

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І
МАТЕМАТИКИ ІМ. Я.С. ПІДСТРИГАЧА**

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Бардин Тетяна Петрівна

УДК 539.3

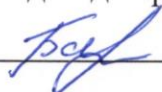
ДИСЕРТАЦІЯ

**ОЦІНЮВАННЯ МІЦНОСТІ
КОНТАКТНИХ БІМЕТАЛЕВИХ ТЕРМОПЕРЕТВОРЮВАЧІВ
ЗАСОБАМИ МАТЕМАТИЧНОГО І КОМП'ЮТЕРНОГО
МОДЕЛЮВАННЯ**

**Галузь знань 11 – Математика та статистика
Спеціальність 113 – Прикладна математика**

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати
власних досліджень. Використання
ідей, результатів і текстів інших
авторів мають посилання на
відповідне джерело

 Бардин Т.П.

Науковий керівник
Дробенко Богдан Дем'янович,
доктор фізико-математичних наук

Львів – 2025

АНОТАЦІЯ

Бардин Т. П. "Оцінювання міцності контактних біметалевих термоперетворювачів засобами математичного й комп'ютерного моделювання". – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття ступеня доктора філософії з галузі знань 11 – Математика та статистика за спеціальністю 113 – Прикладна математика. – Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача Національної академії наук України, Львів, 2025.

У роботі вирішене важливе науково-прикладне завдання – розроблення методики дослідження міцності та експлуатаційної надійності контактних біметалевих термоперетворювачів на основі рівнянь тривимірної термопружності.

Об'єктом дослідження є зумовлена інтенсивним термосиловим навантаженням термопружна поведінка біметалевих термоперетворювачів складної форми і структури.

Предметом дослідження є розвиток засобів математичного, числового і комп'ютерного моделювання для дослідження теплових і механічних процесів у термочутливих кусково-однорідних тілах складної форми.

Наукова новизна роботи:

1. Розроблено математичну модель для кількісного опису теплових і механічних процесів в кусково-однорідних тілах складної форми і структури за умов термосилового навантаження на основі тривимірних залежностей теорії теплопровідності й неізотермічної термопружності та методику числового розв'язування сформульованої задачі термопружності з використанням методу скінченних елементів і однокрокових багатопараметричних алгоритмів;

2. Побудовано на основі розробленої числової методики обчислювальний алгоритм і створено відповідне проблемно-орієнтоване

програмне забезпечення для дослідження термомеханічної поведінки термоперетворювачів за умов їх виготовлення та експлуатації; програмне забезпечення верифіковане на низці модельних задач, для яких відомі аналітичні розв'язки; на цій основі досліджено точність та збіжність отримуваних числових розв'язків;

3. Досліджено напружено-деформований стан контактних біметалевих термоперетворювачів та захисних оболонок для них у просторово-тривимірному формулюванні;

4. На цій основі запропоновано новий клас біметалевих термоперетворювачів, особливості будови яких усувають основну причину виходу з ладу основного конструкційного елемента – розтріскування чи порушення зчеплення між складниками з різними фізико-механічними характеристиками. Через проміжок між складниками і бурти закріплення напруження на внутрішній поверхні секцій з більшим коефіцієнтом лінійного температурного розширення і верхній поверхні складника з буртами з меншим коефіцієнтом не працюють на розрив, тому термоперетворювач при довготривалому циклічному тепловому навантаженні до температур порядку 760–850°C зберігає свою цілісність;

5. Отримано коефіцієнти запасу та оцінки експлуатаційного ресурсу захисних оболонок на основі запропонованої розрахункової схеми. Визначено граничне значення кількості циклів навантаження-розвантаження до руйнування для різних типорозмірів;

6. Порівняльний аналіз результатів на основі запропонованого в роботі тривимірного підходу і галузевої нормативної методики з використанням інженерних співвідношень (отриманих на основі моделі балки) показав, що для найбільш навантаженої захисної оболонки максимальні експлуатаційні напруження відрізняються у півтора рази.

Практичне та теоретичне значення отриманих результатів.
Практичне та теоретичне значення отриманих результатів полягає у розробці варіанту методики математичного і числового моделювання зумовлених дією

термосилового навантаження процесів теплопровідності та деформування в кусково-однорідних тілах складної форми і структури. Розроблене програмне забезпечення надає можливість адекватного моделювання та дослідження термомеханічної поведінки кусково-однорідних тіл за термосилового навантаження і може бути основою розробки раціональних за напруженнями конкретних елементів конструкцій за різними критеріями, зокрема, з метою забезпечення в них бажаного чи близького до заданого рівня експлуатаційних напружень.

Практичне значення отриманих результатів полягає в розробці біметалевих контактних термоперетворювачів нового типу, яких характеризує вища експлуатаційна надійність у порівнянні з існуючими. Результати дисертаційної роботи використані в Державному підприємстві “Львівський державний завод “ЛОРТА” та Національній академії сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного.

За допомогою розробленого програмного забезпечення встановлено температурні діапазони безпечної експлуатації термоперетворювачів нового типу та коефіцієнти запасу для кожного типу і розміру їх захисних оболонок. На підставі виконаних обчислювальних експериментів для захисних оболонок різних типорозмірів зроблено висновок про можливу безпечну експлуатацію оболонок на номінальних режимах експлуатації за задовільного стану металу, відсутності недопустимих дефектів і відповідності результатів контролю металу вимогам нормативних документів і стандартів.

Робота складається зі вступу, п'яти розділів, висновків, переліку використаних джерел та додатку.

У вступі наведено обґрунтування вибору теми дослідження; сформульовано мету, об'єкт, предмет і завдання дисертаційної роботи; відображено наукову новизну і практичне значення отриманих результатів; висвітлено зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами і грантами. Також відзначено внесок здобувачки, відомості про апробацію результатів дослід-

жень, наведено список публікацій здобувачки, подано структуру і обсяг роботи.

У *першому розділі* проаналізовано наявні методи термометрії і наведено основні типи приладів, серед яких виділено біметалеві контактні термоперетворювачі, як найпоширеніші. Висвітлено їхні сильні і слабкі сторони і показано, що вирішення проблеми підвищення експлуатаційної надійності біметалевих термоперетворювачів і створення нових, надійніших термометричних систем і схем, тісно пов'язана з наявністю адекватних методів оцінювання їхньої міцності. У зв'язку з цим проаналізовано відомі моделі і методи дослідження та визначення напруженого стану за термосилового навантаження і на цій основі обґрунтовано необхідність дослідження механічної поведінки складних за формою структурно неоднорідних засобів термометрії за умов експлуатації на основі просторово тривимірних математичних моделей.

У *другому розділі* сформульовано варіант математичної моделі для кількісного опису термомеханічних процесів у пружних структурно-неоднорідних твердих тілах за температурного й силового навантаження. Приведено загальні вихідні співвідношення для дослідження процесів теплопровідності й деформування в пружному тілі за дії комплексного навантаження. За основу прийнято просторово тривимірний підхід, що дає змогу достатньо адекватно кількісно описати напружено-деформований стан пружного тіла складної геометричної форми і структури. Температурне поле в тілі описує нестационарне рівняння теплопровідності, а процеси деформування – співвідношення квазістатичної теорії термопружності. За таких обставин механічна і теплова взаємодія тіла із зовнішнім середовищем відбувається таким чином, що процес навантаження розглядається без врахування зв'язаності полів температури та деформацій, а переміщення, деформації та їхні швидкості в тілі приймаються такими, що виконуються лінійні залежності між деформаціями та переміщеннями. У такому наближенні задачу сформульовано за два етапи. На першому етапі записано

рівняння теплопровідності й відповідні умови теплообміну між тілом та довкіллям, а також між окремими структурними складовими тіла. На другому етапі для визначення компонент вектора переміщень і тензорів деформацій та напружень у тілі записуємо вихідні співвідношення квазістатичної теорії термопружності, температурні поля для яких є вхідними (час у ці співвідношення входить як параметр).

Запропонована математична модель опису термомеханічних процесів у кусково-однорідних твердих тілах орієнтована на розробку числової методики її розв'язування і створення відповідного програмного забезпечення для комп'ютерного моделювання температурних і механічних полів в таких тілах за силового і температурного навантажень.

У *третьому розділі* відповідно до прийнятої розрахункової схеми наведено процедуру розв'язування задачі термопружності. На першому етапі, внаслідок проведення стандартної процедури скінчено-елементної дискретизації тіла у варіанті методу зважених залишків, нестационарну задачу теплопровідності зведено до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих значень температури у вузлах скінченно-елементного поділу. Розв'язок отриманих задач Коші побудовано з використанням простих однокрокових багатопараметричних різницевих алгоритмів. Отримані на першому етапі із розв'язків цієї задачі розподіли температури є вхідними для задачі другого етапу – визначення термо-напруженого стану тіла у скінченно-елементному формулюванні.

Наведено обчислювальні аспекти реалізації методу скінченних елементів і формування ключових скінчено-елементних рівнянь для задачі теплопровідності та термопружності. Детально описано алгоритми формування матричних характеристик для різних типів скінченних елементів, їх підсумовування, врахування крайових умов, розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Розглянуто низку прикладів числового розв'язування за запропонованою в роботі методикою задач, для яких відомі аналітичні розв'язки, і приведено результати порівняльного аналізу.

У четвертому розділі досліджено напружено-деформований стан контактних біметалевих термоперетворювачів різних типів за умов експлуатації на основі описаної у другому розділі математичної моделі і запропонованої у третьому розділі методики числового моделювання. Запропоновано нову версію біметалевого термоперетворювача зі суттєво вищою надійністю та роботоздатністю за довготривалого циклічного теплового навантаження. Завдяки запропонованому оригінальному конструкційному рішенню усунуто причину виходу з ладу основного елемента, що забезпечує процес термометрії. Отримано оцінки температурних діапазонів надійної роботи запропонованих конструкцій термоперетворювача.

У п'ятому розділі подано результати виконаних на основі запропонованої методики математичного й числового моделювання досліджень термомеханічної поведінки захисних оболонок термоперетворювачів різних типорозмірів за умов гідравлічних випробувань і стаціонарної експлуатації. Визначено коефіцієнти запасу захисних оболонок. Наведено порівняльний аналіз результатів, отриманих на основі запропонованого в роботі підходу і нормативної галузевої методики в межах спрощених математичних моделей. Отримано оцінки експлуатаційного ресурсу захисних оболонок на основі уточнених даних про напружено-деформований стан в них під час стаціонарної експлуатації. Досліджено можливість руйнування захисних оболонок від малоциклової втоми. Визначено граничне значення кількості циклів навантаження-розвантаження до руйнування.

Основні результати досліджень, отримані в дисертації, опубліковано в 13-ох наукових працях, зокрема в 4 статтях у наукових фахових виданнях (з них одну статтю опубліковано в періодичному виданні, що входить до міжнародних наукометричних баз даних WoS або Scopus), 2 патентах і 7 тезах та доповідях у збірниках матеріалів конференцій.

Ключові слова: температурне навантаження, математичне моделювання, термопружність, температурні напруження, термочутливість, шаруваті біметалічні тіла, метод скінченних елементів, аналітико-числові методи, напружено-деформований стан, інтенсивність напружень, міцність, деформування, комп'ютерне моделювання, деформівне тіло, математичні задачі

ABSTRACT

Bardyn T.P. "Evaluation of the strength of contact bimetallic thermoelectric converters by means of mathematical and computer modeling." – Qualifying scientific work as a manuscript.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in the field of knowledge 11 – Mathematics and statistics in the specialty 113 – Applied Mathematics. – Ya. S. Pidstrygach's Institute of applied problems of mechanics and mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv, 2024.

The work solves an important scientific and applied problem – the development of a methodology for studying the strength and operational reliability of contact bimetallic thermal converters based on the equations of three-dimensional thermoelasticity.

The object of the study is the thermoelastic behavior of bimetallic thermal converters of complex shape and structure caused by intense thermal and force loading.

The subject of the research is the development of mathematical, numerical and computer modeling tools for the study of thermal and mechanical processes in thermosensitive piecewise-homogeneous bodies of complex shape.

Scientific novelty of the work:

1. A mathematical model has been developed for the quantitative description of thermal and mechanical processes in piecewise-homogeneous bodies of complex shape and structure under conditions of thermal and force loading based on three-dimensional dependencies of the theory of thermal conductivity and non-

isothermal thermoelasticity and a method for numerically solving the formulated thermoelasticity problem using the finite element method and single-step multiparameter algorithms is proposed;

2. A computational algorithm has been built on the basis of the developed numerical method and the corresponding problem-oriented software has been created for the study of the thermomechanical behavior of thermal converters under the conditions of their manufacture and operation; the software has been verified on a number of model problems for which analytical solutions are known; on this basis, the accuracy and convergence of the obtained numerical solutions were researched;

3. The stress-strain state of contact bimetallic thermal converters and protective shells for them in a three-dimensional formulation was researched;

4. On this basis, a new class of bimetallic thermal converters was proposed, the structural features of which eliminate the main cause of failure of the main structural element - cracking or violation of adhesion between components with different physical and mechanical characteristics. Due to the gap between the components and the fastening collars, the stresses on the inner surface of the sections with a greater coefficient of thermal expansion and the upper surface of the component with a lower coefficient do not act on the rupture, therefore the thermal converter retains its integrity under long-term cyclic thermal load to temperatures of the order of 760–850 °C;

5. The safety factors and the estimates of the operational resource of protective shells were obtained based on the proposed calculation scheme. The limiting values of the number of load-unload cycles before failure of different standard size shells were determined;

6. A comparative analysis of the results based on the three-dimensional approach proposed in the work and the industry regulatory methodology using engineering ratios (obtained based on the beam model) showed that for the most loaded protective shell, the maximum operational stresses differ by one and a half times.

