець, О.І. Яцків // Доп. НАН України.– 1993. №11 С 65 69
248. Швець Р. Термомеханічна модель шаруватих анізотропних оболонок / Р. Швець, У. Жидик, В. Флячок // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. – Львів, – 2000. – т.1. – С. 127-130.
249. Швець Р. М. Термопружність ортотропних шаруватих циліндричних оболонок / Р. М. Швець, В. М. Флячок // Мат. методи та фіз.- мех. поля. – 2001. – 44, № 4. – С. 93-102.
250. Шевченко А.Ю. Термонапряженное состояние жестко–скрепленных полуполос одинаковой ширины/ А.Ю. Шевченко // Прикл. механика.— 1977–13, №9.–С.66–72.
251. Шевчук В.А. Расчет напряженного состояния тел с многослойными тонкими покрытиями/ В. А. Шевчук // Пробл. прочности.– 2000.— №1.– С. 136–150.

252. Шульга Н.А. Основы механики слоистых сред периодической структуры/ Н. А. Шульга –К.: Наук. думка,1981 – 198с.
253. Achenbach J.D. Wave propagation in elastic solids/ J.D. Achenbach // Appl. math. and mech. V.16. – Amsterdam, London : North-Holland publ. co., New York : Amer. Elsievier Publ. Co., 1973. – 425 p.
254. Asakawa T. Constitutional Equations of Thermal Stresses of Particle Reinforced Composite Materials/ T. Asakawa, N. Noda, K. Tohgo, T. Tsuji // Jpn. Soc. Mech. Eng. – 1994. - Ser. A, Vol. 60, No.575. - P1632-1637.
255. Balas J. Stress analysis by boundary element methods / J. Balas, J. Sladek, V. Sladek – Amsterdam : Elsevir, 1989. – 686 p.
256. Belghazi H. Analytical solution of unsteady heat conduction in a two-layered material in imperfect contact subjected to a moving heat source/ H. Belghazi, M. El. Ganaoui, J. C. Labbe // Int. J. Thermal Sciences. – 2010. – 49. No. 2. -, P. 311–318.
257. Carini A. Symmetric boundary integral formulations of transient heat conduction: Saddle-point theorems for BE analysis and Be-FE / A. Carini, M. Diligenti, G. Maier // Arch. Mech. – 1997. – 49, № 2. – P. 253-283.
258. Chong, K. P. 1969, “Propagation of Axially Symmetric Waves in Hollow Elastic Circular Cylinders Subjected to a Step-Function Loading,”/ K. P. Chong, P. C. Y. Lee, and A. S. Cakmak, // J. Acoust. Soc. Am., 49, pp. 201–210.
259. Chou S.-C. (1968), Numerical solution of stress waves in layered media, AIAA Journal/ S.-C. Chou, R. Greif Vol. 6, 1067-1074.
260. Crump K. S. Numerical inversion of Laplace transforms using a Fourier series approximation / K. S. Crump // Journal of the ACM – 1976.– Vol. 23, Issue 1. – P. 89– 96.
261. Cuomo S. Computation of the inverse Laplace transform based on a collocation method which uses only real values / S. Cuomo, L. D’Amore, A. Murli, M. Rizzardi // J. of Computational and Appl. Math. – 2007.–Vol. 198, Is. 1 – P. 98-115.
262. Davies B. Integral transforms and their applications / B. Davies – Springer, 2002. – 367 p.

263. Fuchiyama T. Transient Thermal Stress in a Circular Plate of Functionally Gradient Materials with TemperatureDependent Material Properties/ T. Fuchiyama, N. Noda, T. Tsuji, Y. Obata // Jpn. Soc Mech Eng. – 1993. - Ser. A, Vol. 59, No. 564. - P. 1925-1930.
264. Gong, Y. N. ‘‘Radial Vibrations and Dynamic Stress in Elastic Hollow Cylinders’’/ Y. N. Gong, X. Wang, // Structural Dynamic: Recent Advances, Elsevier Science Publications, Elsevier, London, 1991, pp. 137–147.
265. Graff K.F. Wave motion in elastic solids / K.F. Graff. – Oxford: Clarendon Press. – 1975. – 666 p.
266. Green A. E. Theoretical elasticity./ A. E. Green, W. Zerna // – Oxford: At the Clarendon Press, 1954. – 344 p.
267. Haji-Sheikh A. Steady-state heat conduction in multilayer bodies / A. Haji-Sheikh, J. V. Beck, D. Agnofer // Int.J. Heat Mass Transfer. – 2003. – No. 46. – P. 2363-2379.
268. Haji-Sheikh A. Temperature solutions in multi-dimensional multi-layered bodies / A. Haji-Sheikh, J.V. Beck // Int.J. Heat Mass Transfer. – 2002. – 45. – P. 1865-1877.
269. Jin Z. H. Thermal Fracture of Ceramics with Temperature-Dependent Properties / Z. H. Jin , R. C. Barta // Jornal of Thermal Stresses. – 1998. – 21. – P. 157-176.
270. Jin Z. H. Crack-Tip Singular Fields in Nonhomogeneous Materials/ Z. H. Jin, N. Noda // Trans ASME, J Appl Mech. – 1994. - Vol.61, No.3. - P.738-740.
271. Kalynyak B. Thermal stresses in multilayer thermal sensitive cylinder an asymptotic thermal conditions / B. Kalynyak, V. Popovych // Proceeding of the Sixth International Congress on Thermal Stresses (Vienna, Austria, May 2005) : abstracts – Vienna, 2005. – P. 119-122.
272. Kawasaki A. Thermal Shock Fracture Mechanism of Metal-Ceramic Functionally Gradient Materials/ A. Kawasaki, R. Watanabe // NATO ASI Ser. E. – 1993. - Vol. 241. - P. 509-520.
273. Kennett B. L. N. Seismic Wave Propagation in Stratified Media/ B. L. N. Kennett // Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

274. Kushnir R. Determination of the Thermal Fields and Stresses in Multilayer Solids by Means of the Constructed Green Functions/ R. Kushnir, B. Protsiuk // - Encyclopedia of Thermal Stresses. Springer – 2014. P. 924-931.
275. Kushnir R.M. Generalized Conjugation Problems in Mechanics of Piecewise-Homogeneous Elements of Constructions / R.M. Kushnir // *Z. angew. Math. Mech.*–1996.–Vol. 76, S5.–P. 283–284.
276. Kushnir R. An approach to determining temperature and displacement of inhomogeneous friction couples / R. Kushnir, B. Protsiuk, V. Syniuta // *Proceeding of the Sixth International Congr. on Thermal Stresses* (Vienna, Austria, May 2005) : abstracts – Vienna, 2005. – P. 733-736.
277. Kushnir R. M. Solution of Quasi-Static Thermoelasticity Problem for Thermo-sensitive Bodies Under a Convective Heat Exchange / R. M. Kushnir, V. S. Popovych, H. Yu. Harmatiy // *Proc. of the 5<sup>th</sup> Intern. Congress on Thermal Stresses and Related Topics (TS'03, 8-11.06.2003, Blacksburg, VA, USA)*. – Virginia Tech., 2003. – Vol. 1. – P. 321-324.
278. Kushnir R. M. The thermoelastic state of a thermosensitive sphere and space with a spherical cavity subject to complex heat exchange / R. M. Kushnir, V. S. Popovych, O. M. Vovk // *J. of Eng. Mathematics*, August 2008. – Vol. 61, nos. 2-4. – P. 357-369.
279. Kuznetsov S. Love waves in stratified monoclinic media”/ S. Kuznetsov // *Quart. Appl. Math.* Vol. 62, pp. 749 –766, 2004.
280. Lee K. Y. Boundary element analysis for thermomechanical interface stress in the thin-layered media under sliding contact / K. Y. Lee, J. W. Kang // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2003. – 27. – P. 583-587.
281. Ling F.F. *Surface mechanics*/ F.F. Ling //– New York: J. Wiley & Sons, 1973.– 319 p. .
282. Mandrik P.A. Solution of a Heat Equation of Hyperbolic Type with Mixed Boundary Conditions on the Surface of an Isotropic Half-Space/ P.A. Mandrik // *Differential Equations*. - 2002. – 38. No. 7, P. 1054–1057.