Practical and theoretical significance of the obtained results lies in the development of a variant of the methodology for mathematical and numerical modeling of the processes of heat conduction and deformation in piecewise-homogeneous bodies of complex shape and structure caused by the action of thermal and force loading. The developed software allows for adequate modeling and study of the thermomechanical behavior of piecewise-homogeneous bodies under thermal and force loading and can be the basis for the development of stress rational structural elements according to various criteria, in particular, in order to ensure the desired or close to the given level of operational stresses in them.

The practical significance of the results obtained lies in the development of bimetallic contact thermal converters of a new type, which are characterized by higher operational reliability in comparison with the existing ones. The results of the dissertation work were used at State enterprise "Lviv State Plant "LORTA" and Hetman Petro Sahaidachny National Army Academy.

With the help of the developed software, the temperature ranges of safe operation of thermal converters of a new type and the safety factors for each type and size of their protective shells were established, and shells were also identified, the maximum stresses in which, under conditions corresponding to the operational ones, do not exceed the permissible ones. Based on the performed computational experiments for protective shells of different sizes, a conclusion was made about the possible safe operation of the shells at nominal operating modes under satisfactory metal condition, absence of unacceptable defects and compliance of the metal control results with the requirements of regulatory documents and standards.

The work consists of an introduction, five chapters, conclusions, a list of sources used and an appendix.

The introduction provides a justification for the choice of the research topic; formulates the goal, object, subject and tasks of the dissertation work; reflects the scientific novelty and practical significance of the results obtained; highlights the connection of the work with scientific programs, plans, topics and grants. The

contribution of the applicant is also noted, information about the testing of the research results is provided, a list of the applicant's publications is provided, and the structure and scope of the work is presented.

The first section analyzes the existing methods of thermometry and presents the main types of devices, among which bimetallic contact thermal converters are highlighted as the most common. Their strengths and weaknesses are highlighted and it is shown that the solution to the problem of increasing the operational reliability of bimetallic thermal converters and creating new, more reliable thermometric systems and circuits is closely related to the availability of adequate methods for assessing the strength and operational reliability of bimetallic contact thermal converters. In this regard, the known models and methods of research and determination of the stressed state are analyzed and on this basis the need to study the mechanical behavior of structurally inhomogeneous thermometry tools of complex shape under operating on the basis of spatially three-dimensional mathematical models.

In the second section, a variant of a mathematical model is formulated for the quantitative description of thermomechanical processes in elastic structurally inhomogeneous solids under temperature and force loading. General initial relations for the study of thermal conductivity and deformation processes in an elastic body under the action of a complex load are given. The basis is a spatially three-dimensional approach, which allows us to adequately quantitatively describe the stress-strain state of an elastic body of complex geometric shape and structure. The temperature field in the body is described by the non-stationary equation of heat conduction, and the deformation processes are described by the relations of the quasi-static theory of thermoelasticity. Under such circumstances, the mechanical and thermal interaction of the body with the external environment occurs in such a way that the loading process is considered without taking into account the connection of the temperature and deformation fields, and the displacements, deformations and their velocities in the body are assumed to be such that linear dependencies between deformations and displacements are

fulfilled. In such an approximation, the problem is formulated in two stages. In the first, we write down the heat conduction equation and the corresponding conditions for heat exchange between the body and the environment, as well as between individual structural components of the body. At the second stage, to determine the components of the displacement vector and the tensors of deformations and stresses in the body, we write down the initial relations of the quasi-static theory of thermoelasticity, for which the temperature fields are input (time is included as a parameter in these relations).

The proposed mathematical model for describing thermomechanical processes in piecewise homogeneous solids is focused on the development of a numerical method for its solution and the creation of appropriate software for computer modeling of temperature and mechanical fields in such bodies under force and temperature loads.

In the third section, in accordance with the adopted calculation scheme, the procedure for solving the thermoelasticity problem in two stages is given. At the first stage, as a result of carrying out the standard procedure of finite-element discretization of the body in the variant of the weighted residue method, the non-stationary heat conductivity problem is reduced to a system of ordinary differential equations with respect to unknown temperature values at the nodes of the finite-element division. The solution of the obtained Cauchy problems is constructed using simple one-step multiparameter difference algorithms. The temperature distributions obtained at the first stage from the solutions of this problem are input for the problem of the second stage - determination of the thermally stressed state of the body in the finite element formulation.

The computational aspects of the implementation of the finite element method and the formation of key finite element equations for the problem of thermal conductivity and thermoelasticity are presented. The algorithms for the formation of matrix characteristics for different types of finite elements, their summation, consideration of boundary conditions, and solution of systems of linear algebraic equations are described in detail. A number of examples of numerical solution according to the proposed method of problems for which analytical

solutions are known are considered, and the results of comparative analysis are presented.

In the fourth section, the stress-strain state of contact bimetallic thermal converters of different types under operating conditions is researched on the basis of the mathematical model described in the second section and the numerical modeling method proposed in the third section. A new version of the bimetallic thermal converter with significantly greater reliability and operability under long-term cyclic thermal load is proposed. Thanks to the proposed original design solution, the cause of the failure of the main element that provides the thermometry process has been eliminated. The temperature ranges of reliable operation of the proposed designs of the thermal converter have been estimated.

The fifth section presents the results of the research carried out on the basis of the proposed methodology of mathematical and numerical modeling of the thermomechanical behavior of the protective shells of thermal converters of various sizes under the conditions of hydraulic tests and stationary operation. The safety factors of the protective shells have been determined. A comparative analysis of the results obtained on the basis of the approach proposed in the work and the regulatory industry methodology within the framework of simplified mathematical models has been presented. Estimates of the operational resource of the protective shells have been obtained on the basis of refined data on the stress-strain state in them during stationary operation. The possibility of destruction of the protective shells from low-cycle fatigue has been investigated. The limiting value of the number of load-unload cycles before destruction has been determined.

The main research results obtained in the dissertation were published in 13 scientific works, in particular in 4 articles in scientific professional publications (one of them was published in a periodical included in the international scientometric databases WoS or Scopus), 2 patents, 7 abstracts and reports in conference proceedings.

Key words: temperature loading, mathematical modeling, thermoelasticity, temperature stresses, thermal sensitivity, layered bimetallic bodies, finite element

method, analytical and numerical methods, stress-strain state, stress intensity, strength, deformation, computer simulation, deformable body, mathematical problems

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧКИ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

1. **Бардин Т.П.**, Дробенко Б.Д. Рівняння нестационарної задачі теплопровідності конструктивного вузла термометричного пристрою систем озброєння та військової техніки. *Збірник наукових праць Військової академії*. Одеса : Військова академія, 2023. №2(20). С. 101–107.
<https://doi.org/10.37129/2313-7509.2023.20.101-107>.
2. **Бардин Т.П.**, Дробенко Б.Д. Температурні напруження в біметалевих контактних термоперетворювачах під час їхньої експлуатації. *Прикл. проблеми мех. і мат.*, 2023. Вип. 21. С. 30-42.
<https://doi.org/10.15407/apmm2023.21.30-42>.
<http://journals.iapmm.lviv.ua/ojs/index.php/APMM/article/view/apmm2023.21.30-42>.
3. **Бардин Т.П.**, Настишин Ю.А., Дробенко Б.Д. Термочутливий елемент: *патент на корисну модель № 119339*. Зареєстровано в Державному реєстрі патентів України на корисні моделі 25.09.2017, Бюл. № 18. Заявка № u2017 02496 від 17.03.2017.
4. **Бардин Т.П.**, Яковлев М.Ю., Дробенко Б.Д. Термочутливий елемент: *патент на корисну модель № 119343*. Зареєстровано в Державному реєстрі патентів України на корисні моделі 25.09.2017, Бюл. № 18. Заявка № u2017 0567 від 20.03.2017.
5. Дробенко Б.Д., **Бардин Т.П.** Міцність та експлуатаційна надійність біметалевих контактних термоперетворювачів. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*, 2023. Вип. 38. С. 99-112.
<https://doi.org/10.15407/fmmit2023.38.099>
<http://www.fmmit.lviv.ua/index.php/fmmit/article/view/342/302>.

6. Drobenko B.D., **Bardyn T.P.** Strength of the Welded Joint of the Connecting Pipe and the Collector of the Boiler Primary Steam Superheater. *Mater Sci* **59**, 335–339 (2023).
<https://doi.org/10.1007/s11003-024-00782-x>.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. **Бардин Т.**, Дробенко Б. Комп'ютерне моделювання процесів деформування біметалевих контактних термометворювачів. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: зб. наук. праць 11-ї Міжн. наук. конф. / за заг. ред. Р.М. Кушніра і Ю.В. Токового. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2024. Вип. 6. 37-38.
2. **Бардин Т.П.**, Дробенко Б.Д. Вимоги до математичної моделі нестационарної задачі теплопровідності конструктивного вузла термометричного пристрою систем озброєння та військової техніки. *Застосування Сухопутних військ Збройних Сил України у конфліктах сучасності*: збірка тез доповідей науково-практичної конф., м. Львів, 31 листопада 2023 р. Львів : НАСВ, 2023. С. 119.
3. **Бардин Т.П.**, Дробенко Б.Д. Напружено-деформований стан контактних біметалевих термометворювачів. *Застосування Сухопутних військ Збройних Сил України у конфліктах сучасності*: зб. тез доп. наук.-практ. конф. 17 листопада 2022 року. Львів: НАСВ, 2022. С. 286.
4. **Бардин Т.П.**, Дробенко Б.Д. Обґрунтування вибору конструктивної схеми вузла площинного термометратора та постановка задачі розрахунку його термометричних параметрів. *Сучасні проблеми термомеханіки–2021*: зб. наук. праць Міжн. наук. конф. та міні-симпозіумів / за заг. ред. Р.М. Кушніра і Ю.В. Токового. Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2021. С. 39-40.
5. **Бардин Т.П.**, Дробенко Б.Д. Обґрунтування вибору матеріалів для конструктивних елементів механічних контактних термометрів систем

озброєння та військової техніки. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ*: зб. тез доп. Міжн. наук.-техн. конф. (м. Львів, 17-18 травня 2023 р.). Львів : НАСВ, 2023. С. 15-16.

6. **Бардин Т.П.**, Дробенко Б.Д. Оптимізація зварного з'єднання штуцера і колектора. *Сучасні проблеми механіки та математики – 2023*: зб. наук. праць / за заг. ред. акад. НАН України Р.М. Кушніра та чл.-кор. НАН України В.О. Пелиха. Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2023. С.109.
7. **Бардин Т.П.**, Дробенко Б.Д. Розрахунок термопружних характеристик біметалевого термочутливого елемента систем озброєння та військової техніки. *Застосування Сухопутних військ Збройних Сил України у конфліктах сучасності*: зб. тез доп. наук.-практ. конф. 28-29 листопада 2024 року. Львів: НАСВ, 2024. С. 331.

ВСТУП	19
1. КОНТАКТНІ ТЕРМОПЕРЕТВОРЮВАЧІ ТА МОДЕЛІ Й МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ	27
1.1. Аналіз наявних методів вимірювання температури	27
1.2. Математичні моделі термопружного деформування твердих тіл за термосилового навантаження.....	34
2. МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ТРИВИМІРНИХ ТІЛАХ СКЛАДНОЇ ФОРМИ	42
2.1. Формулювання задачі теплопровідності	43
2.2. Основні співвідношення квазістатичної термопружності	46
2.3. Врахування просторової структури матеріалу.....	54
2.4. Висновки по розділу	66
3. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ	67
3.1. Співвідношення методу зважених залишків для визначення температури в тілі	68
3.2. Розв'язування задачі Коші	72
3.3. Скінченно-елементні співвідношення задачі термопружності	77
3.4. Обчислювальні аспекти формування матрично-векторних характеристик.....	79
3.5. Апробація методики	101
3.6. Висновки по розділу	115
4. МІЦНІСТЬ ТА ЕКСПЛУАТАЦІЙНА НАДІЙНІСТЬ БІМЕТАЛЕВИХ ТЕРМОПЕРЕТВОРЮВАЧІВ.....	116
4.1. Конструкція біметалевого термоперетворювача	117
4.2. Деформування термоперетворювача	119
4.3. Термоперетворювач з проміжком за рахунок сталевих складників	123

4.4. Висновки по розділу	18
4.4. Висновки по розділу	128
5. МІЦНІСТЬ ЗАХИСНИХ ОБОЛОНОК ТЕРМОПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ...	129
5.1. Опис розрахункової області, властивостей матеріалів та навантаження	131
5.2. 3D модель циліндричної захисної оболонки.....	134
5.3. Конічні захисні оболонки.....	136
5.4. Експлуатаційний ресурс захисних оболонок	139
5.5. Висновки по розділу	142
ВИСНОВКИ	144
ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ	146
ДОДАТКИ	169

ВСТУП

Актуальність теми. Біметалеві термоперетворювачі є одними з найпоширеніших у термометрії, позаяк їхні деформації є вельми інформативними і доволі точними з погляду визначення температури досліджуваних об'єктів за незначних затрат на обслуговування та невисокої вартості. Ними комплектуються сучасні інженерні конструкції авіаційної, автомобільної, енергетичної, хімічної, харчової та інших галузей промисловості, а також озброєнь та військової техніки.