283. Matysiak S.J. On the modelling of heat conduction problem in laminated bodies/ S.J. Matysiak, Cz. Wozniak // *Acta mech*– 1986 – 65.– P. 223–238.
284. Matysiak S. J. Transient heat conduction problem for a composite layer on a homogeneous substrate / S. J. Matysiak , A. A. Yevtushenko // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2005. – Т. 48, № 2. – С. 172–179.
285. Munz D. Stress singularities at the interface in bonded dissimilar materials under mechanical and thermal loading/ D. Munz, J. Yang // *Transactions of the ASME Jdum. ofAppl. Mech* 1992. – 59, N4 – P. 857
286. Mykhas'kiv V.V. Transient response of a plane rigid inclusion to an incident wave in an elastic solid / V.V. Mykhas'kiv // *Wave Motion.* – 2005. – 41, No. 2. – P. 133–144.
287. Nayfeh A. H. Wave Propagation in Layered Anisotropic Media with Application to Composites, Applied Mathematics and Mechanics/ A. H. Nayfeh // North-Holland, Amsterdam, 1995.
288. Noda N. Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties/ N. Noda // "Thermal stresses I", edited by R. B. Hetnarski, Chap. 6, North-Holland (E1sevier Science). – 1986. - P. 391-438.
289. Noda N. Steady Thermal Stresses in a Plate of Functionally Gradient Material with Temperature-Dependent Properties / N. Noda, T. Tsuji // *Jpn. Soc. Mech. Eng., Ser. A.* – 1991. - Vol. 57, No. 533. P. 98-103.
290. Noda N. Thermal stresses / N. Noda, R.B. Hetnarski, Yo. Taniwaga – Lastran Corp., Rochester, NY, 2000.
291. Noda N. Thermal Stresses in Materials with Temperature-Dependent Properties / N. Noda // *Appl. Mech. Rev.* – 1991. – **44**. – P. 383-397
292. Nyuko H. Stationary thermal stresses for a composite hollow sphere exhibiting temperature dependent properties / H. Nyuko, Y. Takeuti, N. Noda // *Trans. Japan Soc. Mech. Engrs.* – 1978. – 44, No. 381. – P. 1454-1460.
293. Olesiak Z.S. Thennodiflusive effects in nonhomogeneous layers 7 *Proc. of 4th Intern. Conf. on Mechanics of Nonhomogeneous structures/ Z.S. Olesiak // Temopil': 1995.–P.58.*

294. Ootao Y. Three-dimensional transient thermal stress analysis of a nonhomogeneous hollow circular cylinder due to a moving heat source in the axial direction / Y. Ootao, T. Akai, Y. Tanigawa // *Journal of Thermal Stresses*. – 1995. – 18. – P. 497-512.
295. Osadchuk V.A. Inverse problem of mechanics of heterogeneous shells with residual stresses/ V.A. Osadchuk, V.F. Chekurin, R.M. Kushnir // *Z. Angew. Math. und Mech*– 1996. 76, Suppl. 5– P.369–370.
296. Pao Y.H. Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentration / Y.H. Pao, C.C. Mow. – N.Y.: Grane, Russak, 1975. – 694 p.
297. Pao Y.-H. (1973), Diffraction of elastic waves and dynamic stress concentrations/ Y.-H. Pao, C.-C. Mow //, New York: Crane, Russak.
298. Popov G.Y. On solution of dynamic problems of elastic-stress concentration near defects on cylindrical surfacesinternational / G.Y. Popov, Y.A. Morozov, N.D. Vaisfel'd // *Applied Mechanics*. – 1999. – 35, No. 1. – P. 24–32.
299. Poullkkas A. The method of fundamental solutions for three-dimensional elastostatics problems / A. Poullkkas, A. Karageorghis, G. Georgion // *Comput. and Struct*. – 2002. – 80, № 3-4. – P. 365-370.
300. Sadd M.N. Elasticity: theory, applications and numerics / M.N. Sadd – Amsterdam : Elsevier, 2005.
301. Sladek J. Boundary element method analysis of stationary thermoelasticity problems in non-homogeneous media / J. Sladek, V. Sladek , I. Markechova // *Int. Numer. Meth. Eng*. – 1990. – 30, № 3. – P. 505-516.
302. Sneddon I. Mixed Boundary-Value Problems in Potential Theory/ I. Sneddon //, North-Holl. Publ. Comp. - Amsterdam, 1966, 282 p.
303. Soldatos K. P. “Review of Three Dimensional Dynamic Analyses of Circular Cylinders and Cylindrical Shells,”/ K. P. Soldatos// *Appl. Mech. Rev.*, 47, 1994, pp. 501–516.
304. Sugano Y. On a stress function method of a thermoelastic problem expressed in cylindrical coordinates in a multiply-connected region exhibiting temperature-depen-

- dent material properties / Y. Sugano // Ingenieur – Archiv. – 1984. – 54. – P. 301-308.
305. Szego G. (1959), Orthogonal polynomials/ G. Szego // Amer. Math. Soc. Colloquium Publications.
306. Tamarin Y. Protective coatings for turbine blades./ Y. Tamarin // – ASM International, USA. – 2002. – 248 p.
307. Tanigawa Y. Some Basic Thermoelastic Problems for Nonhomogeneous Structural Materials/ Y. Tanigawa // Appl. Mech. Rev. – 1995. – 48. – P. 287–300.
308. Tanigawa Y. Transient Heat Conduction and Thermal Stress Problems of a Nonhomogeneous Plate with Temperature-Dependent Material Properties/ Y. Tanigawa, T. Akai, R. Kawamura, N. Oka // J. Thermal Stresses. – 1996. – 19. No.1. – P. 77–102.
309. Tanigawa Y. Some Basic Thermoelastic Problems for Nonhomogeneous Structural Materials / Y. Tamarin // Appl. Mech. Rev.,(ASME). – 1995. - Vol.48, No.6. - P.287-300.
310. Taya M. Metal Matrix Composites - Thermomechanical Behavior/ M. Taya, R. J. Arsenault // - Pergamon Press: New York, 1989. - 264 p.
311. Valle C. Qu J. Guided Circumferential Waves in Layered Cylinders/ C. Qu J. Valle, L. J. Jacobs // Int. J. Eng. Sci. – 1999. – V.37. - P. 1369–1387.
312. Voelker L.E. Stress waves in a laminated medium generated by transverse forces/ L.E. Voelker, J.D. Achenbach // J. Acoust. Soc. Amer. – 1969. –V.46, No5. – P. 1213-1222.
313. Wang P.-Y. Transient thermal analysis of semitransparent composite layer with an opaque boundary / P.-Y. Wang, H.-E. Cheng, H.-P. Tan // Int. J. Heat Mass Transfer. – 2002. – 45. – P. 425-440.
314. Wang X., Stress Wave Propagation in a Two-Layered Cylinder With Initial Interface Pressure/ X. Wang // Int. J. Solids Struct., - 1993, 30, pp. 1693–1700.
315. Wankhede P.C. Elastic vibration in composite cylinders or spheres/ P.C. Wankhede, B.R. Bhonse // Proc. Nat. Acad. Sci., India, Sec.A., 1980, Vol. 50, 37-46.

316. Yang J.C.S. Stresses in multilayered structures under high-rate pressure loads/ J.C.S. Yang, J.D. Achenbach// Pap. ASME, WA/Unt.-14. – 1970.
317. Yin X.C. Transient plane-strain response of multilayered elastic cylinders to axisymmetric impulse/ X.C. Yin, Z.Q. Yue // J. Appl. Mech., 2002, 69, No. 6, P. 825–835.
318. Zhuk Y.A. Monoharmonic approximation in the vibration analysis of a sandwich beam containing piezoelectric layers under mechanical or electrical loading / Y.A. Zhuk, I.A. Guz, C.M. Sands // Journal of Sound and Vibration. – 2011. – v. 330. – P. 4211–4232.

### **ПЕРЕЛІК ОСНОВНИХ ПУБЛІКАЦІЙ ЗА ТЕМОЮ РОБОТИ**

319. Галазюк В.А. Нестационарный фрикционный разогрев выступов микронеровностей скользящего контакта/ В.А. Галазюк, А.А. Евтушенко, И.Н. Турчин // ИФЖ. – 1996. – Т.69, №5. – С. 768-772.
320. Середюк Р. О. Динамічна осесиметрична задача термопружності для кусково-однорідної площини / Р. О. Середюк , І. М. Турчин // Крайові задачі термомеханіки: зб. наук. пр. – Київ : Ін-т математики НАН України. – Ч. 2. – 1996. - С. 114-118.
321. Галазюк В.А. Квазистатическое термонапряженное состояние слоя при смешанных условиях нагрева/ В.А. Галазюк, И.Н. Турчин // Прикладная механика. – 1998. – Т.34, №9. – С. 39-48.
322. Галазюк О. В. Метод поліномів Лагерра в нестационарній задачі теплопровідності для радіально-шаруватого циліндра / О. В. Галазюк , І. М. Турчин // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. - 2006. - Вип. 65. – С. 24-32.
323. Галазюк О. В. Квазистатическая задача термоупругости радиально-слоистого пространства / О. В. Галазюк , І. М. Турчин // Теоретическая и прикладная механика. - 2005. - Вып. 41. - С. 63-69.