Більшість термометричних біметалевих систем та їх аналогів є кусково-однорідними тілами, що складаються з металів з різними теплофізичними та фізико-механічними характеристиками. Внаслідок цього в них за умов експлуатації можуть виникати значні температурні напруження, які спричиняють розтріскування і втрату адгезії в біметалевій системі, порушення зчеплення між окремими складниками, частковий або повний розрив між ними і, врешті-решт, – вихід з ладу основного конструкційного елемента, що забезпечує процес термометрії.

З огляду на зазначене актуальною є проблема підвищення експлуатаційної надійності існуючих біметалевих термоперетворювачів, а також створення нових, надійніших термометричних систем і схем. І дослідження термомеханічних процесів у приладах контактної термометрії за умов їхнього виготовлення та експлуатації з використанням адекватних засобів математичного та комп'ютерного моделювання має вирішальне значення для оцінювання їх міцності та визначення допустимих меж їх надійного функціонування.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами і темами. Дослідження за темою дисертації виконувалися в рамках науково-дослідних тем Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України: "Виявлення додаткового ресурсу конструкцій енергетичного машинобудування, озброєнь та військової техніки засобами математичного моделювання" (2021-2023, № держреєстрації

0121U100692); "Моделювання та розвиток методів розрахунку раціонального функціонування конструкційних елементів і систем різного цільового призначення за комплексних навантажень" (2023-2024, № держреєстрації 0123U100908).

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційної роботи є розроблення методики дослідження термомеханічної поведінки пружних біметалевих термоперетворювачів складної форми та структури за умов термосилового навантаження для побудови теоретичних основ раціонального проектування і розроблення оптимальних за напруженнями пристроїв термометрії, а також прогнозування їх функціональної здатності та міцнісних характеристик.

Досягнення мети передбачає:

- формулювання моделі кількісного опису теплових і механічних процесів у кусково-однорідних тілах складної форми та структури за термосилового навантаження на основі залежностей теорії теплопровідності та неізотермічної термопружності;
- розроблення з використанням методу скінченних елементів і різницевих алгоритмів ефективної числової методики розв'язування сформульованих задач математичної фізики;
- побудову на основі запропонованої числової методики обчислювального алгоритму та створення відповідного проблемно-орієнтованого програмного забезпечення;
- проведення досліджень точності й збіжності запропонованої числової методики шляхом порівняння числових розв'язків модельних задач з відомими в літературі аналітичними розв'язками, отриманими іншими авторами, а також на основі обчислювальних експериментів з використанням критерію „практичної збіжності” (через порівняння розв'язків, знайдених на різних за густиною скінченно-елементних поділах і кроках інтегрування за часом відповідних рівнянь, що описують параметри розглядуваних теплових і механічних процесів);

- знаходження на основі розробленого підходу розв'язків нових практично важливих задач про визначення температурних і механічних полів у термоперетворювачах за умов, що відповідають експлуатаційним;
- побудову раціональних за напруженнями біметалевих термоперетворювачів з істотно вищою надійністю та працездатністю при довготривалому циклічному тепловому навантаженні.

Об'єктом дослідження є зумовлена інтенсивним термосиловим навантаженням термопружна поведінка біметалевих термоперетворювачів складної форми і структури.

Предметом дослідження є розвиток засобів математичного, числового і комп'ютерного моделювання для дослідження теплових і механічних процесів у термочутливих кусково-однорідних тілах складної форми.

Методи дослідження. При побудові математичної моделі кількісного опису термомеханічних процесів у кусково-однорідних тілах складної форми та структури за термосилового навантаження використано відомі модельні уявлення теплопровідності та неізотермічної термопружності, теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними (формулювання задач на ключові функції). При розв'язуванні отриманої системи ключових диференціальних рівнянь за сформульованих початкових та крайових умов використано метод зважених залишків, метод скінченних елементів та сім'ю однокрокових багатопараметричних різницевих алгоритмів. При обчисленні матричних і векторних характеристик окремих скінченних елементів інтегрування виконано чисельно на основі квадратурних формул Гауса. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь розв'язано методом Краута-Холецького.

Основні результати роботи, які визначають її наукову новизну та виносяться на захист:

1. Розроблено математичну модель для кількісного опису теплових і механічних процесів у кусково-однорідних тілах складної форми та

структури за умов термосилового навантаження на основі тривимірних залежностей теорії теплопровідності й неізотермічної термопружності та методику числового розв'язування сформульованої задачі термопружності з використанням методу скінченних елементів і однокрокових багатопараметричних алгоритмів;

2. Побудовано на основі розробленої числової методики обчислювальний алгоритм і створено відповідне проблемно-орієнтоване програмне забезпечення для дослідження термомеханічної поведінки термоперетворювачів за умов їх виготовлення та експлуатації; програмне забезпечення верифіковане на низці модельних задач, для яких відомі аналітичні розв'язки; на цій основі досліджено точність та збіжність отримуваних числових розв'язків;
3. Досліджено напружено-деформований стан контактних біметалевих термоперетворювачів та захисних оболонок для них у просторово-тривимірному формулюванні;
4. На цій основі запропоновано новий клас біметалевих термоперетворювачів, особливості будови яких усувають основну причину виходу з ладу основного конструкційного елемента – розтріскування чи порушення зчеплення між складниками з різними фізико-механічними характеристиками. Через проміжок між складниками і бурти закріплення напруження на внутрішній поверхні секцій з більшим коефіцієнтом лінійного температурного розширення і верхній поверхні пластини з буртами з меншим коефіцієнтом не працюють на розрив, тому термоперетворювач при довготривалому циклічному тепловому навантаженні до температур порядку 760–850°C зберігає цілісність;
5. Отримано коефіцієнти запасу та оцінки експлуатаційного ресурсу захисних оболонок на основі запропонованої розрахункової схеми. Визначено граничне значення кількості циклів навантаження-розвантаження до руйнування для різних типорозмірів;
6. Порівняльний аналіз результатів на основі запропонованого в роботі тривимірного підходу і галузевої нормативної методики з використанням

інженерних співвідношень (отриманих на основі моделі балки) показав, що для найбільш навантаженої захисної оболонки максимальні експлуатаційні напруження відрізняються у півтора рази.

Обґрунтованість і достовірність основних наукових засад і отриманих результатів і висновків забезпечено фізичною обґрунтованістю вихідних положень математичної моделі, строгістю постановки сформульованих задач та методів їх розв'язування, використанням експериментально визначених фізико-механічних характеристик матеріалів, доброю узгодженістю числових розв'язків окремих задач з відомими в літературі аналітичними розв'язками, проведеними дослідженнями достовірності розв'язків кожної із розглянутих в роботі задач на основі критерію „практичної збіжності” через порівняльний аналіз розв'язків на різних за густиною поділах області на скінченних елементах та часових кроках інтегрування відповідних рівнянь, що описують параметри теплових і механічних процесів.

Практичне та теоретичне значення отриманих результатів. Практичне та теоретичне значення отриманих результатів полягає у розробці варіанту методики математичного і числового моделювання зумовлених дією термосилового навантаження процесів теплопровідності та деформування в кусково-однорідних тілах складної форми і структури. Розроблене програмне забезпечення надає можливість адекватного моделювання та дослідження термомеханічної поведінки кусково-однорідних тіл за термосилового навантаження і може бути основою розробки раціональних за напруженнями конкретних елементів конструкцій за різними критеріями, зокрема, з метою забезпечення в них бажаного чи близького до заданого рівня експлуатаційних напружень.

Практичне значення отриманих результатів полягає в розробці біметалевих контактних термоперетворювачів нового типу, яких характеризує вища експлуатаційна надійність у порівнянні з існуючими. Результати дисертаційної роботи використані в Державному підприємстві "Львівський державний завод "ЛОРТА" та Національній академії

сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного.

За допомогою розробленого програмного забезпечення встановлено температурні діапазони безпечної експлуатації термоперетворювачів нового типу та коефіцієнти запасу для кожного типу і розміру їхніх захисних оболонок. На підставі виконаних обчислювальних експериментів для захисних оболонок різних типорозмірів зроблено висновок про можливу безпечну експлуатацію оболонок на номінальних режимах експлуатації за задовільного стану металу, відсутності недопустимих дефектів і відповідності результатів контролю металу вимогам нормативних документів і стандартів.

Особистий внесок здобувачки. Усі результати, що становлять основний зміст дисертації, отримані здобувачем самостійно. У друкованих працях, опублікованих у співавторстві, їй належить аналіз літературних джерел, в яких розглянуто питання, споріднені з напрямом досліджень дисертаційної роботи, формулювання задач, розробка і обґрунтування математичної й числової моделі і відповідного програмного забезпечення, виконання обчислювальних експериментів та інтерпретація отриманих результатів. Зокрема, у працях [13, 14] запропоновано нові типи біметалевих контактних термоперетворювачів, конструкційні рішення в яких уможливили усунення основної причини виходу з ладу стандартних біметалевих контактних перетворювачів – порушення зчеплення між окремими складниками термоперетворювача при циклічному високотемпературному навантаженні, внаслідок чого відбувається часткове розшарування або повний розрив між ними. Аби уникнути швидкого виходу з ладу біметалевого термоперетворювача, запропоновано таку його конструкцію, за якої складник з більшим коефіцієнтом лінійного температурного розширення виконаний із окремих сегментів, а інший – на одній із бокових сторін містить бурти. За такої будови сегменти складника з більшим коефіцієнтом лінійного температурного розширення встановлені між буртами складника з меншим. Для пом'якшення контакту між складниками передбачено проміжки, які

усувають тертя між ними, що збільшує надійність та роботоздатність термоперетворювача за довготривалого циклічного теплового навантаження.

У статті [11] здобувачкою побудовано математичну модель і методику розв'язування нестационарної задачі теплопровідності для вузла термометричного пристрою систем озброєння та військової техніки складної форми. Отримані розрахункові залежності є основою для числового моделювання процесів теплопровідності в біметалевих термоперетворювачах різних конструкційних форм та типорозмірів.

У роботі [12] сформульовано тривимірну математичну модель для кількісного опису процесів теплопровідності та деформування в кусково-однорідних термоперетворювачах складної форми і структури за інтенсивного термосилового навантаження; розроблено методику розв'язування сформульованої задачі на основі методу скінченних елементів (для апроксимації шуканих параметрів за просторовими змінними) та однокрокових багатопараметричних різницевих алгоритмів (для апроксимації параметрів за часом); розглянуто запропоновану в [13, 14] конструкцію термоперетворювача, досліджено його міцність. Встановлено, що такий термоперетворювач зберігає цілісність до температур порядку 760°C .

У праці [42] наведено результати експертного аналізу міцності вузла зварного з'єднання штуцера і колектора, яке зазнало руйнування на Бурштинській ТЕС. Практично засоби розробленого у дисертаційній роботі математичного і програмне забезпечення пройшли апробацію на вирішенні нагальної практичної проблеми. В результаті комп'ютерного моделювання було встановлено місце, з якого почалося руйнування, пояснено причину і характер руйнування, запропоновано інший тип зварного з'єднання, оптимізовано геометричні параметри з'єднання, що дало можливість знизити максимальні експлуатаційні напруження на 20% у порівнянні з максимальними напруженнями в з'єднанні, яке було зруйновано.

У статті [43] досліджена міцність та експлуатаційна надійність біметалевих контактних термоперетворювачів засобами комп'ютерного моделювання, розробленими на основі тривимірної термопружності.

Апробація матеріалів дисертації. Основні наукові результати, які відображені в дисертації, оприлюднено на: Міжнародній науковій конференції *"Сучасні проблеми термомеханіки–2021"* (Львів, 15-17 вересня 2021 р.) [7]; Міжнародній науково-практичній конференції *"Застосування Сухопутних військ Збройних Сил України у конфліктах сучасності"* (Львів, 17 листопада 2022 р.) [6]; Міжнародній науково-практичній конференції *"Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ"* (Львів, 17 травня 2023 р.) [8]; Міжнародній науковій конференції *"Сучасні проблеми механіки та математики – 2023"* (Львів, 23-25 травня 2023 р.) [9]; Міжнародній науково-практичній конференції *"Застосування Сухопутних військ Збройних Сил України у конфліктах сучасності"* (Львів, 31 листопада 2023 р.) [5]; 11-ій Міжнародній науковій конференції *"Математичні проблеми механіки неоднорідних структур"* (24-26 вересня 2024 р.) [4]; Науково-практичній конференції *"Застосування Сухопутних військ Збройних Сил України у конфліктах сучасності"* (Львів, 28-29 листопада 2024 р.) [10].

Публікації. Основні наукові результати дисертації опубліковано у 13-х працях всього, зокрема: у статті [42], індексованій в міжнародній науково-метричній базі Scopus, трьох статтях [11, 12, 43] у фахових наукових виданнях, двох патентах на корисну модель [13, 14], а також додатково відображено у семи тезах [4 – 10] доповідей на науково-технічних і науково-практичних конференціях.