324. Галазюк О. В. Метод поліномів Лагерра в нестационарній задачі теплопровідності для радіально-шаруватого циліндра / О. В. Галазюк, І. М. Турчин // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. - 2006. - Вип. 65. – С. 24-32.
325. Галазюк О. В. Квазістатична плоска неосесиметрична задача термопружності радіально-шаруватого циліндричного тіла / О. В. Галазюк, І. М. Турчин // Вісник Дніпр. ун-ту. Серія механіка. – 2007. – Вип. 11, Т. 2. - С. 58-65.
326. Турчин І. М. Нестационарне осесиметричне температурне поле в шаруватому півпросторі, зумовлене імпульсним нагрівом / І. М. Турчин, О. Ю. Турчин // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. - 2008. - Вип. 69. – С. 67-75.
327. Timar I. The Laguerre polynomials method in the dynamic problem of elasticity for a multilayered half-space/ I. Timar, H. Sulim, V. Shshukin, I. Turchyn // GÉP. – 2005. - V.56, No 6. - P.16-25.
328. Timar I. Quasistatic thermal elastic task for layer - elastic half-space system with local pulsed heating / I. Timar, H. Sulim, V. Shshukin, I. Turchyn // GÉP. – 2007. - V.58, No 12. - P. 27-36.
329. Timar I. Radialisan retegezett henger kvazistatikus sikbeli horugalmas allapota aszimmetrikus hevites esten/ I. Timar, H. Sulim, V. Shshukin, I. Turchyn // GÉP. – 2010. - V.61, No 4. - P. 45-52.
330. Колодій В.О. Метод поліномів Лагерра в динамічній задачі пружності для радіально-шаруватого циліндра/ В.О. Колодій, І.М. Турчин // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. - 2010. - Вип. 73. – С. 56-64.
331. Гуцайлюк В. Динамічна задача теорії пружності для прямокутної пластинки / В. Гуцайлюк, Г. Сулим, І. Турчин // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. - 2012. - Вип. 76. – С. 79-85.
332. Колодій В.О. Динамічна реакція порожнистого циліндра на ударне осесиметричне навантаження / В.О. Колодій, Г.Т. Сулим, І.М. Турчин // Пробл. обч. мех. і міцн. констр.: зб. наук. пр., Дніпропетровськ. – 2012. - Вип.20. – С. 15-22.

333. Турчин И. Н. Нестационарный торцевой разогрев многослойной полубесконечной плиты / И. Н. Турчин // ИФЖ. - 2012. - Т.85, №6. – С. 1343-1351.
334. Szulim G. The quasistatic plane problem of thermoelasticity for radially layered cylinder with asymmetric heating / G. Szulim, V. Scsukin, I. Turcsin, I. Timár // GÉP. - 2013. – V.64, No. 3. - P. 36–42.
335. Turchyn I. Transient wave propagation in multilayered half-space/ I. Turchyn , O. Turchyn // Acta mechanica et automatica. - 2013. – Vol.7, No. 1. – P. 53-57.
336. Сулим Г.Т. Осесиметрична динамічна задача теорії пружності для шаруватого півпростору / Г.Т. Сулим, І.М. Турчин// Вісник Дніпропетровського університету - 2012. Сер. Механіка. - Вип. 16, № 2/1. - С. 128–134.
337. Сулим Г.Т. Осесиметричний квазістатичний термонапружений стан у півпросторі з покриттям / Г.Т. Сулим, І.М. Турчин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 2012. – 55, № 4. – С. 85–95.
338. Сулим Г.Т. Динамічна плоска задача теорії пружності для радіально-шаруватого циліндра / Г.Т. Сулим, І.М. Турчин, В.О. Колодій // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Сер. фіз.-мат. науки. – 2013.- Вип. 3. - С. 232–235.
339. Sulym H. Stress-strain state of an elastic rectangular plate under dynamic load/ H. Sulym, V. Hutsaylyuk, Ia. Pasternak, I. Turchyn // Mechanika. - 2013. – 19, No 6: - P. 620–626.
340. Колодій Ю.О. Квазістатичні напруження в півпросторі з покриттям при змішаних умовах нагрівання / Ю.О. Колодій, Г.Т. Сулим, І.М. Турчин // Вісник ТНТУ. – 2015.- №1 (77) – С. 67-75.
341. Турчин И.Н. Нестационарное осесиметричное температурное поле в двухслойной полосе при смешанных условиях нагрева / И.Н. Турчин, И. Тимар, Ю.О. Колодий // ИФЖ. – 2015. - Т. 88, №5. – С. 1100-1109.
342. Колодій Ю.О. Змішана нестационарна задача теплопровідності для півбезмежної плити з двостороннім покриттям/ Ю.О. Колодій, І.М. Турчин,