Структура та обсяг дисертації. Дисертація складається з анотації, вступу, п'ятих розділів, а також містить список використаних джерел з 277 найменувань на 23 сторінках та 2 додатків на 2 сторінках. Загальний обсяг роботи складає 170 сторінок, з яких 127 сторінок основного тексту, 72 рисунки та 6 таблиць.

РОЗДІЛ 1

КОНТАКТНІ ТЕРМОПЕРЕТВОРЮВАЧІ ТА МОДЕЛІ Й МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ

1.1. Аналіз наявних методів вимірювання температури

Методи вимірювання температури можна поділити на контактні, засновані на передачі тепла приладу, який визначає температуру, шляхом безпосереднього контакту, і безконтактні, коли передача тепла приладу здійснюється шляхом випромінювання через навколишнє середовище. При вимірюванні температури об'єктів, рідинних та газових потоків в нерухомих ємностях та магістралях прилад вимірювання компонується в такий спосіб, щоб він був завершеним вимірювальним засобом [45–47, 50, 127].

Основним елементом вимірювального засобу є термоперетворювачі. Як правило, термоперетворювач включає чутливий елемент, захисну арматуру, елементи підводу чи кріплення в дослідному середовищі чи на дослідному об'єкті, а також елементи зняття вимірювальної інформації [50].

Для вимірювання температури найчастіше використовують механічні контактні термоперетворювачі [2, 55, 56]. Принцип дії переважної більшості з них заснований на явищі розширення матеріалу [89], точніше – різної міри розширення спряжених тіл, які є основним складовим елементом засобу вимірювання. Найпоширенішими серед них є біметали зі сталі, вкриті міддю, нікелем та їхніми сплавами, а також алюмінієм у вигляді листів, багат шарових прутків і штиб, труб і дроту. Біметали, як правило, застосовують з метою зменшення матеріалоємності, або як вироби зі

спеціальними властивостями в машинобудуванні, електрообладнанні, радіо, теплотехніці, автомобілебудуванні, енергетиці тощо [88, 115].

Механічні контактні термоперетворювачі зазвичай характеризуються доброю точністю і адекватністю вимірювань, процес термометрії контактним способом має високу продуктивність і добре регулюється. Але до основних їхніх недоліків слід віднести легке порушення міцності зчеплення покриття з підкладкою за умов циклічного температурного навантаження, що може призвести до часткового або повного відриву покриття, тобто руйнування основного конструкційного елемента [50].

Біметали виготовляють волочінням, пресуванням, прокаткою, вибухом, тертям, пресовим, імпульсним або дифузійним зварюванням, а також литтям, наплавленням, паянням, металізацією тощо.

Тверді тіла при нагріванні розширюються, їх міру розширення визначає коефіцієнт лінійного теплового розширення. Для ізотропних матеріалів, коефіцієнт лінійного теплового розширення становить приблизно третину об'ємного коефіцієнта теплового розширення. Матеріали з анізотропною структурою, такі як кристали чи композити, як правило, мають різні коефіцієнти лінійного розширення у різних напрямках. У таких випадках вводять тензор коефіцієнта теплового розширення, що може містити до шести незалежних компонент.

Термоперетворювачі часто виконують в вигляді стрижневих чи пластинчастих біметалічних конструкцій, дія яких заснована на відносному подовженні під впливом температури двох твердих тіл, що мають різні температурні коефіцієнти лінійного розширення.

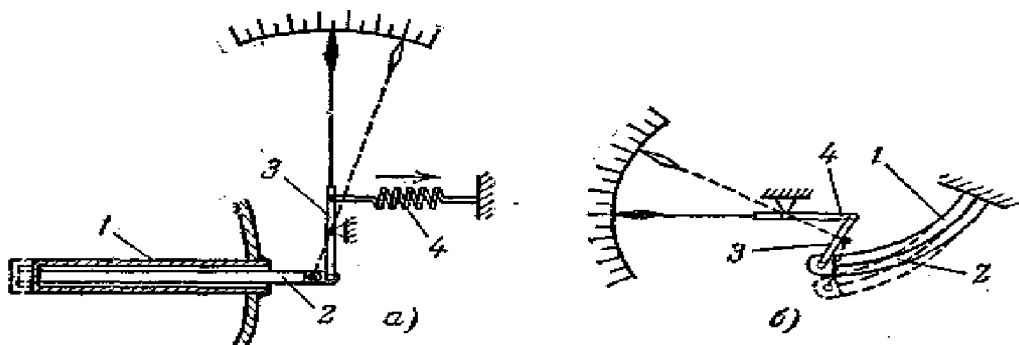


Рис. 1. Стрижневий (а) та пластинчастий (б) термоперетворювачі.

Стрижневий термометр (рис.1, а) має закрити з одного кінця трубку 1, поміщену у вимірювальне середовище і виготовлену з матеріалу з більшим коефіцієнтом лінійного розширення. У трубку вставлений стрижень 2, що притискається до її дна важелем 3, з'єднаним із пружиною 4. Стрижень виготовлений з матеріалу з меншим коефіцієнтом теплового розширення. Зі зміною температури трубка змінює свою довжину, що приводить до переміщення в ній стрижня, який зберігає майже постійні розміри і з'єднаний за допомогою важеля 3 із вказівною стрілкою приладу.

Пластинчастий термоперетворювач (рис.1, б) складається із двох вигнутих і спаяних між собою по краях металевих смужок, з яких смужка 1 має великий коефіцієнт лінійного розширення, а смужка 2 — малий. Така пластинка за дії температури змінює міру свого згину, величина якого за допомогою тяги 3, важеля 4 і з'єднаної з ним стрілки вказується на шкалі приладу. При збільшенні температури пластинка вигинається у бік металу з меншим коефіцієнтом лінійного розширення.

Такі термоперетворювачі широко використовуються як давачі, терморегулятори, запобіжники і обмежувачі в різноманітних системах теплового контролю: повітря в приміщеннях, кондиціонерах, рідин в пральних машинах, водонагрівачах (бойлерах), а також у вигляді термостатів як прямої так і не прямої дії.



Рис. 2. Промислові зразки термоперетворювачів

Терморегулятор – термодавач з самоповерненням – прилад, чутливий до показників температури, який використовується для підтримки певної температури. Терморегулятор автоматично вимикає або вмикає ланцюг. Після зниження температури, терморегулятор самостійно повертається у вихідне положення.

Термообмежувач – термодавач без самоповороту, який розмикає ланцюг після досягнення заданого значення температури. Даний термодавач повертається у вихідне положення за допомогою прикладання стороннього впливу (зусилля), наприклад натисненням кнопки.

Температура спрацьовування – значення температури, з урахуванням допустимої похибки, при впливі якої на чутливий елемент регулюючого пристрою відбувається спрацьовування виконавчого елемента (контактів).

Температура повернення - значення температури, при зниженні до якої відбувається повернення виконавчого елемента термодавача в початковий стан.

Значно частіше використовуються біметалеві термоперетворювачі, в яких для індексації температури також використовують принцип різної міри розширення двох спряжених різнорідних матеріалів [50]. Два або декілька шарів матеріалів з різними фізико-механічними властивостями з'єднують між собою в пакеті, причому залежно від призначення вони можуть мати різне виконання та конструктивні форми (рис. 3).

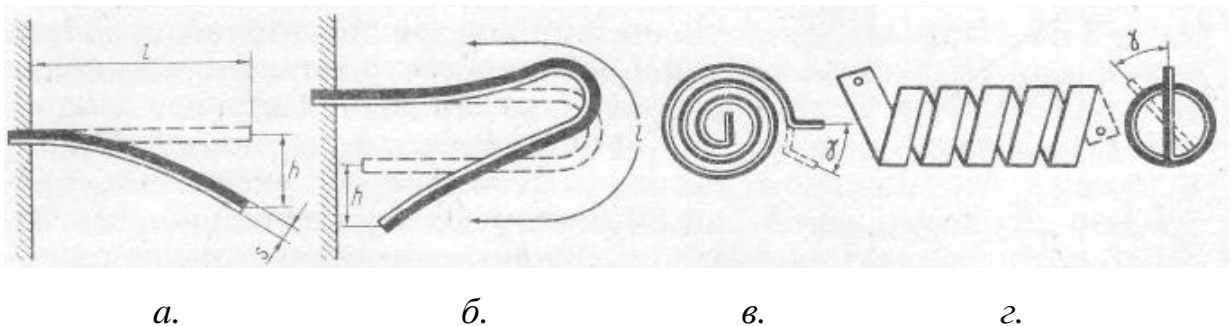


Рис. 3. Форми біметалевих термометрів, а – полоса (ресора); б – скоба (шпилька для полоси); в – плоска спіраль (равлик); г – гвинтова спіраль

Варіанти *a* і *б* використовують переважно як температурні реле (наприклад, реле максимального струму) в механічних приладах з компенсацією температурного впливу.

Тож біметалеві термометри використовують різницю коефіцієнтів теплового лінійного розширення різних металів. Скріплені разом, як показано на рис. 3, пластинки при зміні температури згинаються або закручуються. Деформація залежить від температури, тому, забезпечивши

пластини механізмами та шкалами, такий прилад можна проградувати і знімати з нього прямі покази температури.

Переваги біметалевих термоперетворювачів: простота виготовлення, можливість вбудовування в системи автоматики і телемеханіки. Їх часто використовують як самостійні прилади, а також як чутливі елементи в регуляторах прямої й непрямой дії та сигналізаторах температури. Крім того, пластинчасті термоперетворювачі іноді застосовуються для компенсації впливу змінної температури навколишнього повітря на покази інших приладів, в які вони вбудовуються.

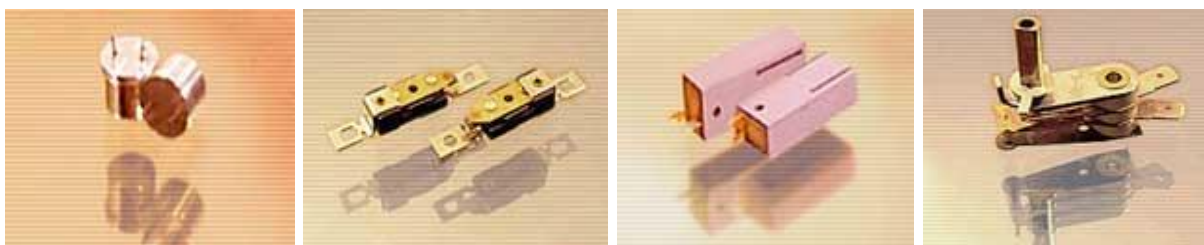


Рис. 4. Промислові зразки біметалевих термоперетворювачів.

Для встановлення та контролю температури води при нагріванні або повітря при сушінні застосовуються термостати різних конструкцій (див. рис. 5). Термостати можуть бути регульованими, нерегульованими.



а.

б.

Рис.5. Біметалеві нерегульовані термостати, а – звичайні, б – малогабаритні.

Принцип дії нерегульованих термостатів простий: при нагріванні до певної температури (тієї, на яку розрахований термостат), біметалева мембрана практично миттєво вигинається у зворотний бік. При цьому вона

переміщує також і керамічний плунжер (стрижень), який своєю чергою розмикає виконавчі контакти. За охолодження мембрана приймає первинну форму, і виконавчі контакти знову замикаються.

За конструкцією термостати можуть бути спареними або сполученими. В обох є по дві мембрани, налаштовані на різні температури. Кожна з мембран пов'язана з виконавчими контактами через свій керамічний плунжер.

Пристрої теплового захисту – це біметалеві терморегулятори, плавкі запобіжники, теплові реле, які широко використовуються в електроніці, електротехніці, авіабудуванні (рис. 6, 7)



Рис. 6. Пристрої теплового захисту



Рис.7. Біметалеві давачі захисту для авіаційних електродвигунів.

На рис. 7 показано біметалеві термостати з вбудованим нагрівальним елементом, з'єднаним послідовно з обмоткою електродвигуна. Виконавчим елементом тут є біметалічний диск миттєвої дії. Давачі спрацьовують у разі підвищення температури навколишнього середовища вище допустимого порогу, забезпечуючи захист від перегріву.

У сучасних технологічних процесах вимоги до точності вимірювання температури на об'єктах стають все жорсткішими, тому постійно відбувається пошук шляхів покращання метрологічних характеристик термоперетворювачів, їхньої міцності та експлуатаційної надійності.

Використовувані сьогодні на промислових об'єктах чутливі елементи характеризують недостатня стабільність статичної характеристики перетворення та порівняно малий ресурс термоперетворювачів [50]. Тому до матеріалів, з яких конструюють механічні контактні термоперетворювачі, висувають ряд специфічних вимог. З одного боку вони повинні володіти певними значеннями коефіцієнтів лінійного теплового розширення, з іншого – достатньою міцністю та надійністю. Методи та засоби, які застосовують для стабілізації деформівних властивостей матеріалів чутливих елементів, нині не забезпечують на необхідному рівні метрологічних і експлуатаційних характеристик термоперетворювачів. Здебільшого основною проблемою контактної термометрії є невисока надійність та довговічність термоперетворювачів у робочих умовах за циклічного навантаження – відносно швидко порушується зчеплення між елементами з різними теплофізичними та фізико-механічними характеристиками. Тому для створення ефективних в експлуатації термоперетворювачів, з одного боку, слід використовувати матеріали зі стабільними і відтворюваними деформівними характеристиками та високою стійкістю щодо впливу зовнішнього середовища, а з іншого – винаходити нові конструкції термоперетворювачів зі суттєво вищою надійністю та роботоздатністю за довготривалого циклічного термосилового навантаження. Для вирішення цього завдання виникає практична потреба розроблення нових і розвиток наявних засобів математичного моделювання процесів деформування термоперетворювачів за термосилового навантаження, здатних адекватно оцінювати їхню міцність і експлуатаційну надійність.

Тож актуальною і важливою є проблема розробки, розвитку і вдосконалення теоретичних основ, методик моделювання процесів термопружного деформування засобів контактної термометрії та оптимізації їхніх функціональних параметрів, а також створення принципово нових і вдосконалення існуючих засобів контактної термометрії.

1.2. Математичні моделі термопружного деформування твердих тіл за термосилового навантаження

Дослідження теплової та термопружної поведінки в однорідних і кусково-однорідних тілах відображено у роботах Н.М.Беляєва, Я.Й. Бурака, В.М. Вігака, О.Р. Гачкевича, Д.В. Гриліцького, В.Т. Грінченка, Б.Д. Дробенка, Я.О. Жука, О.О. Євтушенка, В.Г. Карнаухова, Б.М. Калиняка, Я.М. Кизими, А.Д. Коваленко, Л.А. Коздоби, Ю.М. Коляно, О.М. Кулика, Р.М. Кушніра, І.М. Махоркіна, В.В. Мелешка, М.С. Можаровського, І.О. Мотовиловця, Р.С. Мусія, М.М. Николишина, Г.С. Писаренка, Я.С. Підстригача, Г.Я. Попова, В.С. Поповича, Ю.С. Постольника, Б.В. Процюка, І.К. Сенченкова, Г.Т. Сулима, Р.Ф. Терлецького, С.П. Тимошенка, Ю.В. Токового, І.М. Турчина, А.Ф. Улітка, Л.А. Фільштинського, В.Ф. Чекуріна, Р.М. Швеця, В.А. Шевчука, Ю.М. Шевченка, А.В. Ясінського, J. Aleck, E. Almansi, M.A. Biot, V.A. Boley, C.W. Borchardt, J. Bradshaw, P. Chadwick, D.H. Cheng, H. Deresiewicz, J.M.C. Duhamel, M.R. Eslami, J.B.G. Fourier, V.E. Gatewood, J.N. Goodier, R.B. Hetnarski, J. Hopkinson, J.A. Ignaczak, H. Jeffreys, A. Leon, M. Lessen, J. Lighthill, F.J. Lockett, H.W. Lord, E. Melan, R.D. Mindlin, N.O. Myklestad, S.S. Manson, F. Neumann, W. Nowacki, N.H. Noda, H. Parkus, W. Prager, B. Sen, Y.A. Shulman, A. Signorini, V. Sladek, I.N. Sneddon, Y. Tanigawa, O. Tedone, R. Toupin, C. Truesdell, W. Voigt, J.H. Weiner та інших [15, 16, 20, 24, 25, 29, 30, 32–39, 51, 57, 58, 60–72, 79–83, 91, 93–95, 97, 101, 103–105, 107–110, 118, 119, 122, 129, 132, 137, 139–141, 143, 146, 155–158, 164, 171, 172, 181, 183, 184, 188–195, 197, 198, 203, 205, 207, 208, 210–218, 221–226, 231, 233, 234–236, 240, 242–244, 253–255, 257–260, 262–267, 269, 271].

Відомий трактат J.B.J. Fourier [181] з теорії теплопровідності був опублікований у 1822 р., а першу статтю, в якій сформульована крайова задача термопружності і введено рівняння зв'язку між температурним полем та деформаціями, було опубліковано J.M.C. Duhamel [172] майже два століття тому. Загальні формулювання рівнянь термопружності практично

належать F.E. Neumann [222], E. Almansi [146] O. Tedone [255], W. Voigt [267] та H. Jeffreys [199].

Більшість ранніх робіт присвячені статичним проблемам. Задачі термопружності зводились до задач теорії пружності, в яких на розглядуване тіло діють поверхневі та об'ємні сили, потенціалом густини в яких була температура, і задачі розв'язувались методами класичної теорії пружності, розробленими Сен-Венаном, Ламе і Лапласом. Буквально визначались розв'язки рівнянь Ламе у переміщеннях за дії на тіло довільних масових сил. На цій основі було вирішено низку специфічних проблем і отримано ряд цікавих розв'язків конкретних задач термопружності C.W. Borchardt [158], J. Hopkinson [195], A. Leon [205] і С. Тимошенко [257].

Подальший прогрес досягнуто у працях M.A. Biot [155] (проаналізовано властивості двовимірних розподілів теплових напружень), J.N. Goodier [184] (введено поняття термопружного потенціалу) та A. Signorini [242] (розглянуто скінченні термопружні деформації).

Під час і після Другої світової війни вимоги, пов'язані з новими технологіями, сприяли хвилі досліджень [143, 198, 208, 213, 217, 221, 240] в галузі термічних напружень. Отримано широке поле знань про розподіл температури в конкретних ситуаціях; визначено численні температурні напруження у складних механічних системах (наприклад, в лопатках турбін); досліджено міцність і оцінено допустимі напруження у різноманітних тілах, виготовлених з нових матеріалів, за різних умов навантаження, виникнення втоми матеріалів; розглянуто низку проблем в межах термов'язкопружності, стійкості та започатковано вивчення механічної поведінки елементів конструкцій за умов термічного удару.

Важливими подіями стали публікації книг H. Parkus [214, 231] про термічні напруження, в яких наведено опис і аналіз більшості результатів, отриманих у стаціонарній і нестаціонарній термопружності за більше, ніж сто років; з виходом цих книг стало можливим викладання теорії термопружності у Вишах, а також вихід праць B.A. Boley і J.H. Weiner [157], B.E. Gatewood [183], W. Nowacki [226] та ін., які істотно розширили уявлення

про термічні напруження на випадок нелінійного деформування та розгляду динамічних ефектів, анізотропії матеріалів.

Статті М.А. Biot [156] та М. Lessen [207], опубліковані 120 років після піонерської роботи Дюамеля у 1837 р., дали новий імпульс дослідженням у термопружності. У класичному формулюванні спочатку розв'язувалась задача теплопровідності, а потім визначалися напруження з рівнянь Дюамеля-Неймана. Накопичений до того часу досвід та теоретичні міркування підказували, що зміна переміщень у тілі супроводжується зміною температури, а зміна температури – зміною переміщень. Кілька років після публікації роботи [156] вийшло кілька важливих праць, присвячених проблемам зв'язаної термопружності. Зокрема, J.H. Weiner [269] опублікував доведення єдиності розв'язків зв'язаних рівнянь термопружності. Аналіз поширення хвиль, у тому числі хвиль Релея, в термопружних тілах був предметом статей Р. Chadwick, I.N. Sneddon [164], H. Deresiewicz [171] та F.J. Lockett [210, 211].

Наступним важливим кроком було розроблення теорії узагальненої термопружності, започаткованої статтею Н.В. Лорда та Ю. Шульмана [212] в 1967 році.

Вагоме місце серед методів розв'язування крайових задач термопружності займають інтегральні перетворювання [1, 59, 123, 157, 170, 232, 273 та ін.]. Зазначимо, що виникненням труднощів при визначенні оригіналів інтегрального перетворення часто використовують методи числового обернення.

Я.С. Підстригачем та Ю.М. Коляно [103] запропоновано застосовувати апарат узагальнених функцій при розв'язанні задач термопружності неоднорідних структур. Такий підхід був розвинутий та апробований на багатьох класах задач термопружності неоднорідних тіл їхніми учнями та співробітниками Є.Г. Грицьком, Є.Г. Іваником, О.М. Куликом, Р.М. Кушніром, І.М. Махоркіним, В.С. Поповичем, Б.В. Процюком та ін.

Для багатьох дослідників дуже зручними при розв'язуванні задач термопружності виявилися методи, побудовані на основі застосування

функцій Гріна [18, 21, 22, 59, 73, 78, 97, 111, 118, 122, 201, 204 та ін.]. Відповідні задачі теплопровідності та термопружності для кусково-однорідних елементів конструкцій з плоско-паралельними поверхнями поділу розглядались, зокрема, в [18, 31, 52, 106, 270 та ін.]. Задачі теплопровідності для багатошарових тіл з різними початковими температурами шарів розглядались у роботах [106, 112, 113, 177 та ін.].

За високотемпературної дії теплофізичні й фізико-механічні характеристики тіла залежать від температури. Неврахування цієї залежності може призводити до кількісних, а іноді й якісних похибок при дослідженні термопружної поведінки конструкцій. З урахуванням температурної залежності характеристик задача термопружності стає нелінійною. Для отримання розв'язків нелінійних нестационарних задач теплопровідності часто попередньо застосовують перетворення [15], які уможливають часткову лінеаризацію вихідних рівнянь чи зміну типу нелінійного рівняння. Найпоширенішими в цьому випадку є підстановки Кірхгофа, Гудмена та ін. Для спрощення розв'язування нелінійного диференціального рівняння теплопровідності використовують перетворення Больцмана, метод автоmodalьних розв'язків (метод подібності) та ін. Для пониження порядку нелінійності також використовують метод Бубнова-Гальборкіна, інтегральний метод теплового балансу. Крім цих класичних методів широкого використання набули також варіаційні [51] (Біо, Гріна, Лейбензона, Канторовича, Рітца, Трефтца), суть яких полягає у виборі наближених розв'язків, які задовольняють певним екстремальним властивостям відповідних функціоналів відносно крайових задач.

Для отримання аналітично-числових розв'язків задач теплопровідності для термочутливих тіл часто використовують метод лінеаризації параметрів [81].

Поширеним методом отримання наближених аналітичних розв'язків задач термопружності є метод збурень [81, 96, 223]. Відповідно до цього методу, розв'язання задач термопружності зводиться до послідовності відповідних крайових задач для диференціальних рівнянь зі сталими

коефіцієнтами. При цьому, кожна наступна крайова задача послідовності використовує знайдений розв'язок попередньої.

У роботах Ю.С. Постольника та його учнів [109, 110] запропоновано визначати одновимірні температурні поля і напруження у тілах із залежними від температури властивостями, використовуючи метод еквівалентних джерел, в основі якого лежить метод термічного шару (Біо, Швейника, Гольдфарба).

Теплове випромінювання є ще одним чинником, який необхідно враховувати за високотемпературної теплової дії при дослідженні термопружного стану [19, 28, 79, 83 та ін.]. При цьому відповідна задача теплопровідності ускладнюється ще й через нелінійність крайових умов. В одношарових тілах для їх розв'язання використовують різні варіанти методу послідовних наближень [65, 81, 112], методи збурень [81] і квазілінеаризації. У [140] з використанням методу квазілінеаризації та інтегрального перетворення Лапласа отримано розв'язок задачі теплопровідності для півпростору, де вплив багатошарового покриття і променево-конвективного теплообміну з довкіллям описується узагальненою нелінійною крайовою умовою. У роботах [131, 133] побудовано розв'язок нелінійної контактної крайової задачі нестационарної теплопровідності для опромінюваної двошарової (з частково прозорим та непрозорим шарами) пластини, з [133] та без [131] проміжкового шару з використанням узагальнених крайових умов. Статичну задачу термопружності для термочутливого порожнистого циліндра за конвективно-променевого теплообміну з використанням варіантів методу послідовних наближень розв'язано у [252]. Задачі термопружності для шаруватих термочутливих плит за кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури з урахуванням випромінювання у статичній постановці розглядались у [113]. З використанням методу функцій Гріна у вигляді рядів за власними значеннями у [83] визначено нестационарне температурне поле і зумовлені ним температурні напруження та переміщення в багатошаровій пластині зі сталими фізико-механічними характеристиками за нелінійних умов теплообміну.

У переважній більшості відзначених праць конкретні задачі термопружності розв'язано для просторо-одновимірних континуумів. В той же час біметалічні термоперетворювачі можуть бути конструкціями доволі складної тривимірної форми. Розв'язування комплексної задачі термопружності для таких тіл є доволі складною математичною проблемою і приводить до використання універсальних числових підходів на основі методів скінченних та граничних елементів. Розвитку цих методів присвячені роботи І. Альтенбаха, Н.М. Беляєва, П.М. Варвака, Р. Галлагера, І.І. Дияка, Б.Д. Дробенка, В.В. Киричевського, А.А. Кочубея, С. Крауча, М.В. Марчука, В.В. Михаськіва, Я.Г. Савули, А.А. Рядна, А.С. Сахарова, А. Старфілда, Г.А. Шинкаренка, J.H. Argyris, A.K. Aziz, I. Babuska, P.K. Banerjee, K.J. Bathe, T. Belytschko, P.G. Bergan, C.A. Brebbia, A. Chaudouet, P.G. Ciarlet, J.L. Coulomb, J.D. Dominguez, L. Elliot, B. Fredriksson, D.V. Griffith, E. Hinton, T.R. Hsu, M. Kleiber, D. Lesnic, R.W. Lewis, A. Niku-Lari, A.K. Noor, D.R.J. Owen, J.T. Oden, V. Pilkey, N. Perrone, W.C. Rheinbolt, J.S. Sabbonandiere, H.G. Schaeffer, L.J. Segerlind, G. Sewell, T.M. Smith, C. Taylor, J.C. Telles, P. Tong, L.C. Wrobel, O.C. Zienkiewicz та ін. [15–17, 23, 27, 41, 44, 48, 53, 75, 76, 85–87, 90, 98, 99, 125, 128, 142, 147–154, 159–163, 165–169, 173–176, 179, 182, 186, 196, 202, 206, 219, 220, 227–230, 237–239, 241, 245, 247–252, 256, 261, 268, 272, 274–276]. Варто зазначити, що у випадку задачі теплопровідності для кусково-однорідних тіл згідно методу граничних елементів, який здебільшого передбачає використання функції Гріна (фундаментального розв'язку) для однорідного простору, необхідно визначати дві невідомі на поверхнях поділу. Рідше використовують функцію Гріна для шаруватих областей у вигляді рядів за власними значеннями, які потрібно попередньо знайти з відповідних трансцендентних рівнянь. Така форма розв'язку є незручною при малих часах, що зумовлено повільною збіжністю відповідних рядів (чим менший час, тим більше членів необхідно враховувати при підрахунку їх суми).