- В.В. Хома // Вісник КНУ ім. Т.Шевченка. Серія: фіз.-мат. науки. – 2015. - Спецвипуск. - С. 119-124.
343. Сулим Г.Т. Нестационарні коливання пружного середовища із циліндричними вкладками під дією динамічного навантаження/ Г.Т. Сулим, І.М. Турчин // Вісн. Запор. нац. ун-ту. - 2015. - №1. – С. 66-76.
344. Сулим Г.Т. Перехідний термонапружений стан у півсмузі з покриттям, зумовлений нагрівом її бічної поверхні / Г.Т. Сулим, В.К. Опанасович, І.М. Турчин, В.В. Хома // Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 2015. – **58**, № 1. – С. 132–142.
345. Турчин І. М. Плоска квазістатична задача термопружності для півпростору з покриттям за змішаних умов нагріву/ І. М. Турчин, Ю. О. Колодій // Мат. методи та фіз.-мех. поля. - 2015. – **58**, № 2. – С. 118–128.
346. Sulym H. Transient vibration of an elastic cylinder inserted in the elastic medium / H. Sulym, I. Timar, I. Turchyn // Acta mechanica et automatica. - 2016. – Vol.10, No. 2. – P. 133-136.
347. Коляно Я. Метод поліномів Лагерра у нестационарній осесиметричній задачі теплопровідності для радіально-шаруватого тіла / Я. Коляно, І. Турчин // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: зб.наук. праць під заг. ред. Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра - Львів. – 2003. – С. 206-208.
348. Галазюк О. В. Метод поліномів Лагерра в нестационарній задачі теплопровідності для циліндрично-шаруватих тіл // О. В. Галазюк , І. М. Турчин // Сучасні проблеми механіки (до 80-річчя Д. В. Гриліцького). Всеукраїнська наукова конференція: тези доповідей. (Львів, 2-5 лист. 2004 р.) – Львів, 2004. - С. 74-75.
349. Галазюк О. В. Квазістатична плоска задача термопружності для двошарового циліндра / О. В. Галазюк , І. М. Турчин // 7-ий Міжнародний симпозіум українських інженерів-механіків у Львові: тези доп. (Львів, 18-20 травня 2005 р.) . – Львів, 2005. – С. 51.
350. Галазюк О. Квазістатическая термоупругость радиально-слоистого цилиндра / О. Галазюк , И. Турчин // *Mechanika Zniszczenia Materialov i Konstrukcij*. III

- Symposium: materialy. (Augustow, 1-4 czerwca, 2005 r.). - Augustow, 2005. - St. 95-98.
351. Галазюк О. В. Нестационарное температурное поле в радиально-шароватом цилиндре / О. В. Галазюк, І. М. Турчин // Current problems of mechanics of nonhomogeneous media. The Sixth Polish-Ukrainian Conference: abstracts. (Warszawa, 6-10 September 2005 r.). - Warszawa, 2005. - p. 47-48.
  352. Галазюк О. Метод поліномів Лагерра в квазістатичній задачі термопружності для радіально-шароватого циліндра / О. В. Галазюк, І. М. Турчин // Сучасні проблеми механіки. Всеукраїнська наукова конференція: тези доп. (Львів, 5-8 грудня 2005 р.). – Львів, 2005. – С. 81.
  353. Галазюк О. Нестационарное температурное поле в шароватом цилиндре зумовлене рухомим джерелом нагріву / О. В. Галазюк, І. М. Турчин // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур. VII Міжнародна наукова конференція: матер. конф. (Львів, 20-23 вересня, 2006 р.). - Львів, 2006 : - Т. 1. – С.189-191.
  354. Галазюк О. Нестационарное температурное поле в шароватом цилиндре зумовлене рухомим джерелом тепла / О. В. Галазюк, І. М. Турчин // Актуальні задачі механіки неоднорідних структур. 7-й українсько-польський науковий симпозиум: тези доп. (Львів, 5-9 вересня, 2007 р.). – Львів, 2007. – С. 87.
  355. Галазюк О. В. Квазістатична плоска неосесиметрична задача термопружності радіально-шароватого циліндричного тіла / О. В. Галазюк, І. М. Турчин // Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій. Міжнародна науково-технічна конференція пам'яті акад. В. І. Моссаковського: тези доп. (Дніпропетровськ, 17-19 жовтня, 2007 р.). - Дніпропетровськ, 2007. – С. 102-103.
  356. Галазюк О. Нестационарна плоска задача теплопровідності для шароватого циліндра з рухомим джерелом нагріву / О. В. Галазюк, І. М. Турчин // Сучасні проблеми механіки та математики: зб. наук. праць під заг. ред. Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. - Львів, 2008. - Т. 1. –С. 146-148.

357. Галазюк О. Метод поліномів Лагерра в квазістатичних двохвимірних задачах термопружності для радіально-шаруватих циліндричних тіл / О. Галазюк, І. Турчин // Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки: зб. наук. праць під заг. ред. В.Л. Макарова, І.О. Луковського, Р.М. Кушніра. – Львів, 2009. – С. 100-101.
358. Галазюк О. Квазістатическое плоское термоупругое состояние радиально-слоистого цилиндра при неосесимметрическом нагреве / О. Галазюк, И. Турчин // Failure Mechanics of Materials and Structures. The 5th Int. Symp.: abstracts. (Augustow, 3-6 June 2009 r.). - Białystok, 2009. - S. 111-120.
359. Турчин І.М. Метод поліномів Лагерра в квазістатичній змішаній задачі термопружності для довгого циліндра / І. М. Турчин // Тез. доп. Міжнародного науково-технічної конференції пам'яті В.І. Моссаковського “Актуальні проблеми механіки суцільного середовища і міцності конструкцій” (Дніпропетровськ, 16-19 жовтня 2007 р.). - Дніпропетровськ, 2007. - С. 104-105.
360. Турчин І.М. Змішана осесиметрична динамічна задача теорії пружності для шару/ І. М. Турчин // Тези доповідей Акустичного симпозуму “Консонанс-2007”. (Київ, 25-27 вересня 2007 р.). Київ, 2007. -С.41.
361. Турчин І.М. Метод поліномів Лагерра в динамічній задачі теорії пружності для плоско-шаруватого композита/ І. М. Турчин, А.С. Юрчишин // Тези доповідей Акустичного симпозуму “Консонанс-2007”. (Київ, 25-27 вересня 2007 р.). Київ, 2007. -С.41.
362. Szulim G. The quasistatic problem of thermoelascity for radially layered cylinder / Georgij Szulim, Imre Timar, Igor Turcsin, Valentyin Scsukin // 18<sup>th</sup> Int. Conf. of Mechanical Engineering: materials. (Baia Mare, 22-25 Aprile 2010, Ungarn). - Budapest, 2010. - P. 420-423.
363. Тімар І. Динамічна задача теорії пружності для радіально-шаруватого циліндра / І. Тімар, В. Колодій, І. Турчин // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: зб.наук. праць; під заг. ред. І.О. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. – Львів, 2010. – С. 439-441.

364. Сулим Г. Исследование нестационарных радиальных колебаний слоистого цилиндра методом полиномов Лагерра / Г. Сулим, В. Колодий, И. Турчин // Proc. VI-th International Symposium on Failure Mechanics of Materials and Structures (Poland, Augustow, 30.05-2.06.2011). Online P. 324-327.
365. Романчук Я.П. Нестационарное температурное поле в полубесконечном слое с покрытием / Я.П. Романчук, И.Н. Турчин // Материалы XVII Международного симпозиума "Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред" им. А.Г. Горшкова (Ярополец, 14–18 февраля 2011 г.). - Т. 1. -Москва, 2011. - С. 166-169.
366. Галазюк О.В. Квaziстатичні напруження в неоднорідному циліндрі, зумовлені його нерівномірним остиганням / О.В. Галазюк, І.М. Турчин // Матеріали Міжнародної наук. конф. «Математичні проблеми технічної механіки» – 2011 (13-15 квітня 2011, Дніпропетровськ). - Т. 1.- Дніпропетровськ, 2011. – С. 79.
367. Колодій В.О. Дослідження нестационарних радіальних коливань шаруватого циліндра методом поліномів Лагерра / В.О. Колодій, І.М. Турчин // Там же Т. 2, – 2011. – С. 49.
368. Kurzydowski K. Transient Temperature Field in a Semi-Infinite Layer with Coating / K. Kurzydowski, M. Lobur, Y. Romanchuk, I. Turchyn // The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics (CADSM). 11<sup>th</sup> International Conference CADSM'2011: proc. (Polyana-Svalava, 23-25 Febr. 2011.). – Lviv, 2011. - P. 224 – 225.
369. Hutsaylyuk V. Transient Plane Waves Propagation in Non-homogeneous Elastic Plate/ V. Hutsaylyuk, H. Sulym, Ia. Pasternak, I. Turchyn // Composite Materials: The Great Advance. Proc. of the 19<sup>th</sup> Int. Conf. Composite Materials, ICCM19 (Montreal, Canada, 28 July – 2 August 2013). P. 8890-8897.
370. Hutsaylyuk V. Determination of a Transient Dynamic Stress-Strain State of a Rectangular Plate under a High-Speed Deformation with the Account of Mutual Transformation of Mechanical Energy and Heat / V. Hutsaylyuk, H. Sulym, Ia. Pasternak, I. Turchyn // Proc. of the 12<sup>th</sup> Int. Conf. on Fracture and Damage Mechanics (Alghero, Sardinia, Italy, 17-19 Sept., 2013). 4 p.