Суттєвою перевагою методу граничних елементів є зменшення просторової розмірності задачі. Однак у випадку суттєво нелінійних задач ця

перевага зникає, позаяк виникає потреба обчислення об'ємних інтегралів (у випадку тривимірних задач). Водночас заключна матриця лінійних алгебричних рівнянь при використанні методу граничних елементів є повністю заповненою і несиметричною, тоді як матриці в методі скінченних елементів залишаються симетричними і стрічковими, коли ненульові елементи збираються навколо діагоналі.

Завдяки властивій методу граничних елементів можливості природно знаходити розв'язки задач математичної фізики у нескінченних (відкритих) областях, запропоновано сумісне використання методу скінчених елементів (в області тіла) та методу граничних елементів (у зовнішньому середовищі). Однак і в цьому випадку, незважаючи на те, що крайові умови на нескінченості переносяться на області скінчених розмірів, підходи лише на основі методу скінчених елементів виявились більш ефективними, оскільки внаслідок їх використання дослідники отримують системи лінійних алгебраїчних рівнянь з розрідженими матрицями, і використання спеціальних методів для їх розв'язування дозволяє зменшити процесорний час розрахунку і вимоги щодо оперативної пам'яті комп'ютерних систем.

Оцінки міцності та експлуатаційної надійності реальних промислових конструкцій, які, як правило, є структурно неоднорідними тілами складної форми, суттєво залежать від точності й достовірності даних про їхній напружено-деформований стан за умов їх експлуатації. З огляду на це надзвичайно актуальним є завдання дослідження напружено-деформованого стану таких конструкцій у межах якнайточніших математичних моделей і визначення на цій основі максимальних напружень та зон конструкцій, в яких вони виникають за умов експлуатації. Використання спрощених моделей стрижнів, балок, пластин і оболонок до визначення максимальних напружень у конструкціях складної форми за умов, що відповідають експлуатаційним, часто приводить до хибних результатів. І похибки ці часто виникають якраз в місцях виникнення максимальних експлуатаційних напружень, в зонах з'єднання окремих конструкційних елементів, де порушуються припущення, покладені в основу спрощених підходів. Це

призводить до необхідності дослідження механічної поведінки складних за формою структурно неоднорідних конструкцій за умов експлуатації на основі просторово тривимірних математичних моделей.

З огляду на зазначене доцільною є формування тривимірної математичної моделі для кількісного опису нестационарних теплових і деформаційних процесів у кусково-неоднорідних засобах контактної термометрії складної форми за термосилових навантажень та розробка відповідного скінчено-елементного інструментарію для комп'ютерного моделювання і виконання обчислювальних експериментів з оцінювання міцності термоперетворювачів та пошуку нових технічних рішень.

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ТРИВИМІРНИХ ТІЛАХ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

У даному розділі сформульовано орієнтований на використання числових методів варіант математичної моделі для кількісного опису термомеханічних процесів у пружних структурно-неоднорідних твердих тілах за температурного й силового навантаження. Приведено загальні вихідні співвідношення для дослідження процесів теплопровідності й деформування в пружному тілі за дії комплексного навантаження. За основу прийнято просторово тривимірний підхід, що дає змогу достатньо адекватно кількісно описати напружено-деформований стан пружного тіла складної геометричної форми і структури. Температурне поле в тілі описує нестационарне рівняння теплопровідності, а процеси деформування – співвідношення квазістатичної теорії пружності. За таких обставин механічна і теплова взаємодія тіла із зовнішнім середовищем відбувається таким чином, що процес навантаження можна розглядати у квазістатичному наближенні без врахування зв'язаності полів температури та деформацій, а переміщення, деформації та їхні швидкості в тілі приймаються такими, що виконуються лінійні залежності між деформаціями та переміщеннями. Усі теплофізичні й механічні характеристики матеріалів є залежними від температури.

У такому наближенні задачу про визначення температурних і механічних полів у розглядуваному тілі за дії силового і температурного навантаження формуємо за два етапи. На першому записуємо рівняння теплопровідності і відповідні умови теплообміну між тілом та довкіллям, а також між окремими структурними складовими тіла. На другому етапі для визначення компонент вектора переміщень і тензорів деформацій та напружень у тілі записуємо вихідні співвідношення квазістатичної теорії

пружності, температурні поля для яких є вхідними (час у ці співвідношення входить як параметр).

Дана математична модель є розвитком відомих з літератури моделей визначення термонапруженого стану твердих тіл за дії температурних і силових навантажень [86, 274].

Наведені в цьому розділі результати опубліковані в роботах [11, 12, 43].

Розглянемо деформівне тверде тіло, що займає область V евклідового простору E^3 з неперервною за Ліпшицем поверхнею S за конкретних заданих теплових і механічних початкових та крайових умов.

2.1. Формулювання задачі теплопровідності

Температурне поле в тілі, віднесеному до декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$, описує рівняння теплопровідності [59]

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + Q, \quad (x_1, x_2, x_3) \in V, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

де

T – температура;

t – час;

$c = c(x_1, x_2, x_3, T)$ – об'ємна теплоємність;

$\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(x_1, x_2, x_3, T)$ – коефіцієнти теплопровідності, компоненти симетричного тензора другого рангу;

$Q = Q(x_1, x_2, x_3, T)$ – питома потужність джерел тепла.

У рівнянні теплопровідності (2.1) і надалі індекси, які повторюються, є індексами підсумовування від 1 до 3.

Зазначимо, що напрям вектора теплового потоку в довільній точці анізотропного тіла не є нормальним до ізотерми температурного поля, що проходить крізь цю точку, як у випадку ізотропного середовища. У загальному випадку для такого тіла маємо шість незалежних коефіцієнтів теплопровідності, і кожна компонента теплового потоку q_i у будь-якій точці

такого тіла є лінійною функцією компонент температурного градієнту в цій точці, тобто

$$\begin{aligned} -q_1 &= \lambda_{11} \frac{\partial T}{\partial x_1} + \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial x_2} + \lambda_{13} \frac{\partial T}{\partial x_3}, \\ -q_2 &= \lambda_{12} \frac{\partial T}{\partial x_1} + \lambda_{22} \frac{\partial T}{\partial x_2} + \lambda_{23} \frac{\partial T}{\partial x_3}, \\ -q_3 &= \lambda_{13} \frac{\partial T}{\partial x_1} + \lambda_{23} \frac{\partial T}{\partial x_2} + \lambda_{33} \frac{\partial T}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Одним з найважливіших часткових випадків анізотропного тіла є ортотропне тіло. Через кожну точку такого тіла проходять три ортогональні площини симетрії його теплофізичних властивостей. Якщо скерувати осі координат перпендикулярно до цих площин симетрії, матимемо лише три різні коефіцієнти теплопровідності $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а компоненти вектора теплового потоку у так вибраній системі координат визначатимуть співвідношення:

$$-q_1 = \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x_1}, \quad -q_2 = \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x_2}, \quad -q_3 = \lambda_3 \frac{\partial T}{\partial x_3}.$$

Рівняння теплопровідності для ортотропного тіла в системі координат, природно пов'язаній з площинами симетрії теплофізичних властивостей тіла, набуває вигляду:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\lambda_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) + Q. \quad (2.2)$$

У випадку осесиметричного ортотропного тіла, коефіцієнти теплопровідності якого рівні $\lambda_r, \lambda_\varphi, \lambda_z$ в напрямках r, φ, z системи циліндричних координат (тобто в напрямі променів, кілець та осі обертання тіла), теплові потоки рівні

$$q_r = -\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_\varphi = -\lambda_2 \frac{\partial T}{r \partial \varphi}, \quad q_z = -\lambda_3 \frac{\partial T}{\partial z},$$

а рівняння теплопровідності за умови осьової симетрії навантаження матиме вигляд:

$$c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda_r r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (2.3)$$

Слід, однак, зауважити, що при розгляді ортотропного тіла в системі координат, осі якої не збігаються з трьома взаємно перпендикулярними напрямками, що визначаються площинами симетрії теплофізичних характеристик тіла і для яких маємо три незалежні коефіцієнти теплопровідності, тіло матиме цілковито анізотропні властивості (усі шість коефіцієнтів теплопровідності будуть відмінними від нуля).

У випадку ізотропного тіла маємо лише один коефіцієнт теплопровідності.

Сформулюємо початкові й крайові умови для задачі теплопровідності. Припустимо, що в початковий момент часу $t = 0$ температура у тілі задана й дорівнює $T_0(x_1, x_2, x_3)$. Тоді початковою умовою буде:

$$T(x_1, x_2, x_3, 0) = T_0(x_1, x_2, x_3). \quad (2.4)$$

Приймаємо також, що тіло може перебувати за дії різних теплових чинників: теплового потоку $q(x_1, x_2, x_3, t)$, конвективного теплообміну чи теплообміну випромінюванням із довкіллям, температура якого $T_S(x_1, x_2, x_3, t)$. Тому теплову крайову умову на поверхні тіла S задаємо у вигляді

$$-\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_i = \beta(T - T_S) + q, \quad (x_1, x_2, x_3) \in S, \quad t \geq 0, \quad (2.5)$$

де $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ – вектор одиничної зовнішньої (щодо V) нормалі до поверхні тіла;

$\beta(x_1, x_2, x_3, T)$ – узагальнений коефіцієнт теплообміну;

T_S – температура навколишнього середовища.

Зазначимо, що крайова умова (2.5) має узагальнений характер. За достатньо великого коефіцієнту β автоматично (якщо $q = 0$) отримуємо крайову умову першого роду (коли на поверхні тіла задають температуру T_S); при $\beta = 0$ маємо умову другого роду (якщо $q = 0$ маємо умову тепло-

ізоляції); при $q=0$ отримуємо умову третього роду (закон конвективного теплообміну між тілом та навколишнім середовищем).

Таким чином, задача про визначення температури T у тілі в розглядуваному формулюванні полягає у розв'язуванні рівняння теплопровідності (2.1) за початкової умови (2.4) та крайової умови (2.5).

Слід зазначити, що в розглянутому формулюванні всі теплофізичні характеристики тіла залежать як від температури, так і від точки тіла, що дає можливість розглядати неоднорідні та кусково-однорідні термочутливі функціонально градієнтні тіла. При цьому на межі S_{kl} підобластей тіла V_k та V_l з різними теплофізичними характеристиками задаємо умови ідеального теплового контакту, а саме умову рівності температур

$$T_k(x_1, x_2, x_3, t) = T_l(x_1, x_2, x_3, t), \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in S_{kl}, t \geq 0 \quad (2.6)$$

і теплових потоків

$$\left(-\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_i \right)_k = \left(-\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} n_i \right)_l, \quad \forall (x_1, x_2, x_3) \in S_{kl}, t \geq 0, \quad (2.7)$$

а у всій області тіла V розв'язуємо рівняння теплопровідності (2.1) з розривними коефіцієнтами.

Розв'язки рівняння теплопровідності є вхідними для задачі другого етапу – визначення компонент вектора переміщень та тензорів деформацій і напружень у тілі.

2.2. Основні співвідношення квазістатичної термопружності

Припустимо, що на частині S_u поверхні S конструкції задано переміщення $\mathbf{u}^* = (u_1^*, u_2^*, u_3^*)^T$, а на частині S_σ – силове навантаження, яке характеризує вектор $p = (p_1, p_2, p_3)^T$. Індекс "T" тут і надалі означає операцію транспонування.

Квазістатична задача теорії термопружності полягає у визначенні вектора переміщень $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$, компонент тензорів деформацій $\hat{\varepsilon}$ та напружень $\hat{\sigma}$, які задовольняють рівняння [97]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i = 0, \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (2.9)$$

$$\sigma_{ij} = G_{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{(0)}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (2.10)$$

та крайові умови

$$\sigma_{ij} n_j = p_i, \quad \mathbf{x} \in S_\sigma, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^*, \quad \mathbf{x} \in S_u. \quad (2.12)$$

Тут $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$;

$n_j = \cos(\mathbf{n}, x_j)$ – компоненти одиничного вектора нормалі \mathbf{n} до поверхні

S ;

G_{ijkl} – пружні модулі;

F_i – компоненти масових сил;

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = \alpha_{ij} (T - T_0) - \quad (2.13)$$

температурні деформації (α_{ij} – значення коефіцієнтів температурного розширення; T_0 – температура, за якої відсутні температурні деформації);

$i, j, k, l = 1, 2, 3$; за індексами, які повторюються, йде підсумовування (у співвідношенні (2.8) за індексом j , а у співвідношенні (2.10) – за індексами k, l).

За умов загальної анізотропії тіла, коли його властивості в різних напрямках різні, маємо двадцять одну незалежну компоненту тензора пружних модулів: $G_{1111}, G_{2222}, G_{3333}, G_{1212}, G_{1313}, G_{2323}, G_{1122}, G_{1133}, G_{1112},$

G_{1113} , G_{1123} , G_{2233} , G_{2212} , G_{2213} , G_{2223} , G_{3312} , G_{3313} , G_{3323} , G_{1213} , G_{1223} , G_{1323} . Однак часто властивості анізотропних матеріалів за деякими напрямками бувають однаковими. У таких випадках кількість незалежних констант пружності може бути зменшене. Зокрема для ортотропного тіла, через кожену точку якого проходять три ортогональні площини симетрії, залишається дев'ять незалежних коефіцієнтів: G_{1111} , G_{2222} , G_{3333} , G_{1212} , G_{1313} , G_{2323} , G_{1122} , G_{1133} , G_{2233} , які однозначно визначаються трьома модулями пружності (при навантаженні в трьох ортогональних напрямках), трьома модулями зсуву та трьома коефіцієнтами Пуассона.

Для ізотропного тіла компоненти тензора пружних модулів визначають за співвідношеннями [40]

$$G_{ijkl} = G_* \delta_{ij} \delta_{kl} + G^* (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

де δ_{ij} – символ Кронеккера:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases};$$

G_* , G^* – коефіцієнти Ламе, які пов'язані з модулем Юнга E і коефіцієнтом Пуассона ν так:

$$G_* = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad G^* = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.14)$$

У наведених виразах і надалі індекси, які повторюються, є індексами сумування від 1 до 3.

Співвідношення (2.8) – (2.10) та крайові умови (2.11) і (2.12) формують повну систему статичної задачі теорії пружності, для якої існує єдиний розв'язок [97]. Проте отримати розв'язок цієї задачі в аналітичному вигляді для конструкцій складної геометричної конфігурації надзвичайно важко і часто практично неможливо. Тому для розв'язування таких задач широко використовують числові методи, зокрема метод скінченних елементів.

Для чисельної реалізації зручним може виявитись матрично-векторний запис основних співвідношень [86, 274]. З метою записати в такому вигляді

ці співвідношення компоненти симетричних тензорів деформацій і напружень, а також переміщень зберемо у вектори

$$\{\varepsilon\} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{23})^T,$$

$$\{\sigma\} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})^T,$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$$

і введемо матриці геометричного оператора теорії пружності

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \nabla_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_2 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_3 \\ \nabla_2 & \nabla_1 & 0 \\ \nabla_3 & 0 & \nabla_1 \\ 0 & \nabla_3 & \nabla_2 \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

пружних сталей

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} G_{1111} & G_{1122} & G_{1133} & G_{1112} & G_{1113} & G_{1123} \\ G_{2211} & G_{2222} & G_{2233} & G_{2212} & G_{2213} & G_{2223} \\ G_{3311} & G_{3322} & G_{3333} & G_{3312} & G_{3313} & G_{3323} \\ G_{1211} & G_{1222} & G_{1233} & G_{1212} & G_{1213} & G_{1223} \\ G_{1311} & G_{1322} & G_{1333} & G_{1312} & G_{1313} & G_{1323} \\ G_{2311} & G_{2322} & G_{2333} & G_{2312} & G_{2313} & G_{2323} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

та напрямних косинусів зовнішньої нормалі до поверхні

$$[\mathbf{n}] = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \\ n_2 & n_1 & 0 \\ n_3 & 0 & n_1 \\ 0 & n_3 & n_2 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Матриця пружних модулів записана тут для загального анізотропного тіла. Для ортотропного тіла у випадку, коли декартові координати є перпендикулярними до трьох ортогональних площин симетрії його фізико-механічних властивостей, набуває вигляду

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} E'_1 & \nu'_{12}E'_1 & \nu'_{13}E'_1 & 0 & 0 & 0 \\ \nu'_{21}E'_2 & E'_2 & \nu'_{23}E'_2 & 0 & 0 & 0 \\ \nu'_{31}E'_3 & \nu'_{32}E'_3 & E'_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{23} \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Тут [26]

$$E'_1 = d1/d; \quad E'_2 = d2/d; \quad E'_3 = d3/d;$$

$$d1 = E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32}); \quad d2 = E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31}); \quad d3 = E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21});$$

$$d = 1 - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{13}\nu_{21}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32};$$

$$\nu'_{12} = \frac{(\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13})}{1 - \nu_{23}\nu_{32}}; \quad \nu'_{13} = \frac{(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})}{1 - \nu_{23}\nu_{32}}; \quad \nu'_{21} = \frac{(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31})}{1 - \nu_{13}\nu_{31}};$$

$$\nu'_{23} = \frac{\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21}}{1 - \nu_{13}\nu_{31}};$$

$$\nu'_{31} = \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}; \quad \nu'_{32} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$(E'_1\nu'_{12} = E'_2\nu'_{21}, E'_1\nu'_{13} = E'_3\nu'_{31}, E'_2\nu'_{23} = E'_3\nu'_{32}),$$

де E_1, E_2, E_3 – модулі пружності в трьох ортогональних напрямках симетрії властивостей ортотропного тіла; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модулі зсуву; $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ – три незалежних коефіцієнти Пуассона; три інших коефіцієнти визначають за співвідношеннями:

$$\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_1}{E_2}; \quad \nu_{31} = \nu_{13} \frac{E_1}{E_3}; \quad \nu_{32} = \nu_{23} \frac{E_2}{E_3}.$$

Для ізотропного тіла матриця пружних модулів істотно спрощується:

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Після введення матричних характеристик $[\mathbf{B}]$, $[\mathbf{G}]$ та $[\mathbf{n}]$ рівняння рівноваги можна записати у вигляді

$$[\mathbf{B}]^T \{\sigma\} + \mathbf{F} = 0, \quad (2.20)$$

а співвідношення Коші й феноменологічні залежності між напруженнями і деформаціями – так:

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}]\mathbf{u}, \quad (2.21)$$

$$\{\sigma\} = [\mathbf{G}] \left(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{(0)}\} \right) \quad (2.22)$$

за крайових умов

$$[\mathbf{n}]^T \{\sigma\} = \mathbf{p}. \quad (2.23)$$

Таким чином, для визначення п'ятнадцяти невідомих функцій (компонент вектора переміщень та тензорів деформацій і напружень) маємо три рівняння рівноваги (2.8) чи (2.20) у матрично-векторному вигляді, шість співвідношень між деформаціями і переміщеннями (2.9) чи (2.21) та шість феноменологічних залежностей (2.10) чи (2.22) за крайових умов (2.11) і (2.12) чи (2.23).

Для кількісного опису процесів пружного деформування часто використовують формулювання задачі у переміщеннях. При цьому ключові рівняння відносно переміщень тіла отримують шляхом підстановки співвідношень (2.21) і (2.22) у рівняння рівноваги (2.20). Як наслідок, отримуємо три диференціальних рівняння еліптичного типу другого порядку відносно трьох компонент переміщень, які в матрично-векторному вигляді можна записати, як

$$[\mathbf{B}]^T [\mathbf{G}][\mathbf{B}]\mathbf{u} = [\mathbf{B}]^T [\mathbf{G}]\{\varepsilon^{(0)}\} - \mathbf{F}, \quad (2.24)$$

де $\{\varepsilon^{(0)}\} = (\alpha_{11}T, \alpha_{22}T, \alpha_{33}T, \alpha_{12}T, \alpha_{13}T, \alpha_{23}T)^T$; у випадку ізотропного тіла $\{\varepsilon^{(0)}\} = (\alpha T, \alpha T, \alpha T, 0, 0, 0)^T$.

Визначивши переміщення з рівняння (2.24) за умов (2.11), (2.23), можна обчислити деформації, використовуючи геометричні співвідношення (2.21), та напруження – за феноменологічними співвідношеннями (2.22).

Слабке формулювання задачі термопружності (2.24), (2.11), (2.23) у переміщеннях можна отримати на основі підходу зважених залишків [53] з використанням формули Остроградського-Гауса (для пониження порядку похідних переміщень за просторовими змінними).

Часто, однак, при розв'язуванні задач теорії пружності використовують безпосередньо варіаційні формулювання. Зокрема, за найвідомішим і найуживанішим варіаційним підходом стан рівноваги тіла визначають з умови мінімуму функціоналу Лагранжа [40, 97, 124]

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{(0)}\})^T \{\sigma\} dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{F} ds - \int_{S_\sigma} \mathbf{u}^T \mathbf{p} ds, \quad (2.25)$$

або, враховуючи (2.21) та (2.22),

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}) = & \frac{1}{2} \int_V \mathbf{u}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{G}] [\mathbf{B}] \mathbf{u} dV - \int_V \mathbf{u}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{G}] \{\varepsilon^{(0)}\} dV + \\ & + \int_V \{\varepsilon^{(0)}\}^T [\mathbf{G}] \{\varepsilon^{(0)}\} dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{F} ds - \int_{S_\sigma} \mathbf{u}^T \mathbf{p} ds \end{aligned} \quad (2.26)$$

на множині

$$U = \{\mathbf{u} = \mathbf{u}^*, \mathbf{x} \in S_u, u_1, u_2, u_3 \in H^1(V)\} \quad (2.27)$$

де $H^1(V)$ – простір Соболева.

За такого підходу задачі теорії пружності ставлять у відповідність варіаційну задачу $\Pi(\mathbf{u}) \rightarrow \min_{u_1, u_2, u_3 \in U}$, з розв'язків якої спочатку визначають деформації (співвідношення (2.21)), а потім – напруження (співвідношення (2.22)).

При використанні першого підходу, коли записують рівняння рівноваги в переміщеннях, після зниження максимального порядку похідних шляхом застосування методу зважених залишків [53], отримуємо остаточно таку ж систему рівнянь, як і при використанні варіаційного підходу на основі функціоналу Лагранжа.

За розгляду структурно-неоднорідних конструкцій, що складаються з багатьох структурних елементів, виготовлених з різних матеріалів, задачу розв'язують з розривними коефіцієнтами у всій області тіла (для кожного структурного елемента – свої характеристики), а на межі S_{kl} підобластей V_k та V_l з різними фізико-механічними характеристиками задаємо умови ідеального контакту, а саме умови рівності

$$\mathbf{u}_k(x, y, z, t) = \mathbf{u}_l(x, y, z, t) \quad \forall (x, y, z) \in S_{kl} \quad (2.28)$$

переміщень та

$$(\sigma_n)_k = (\sigma_n)_l \quad \forall (x, y, z) \in S_{kl}. \quad (2.29)$$

нормальних до поверхні розділу напружень.

Зауважимо, що формулювання задачі пружності у матрично-векторному вигляді є загальним і залишається без змін для усіх часткових випадків, зокрема, для осесиметричної й плоскої задач. Тому під час числової реалізації загальна структура побудови розв'язку єдина як для тривимірних за просторовими змінними задач, так і для двовимірних. Змінюються лише блоки, які відповідають за обчислення конкретних часткових матриць і векторів у співвідношеннях (2.20) – (2.22).

Наприклад, у разі плоского напруженого стану (за відомих умов закріплення на частині поверхні S_u і поверхневих сил $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$ на частині поверхні S_σ області V , зайнятої тілом, задачу визначення векторів переміщень $\mathbf{u} = (u_1, u_2)^T$, деформацій $\{\varepsilon\} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12})^T$ та напружень $\{\sigma\} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})^T$ описують ті ж системи рівнянь (2.20) – (2.22) за крайових умов (2.23), де матриці диференціального оператора геометричних співвідношень теорії пружності, напрямних косинусів зовнішньої нормалі до поверхні та пружних сталей у випадках ізотропного тіла відповідно набувають вигляду [274]:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \nabla_1 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_2 & 0 \\ \nabla_2 & \nabla_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

$$[\mathbf{n}] = \begin{bmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

$$[\mathbf{G}] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

У випадку ортотропного тіла

$$[\mathbf{G}] = \begin{bmatrix} E'_1 & \nu'_{12}E'_1 & 0 \\ \nu'_{21}E'_2 & E'_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

2.3. Врахування просторової структури матеріалу

Часто структурно-неоднорідні тіла складаються з різних матеріалів, як ізотропних, так і анізотропних. Пружні сталі анізотропних матеріалів залежать від напрямку осей координатної системи і є різними в різних системах координат. Для ізотропних матеріалів пружні сталі залишаються одними і тими ж для всіх ортогональних систем координат. При дослідженні напружено-деформованого стану анізотропних складових структурно-неоднорідного тіла часто повстає проблема: відомі пружні сталі та сталі податливості анізотропного тіла в системі координат x_1, x_2, x_3 , але при розрахунках зручніше користуватись іншою системою координат x'_1, x'_2, x'_3 . Наприклад, розглядаючи тіло як складну конструкцію, виготовлену з різних матеріалів, ми відносимо її до глобальної системи координат (x'_1, x'_2, x'_3) . Водночас окремі анізотропні складові тіла легко описуються в їх локальних системах координат, природно пов'язаних з площинами симетрії теплофізичних і фізико-механічних властивостей матеріалів (в цих локальних системах координат відомі пружні сталі і сталі податливості матеріалів). І виникає потреба знайти пружні сталі та сталі податливості в глобальній системі координат, до якої віднесена вся конструкція.