371. Сулим Г. Плоска двовимірна динамічна задача теорії пружності для простору з кільцевою вкладкою / Георгій Сулим, Володимир Колодій, Ігор Турчин // Сучасні проблеми механіки та математики: В 3-х т. / Під заг. ред. Р.М. Кушніра, Б.Й. Пташника. – Львів: ІППИМ НАН України, 2013. – Т. 2. С. 176-177.
372. Hutsaylyuk V. Numerical modeling of the transient dynamic loading of elastic-plastic rectangular plate / V. Hutsaylyuk, H. Sulym, I. Turchyn, Ia. Pasternak // International conference “Materials Science Engineering (MSE 2012)” (Darmstadt, 25–27 Sept. 2012). 8p.
373. Сулим Г. Нестационарні коливання простору з циліндричною вкладкою, зумовлені осесиметричним локальним навантаженням / Г. Сулим, В. Колодій, І. Турчин // Теорія та практика раціонального проектування, виготовлення і експлуатації машинобудівних конструкцій: тези доп. (Львів, 7-9 листопада 2012 р.). – Львів: КІНПАТРИ ЛТД, 2012. - С. 55-56.
374. Сулим Г. Квазістатичний термонапружений стан в півпросторі з покриттям при змішаних умовах нагрівання/ Г. Сулим, І. Турчин, Ю. Колодій // Тези доп. міжнар. наук. конф. «Сучасні проблеми механіки деформівного твердого тіла, диференціальних та інтегральних рівнянь» (Одеса, 23-26 серпня 2013 р.). Одеса: Астропринт, 2013. С. 120.
375. Sulym H. Transient Dynamic Stress-Strain State and Thermomechanical Transformation of a Rectangular Plate under High-Speed Deformation/ H. Sulym, V. Hutsaylyuk, L. Snizek, Ia. Pasternak, I. Turchyn // Proc. of the 20th European Conference on Fracture (ECF20). - Elsevier. Procedia Materials Science 3, 2014. - P. 2092 – 2097.
376. Турчин І. Нестационарний торцьовий розігрів півсмузи з покриттям / І. Турчин, В. Хома // Математичні проблеми механіки неоднорідних структур: зб. наук. праць / Під заг. ред. І.О. Луковського, Г.С. Кіта, Р.М. Кушніра. – Львів: ІППИМ ім. Я.С. Підстригача НАН України. 2014.- С. 96-97.
377. Турчин І. Осесиметричні квазістатичні напруження в плиті з покриттям при змішаних умовах нагрівання/ І. Турчин, Ю. Колодій // Там же. С. 194-195.

378. Галазюк В. Метод полиномов Лагерра в задачах волновой механики структурно-неоднородных тел / В. Галазюк, И. Кузь, И. Турчин // Международная научная конференция “Турбулентность и волновые процессы”, (Москва, 26-28 ноября 2013 г.). М.: ООО “Интуит.ру”, 2013. - С.133-134.
379. Колодій Ю.О. Змішана нестационарна задача теплопровідності для півбезмежної плити з двостороннім покриттям / Ю.О. Колодій, І.М. Турчин, В.В. Хома // Тези доп. міжнар. наук. конф. "Сучасні проблеми механіки". (Київ, 27-29 серпня 2015 р.). – Київ. - С. 43.
380. Sulym H. Transient vibrations of an elastic cylinder inserted in the elastic medium / H. Sulym, I. Timar, I. Turchyn // Conference Proceedings of VIII-th Int. Symp. on Mechanics of Materials and Structures and Fracture and Fragmentation in Science and Engineering. (Augustow, May 31-June 3 2015). - Białystok, 2015. - P. 33-34.