Якщо структурна складова виготовлена, наприклад, з ортотропного матеріалу, то прикладання зусиль в напрямках, перпендикулярних до площин симетрії не буде перекошувати і закручувати її, як у випадку загальної анізотропії. Вибравши відповідно осі координат для опису цієї структурної складової, її анізотропні властивості в цій локальній системі координат, визначатимуть 9 незалежних сталих пружності. В системі координат, яка не пов'язана з площинами симетрії властивостей ортотропного тіла, для опису анізотропних властивостей необхідно буде вже 21 пружна стала, тобто в цій системі координат матеріал буде вести себе як цілковито анізотропний. Тому практично важливо знати як перетворюються матриці коефіцієнтів G_{ij} тензора пружних сталих при переході з однієї системи координат (x_1, x_2, x_3) в іншу (x'_1, x'_2, x'_3) . У зв'язку з цим розглянемо детальніше як перетворюються компоненти тензора пружних сталих при переході від однієї системи координат до іншої.

При розрахунках на міцність, як правило, використовують ортогональні системи координат. Їх перетворення зводиться до повороту осей навколо початку координат. Позначимо осі вихідної системи координат x_1, x_2, x_3 . Як відомо [74, 120], при повороті осей навколо початку системи координат на довільні кути, координати довільного вектора $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ в новій системі координат x'_1, x'_2, x'_3 визначаються за співвідношенням

$$a'_i = a_j n_{ij} \quad (2.35)$$

де матриця напрямних косинусів, які задають перетворення координат, виглядає так:

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x'_1 & n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ x'_2 & n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ x'_3 & n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{array} \quad (2.36)$$

Тут $n_{ij} = \cos(x'_i, x_j)$, $i, j = 1, 2, 3$.

Враховуючи введені позначення, в розгорнутому вигляді маємо:

$$a'_1 = a_1 \cos(x'_1, x_1) + a_2 \cos(x'_1, x_2) + a_3 \cos(x'_1, x_3)$$

$$a'_2 = a_1 \cos(x'_2, x_1) + a_2 \cos(x'_2, x_2) + a_3 \cos(x'_2, x_3)$$

$$a'_3 = a_1 \cos(x'_3, x_1) + a_2 \cos(x'_3, x_2) + a_3 \cos(x'_3, x_3)$$

чи

$$a'_1 = a_1 n_{11} + a_2 n_{12} + a_3 n_{13}$$

$$a'_2 = a_1 n_{21} + a_2 n_{22} + a_3 n_{23}$$

$$a'_3 = a_1 n_{31} + a_2 n_{32} + a_3 n_{33}$$

Компоненти тензора напружень (як тензора другого рангу) в цих двох системах координат пов'язані співвідношеннями [26]

$$\sigma'_{kl} = \sigma_{ij} n_{ki} n_{lj}, \quad (2.37)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{kl} n_{ki} n_{lj}. \quad (2.38)$$

Завдяки тензорному запису вирази (2.37) і (2.38) доволі компактні. Для порівняння можна навести вираз (2.37) в розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} \sigma'_{11} = & \sigma_{11} n_{11}^2 + \sigma_{12} n_{11} n_{12} + \sigma_{13} n_{11} n_{13} + \sigma_{21} n_{12} n_{11} + \sigma_{22} n_{11}^2 + \sigma_{23} n_{12} n_{13} + \\ & + \sigma_{31} n_{13} n_{11} + \sigma_{32} n_{13} n_{12} + \sigma_{33} n_{13}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma'_{12} = & \sigma_{11} n_{11} n_{21} + \sigma_{12} n_{11} n_{22} + \sigma_{13} n_{11} n_{23} + \sigma_{21} n_{12} n_{21} + \sigma_{22} n_{12} n_{22} + \sigma_{23} n_{12} n_{23} + \\ & + \sigma_{31} n_{13} n_{21} + \sigma_{32} n_{13} n_{22} + \sigma_{33} n_{13} n_{23}; \end{aligned}$$

...

$$\begin{aligned} \sigma'_{33} = & \sigma_{11} n_{31}^2 + \sigma_{12} n_{31} n_{32} + \sigma_{13} n_{31} n_{33} + \sigma_{21} n_{32} n_{31} + \sigma_{22} n_{32}^2 + \sigma_{23} n_{32} n_{33} + \\ & + \sigma_{31} n_{33} n_{31} + \sigma_{32} n_{33} n_{32} + \sigma_{33} n_{33}^2. \end{aligned}$$

У випадку плоского напруженого стану (коли координата x_3 перпендикулярна до площини пластинки) при повороті інших двох осей в площині пластинки на кут Θ навколо осі x_3 матриця напрямних косинусів, які визначають перетворення координат, виглядає так:

$$\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x'_1 & \cos\Theta & \sin\Theta & 0 \\ x'_2 & -\sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ x'_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (2.39)$$

Напруження в нових осях відповідно до співвідношення (2.37) будуть:

$$\begin{aligned}\sigma'_{11} &= \sigma_{11} \cos^2 \Theta + 2\sigma_{12} \cos \Theta \sin \Theta + \sigma_{22} \sin^2 \Theta; \\ \sigma'_{12} &= (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \cos \Theta \sin \Theta + \sigma_{12} (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta); \\ \sigma'_{22} &= \sigma_{11} \sin^2 \Theta - 2\sigma_{12} \cos \Theta \sin \Theta + \sigma_{22} \cos^2 \Theta.\end{aligned}$$

Компоненти тензора 4-го рангу в цих системах координат (x_i та x'_i) пов'язані співвідношенням

$$G'_{ijkl} = G_{mnop} n_{im} n_{jn} n_{ko} n_{lp}. \quad (2.40)$$

Для встановлення зв'язку між компонентами пружних сталей можна скористатись співвідношенням (2.40). Але, щоб уникнути операцій з компонентами тензора 4-го рангу, вище введено матрично-векторний запис основних співвідношень термомеханіки.

Компоненти тензорів напружень і деформацій перепозначені:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_4 & \sigma_5 \\ \sigma_4 & \sigma_2 & \sigma_6 \\ \sigma_5 & \sigma_6 & \sigma_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 1/2\varepsilon_4 & 1/2\varepsilon_5 \\ 1/2\varepsilon_4 & \varepsilon_2 & 1/2\varepsilon_6 \\ 1/2\varepsilon_5 & 1/2\varepsilon_6 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Введено вектори відповідні вектори деформацій і напружень, і, відповідно, пружні сталі згруповано у вигляді матриці $[G]$. При цьому

$$\sigma_i = G_{ij} \varepsilon_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6. \quad (2.41)$$

$$\varepsilon_i = g_{ij} \sigma_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6. \quad (2.42)$$

При так введених позначеннях зв'язок між напруженнями у розглядуваних нами двох системах координат набуває простого вигляду

$$\sigma'_i = Q_{ij} \sigma_j, \quad (2.43)$$

де коефіцієнти Q_{ij} наведені в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1. Коефіцієнти Q_{ij}

i\j	1	2	3	4	5	6
1	$n_{11}n_{11}$	$n_{12}n_{12}$	$n_{13}n_{13}$	$2n_{12}n_{11}$	$2n_{13}n_{11}$	$2n_{12}n_{13}$
2	$n_{21}n_{21}$	$n_{22}n_{22}$	$n_{23}n_{23}$	$2n_{22}n_{21}$	$2n_{23}n_{21}$	$2n_{23}n_{22}$
3	$n_{31}n_{31}$	$n_{32}n_{32}$	$n_{33}n_{33}$	$2n_{32}n_{31}$	$2n_{33}n_{31}$	$2n_{33}n_{32}$

4	$n_{21}n_{11}$	$n_{12}n_{22}$	$n_{13}n_{23}$	$n_{11}n_{22} + n_{12}n_{21}$	$n_{13}n_{21} + n_{11}n_{23}$	$n_{13}n_{22} + n_{12}n_{23}$
5	$n_{31}n_{11}$	$n_{32}n_{12}$	$n_{33}n_{13}$	$n_{31}n_{12} + n_{32}n_{11}$	$n_{33}n_{11} + n_{31}n_{13}$	$n_{33}n_{12} + n_{32}n_{13}$
6	$n_{31}n_{21}$	$n_{32}n_{22}$	$n_{33}n_{23}$	$n_{31}n_{22} + n_{32}n_{21}$	$n_{33}n_{21} + n_{31}n_{23}$	$n_{33}n_{22} + n_{32}n_{23}$

Деформації пов'язані аналогічно:

$$\varepsilon'_i = q_{ij}\varepsilon_j, \quad (2.44)$$

де коефіцієнти q_{ij} подані в таблиці 2.2.

Обернені перетворення для напружень і деформацій при цьому мають вигляд:

$$\sigma_i = \sigma'_j q_{ji}; \quad (2.45)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon'_j G_{ji}. \quad (2.46)$$

Таблиця 2.2. Коефіцієнти q_{ij}

i\j	1	2	3	4	5	6
1	$n_{11}n_{11}$	$n_{12}n_{12}$	$n_{13}n_{13}$	$n_{12}n_{11}$	$n_{13}n_{11}$	$n_{12}n_{13}$
2	$n_{21}n_{21}$	$n_{22}n_{22}$	$n_{23}n_{23}$	$n_{22}n_{21}$	$n_{23}n_{21}$	$n_{23}n_{22}$
3	$n_{31}n_{31}$	$n_{32}n_{32}$	$n_{33}n_{33}$	$n_{32}n_{31}$	$n_{33}n_{31}$	$n_{33}n_{32}$
4	$2n_{21}n_{11}$	$2n_{12}n_{22}$	$2n_{13}n_{23}$	$n_{11}n_{22} + n_{12}n_{21}$	$n_{13}n_{21} + n_{11}n_{23}$	$n_{13}n_{22} + n_{12}n_{23}$
5	$2n_{31}n_{11}$	$2n_{32}n_{12}$	$2n_{33}n_{13}$	$n_{31}n_{12} + n_{32}n_{11}$	$n_{33}n_{11} + n_{31}n_{13}$	$n_{33}n_{12} + n_{32}n_{13}$
6	$2n_{31}n_{21}$	$2n_{32}n_{22}$	$2n_{33}n_{23}$	$n_{31}n_{22} + n_{32}n_{21}$	$n_{33}n_{21} + n_{31}n_{23}$	$n_{33}n_{22} + n_{32}n_{23}$

Розглянемо тепер як змінюються пружні сталі при повороті осей координат. Для цього запишемо пружний потенціал в обох системах координат:

$$V = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3 + \sigma_4\varepsilon_4 + \sigma_5\varepsilon_5 + \sigma_6\varepsilon_6); \quad (2.47)$$

$$V = \frac{1}{2}(\sigma'_1\varepsilon'_1 + \sigma'_2\varepsilon'_2 + \sigma'_3\varepsilon'_3 + \sigma'_4\varepsilon'_4 + \sigma'_5\varepsilon'_5 + \sigma'_6\varepsilon'_6) \quad (2.48)$$

і прирівняємо їх. Отримаємо рівність, в ліву частину якої входять складові напружень чи деформацій, віднесені до системи координат x_1, x_2, x_3 , а в праву – ті ж величини для системи координат x'_1, x'_2, x'_3 . Після чого виразимо складові напружень чи деформацій, віднесені до системи координат x_1, x_2, x_3 , через складові напружень чи, відповідно, деформацій для системи координат x'_1, x'_2, x'_3 .

Порівнюючи коефіцієнти при квадратах і добутках складових напружень чи деформацій, віднесених до системи координат x'_1, x'_2, x'_3 в лівій і правій частинах рівності, отримаємо шукані формули для нових пружних сталих – вирази G'_{ij} через G_{ij} чи g'_{ij} через g_{ij} . Загалом вирази виходять доволі громіздкі, однак використовуючи позначення, введені в таблицях 2.1 і 2.2, їх можна записати доволі просто:

$$G'_{im} = G_{jk} Q_{ij} Q_{mk}; \quad (2.49)$$

$$g'_{jk} = g_{li} q_{jl} q_{ki}. \quad (2.50)$$

Обернені перетворення відповідно мають вигляд:

$$G_{kj} = G'_{mi} Q_{ij} Q_{mk}, \quad (2.51)$$

$$g_{im} = g'_{jk} q_{ji} q_{km}. \quad (2.52)$$

Використовуючи ці формули варто пам'ятати, що перший індекс означає номер стрічки в таблицях 2.1 та 2.2, а другий – номер стовпця, і у співвідношеннях (2.49), (2.50) підсумовування відбувається по першому індексу, а у (2.51) та (2.52) – по другому.

Розглянемо детальніше практично важливий варіант ортотропного тіла у двох системах координат, одна з яких отримана з іншої шляхом повороту осей координат на кут Θ навколо третьої осі. У цьому випадку матриця напрямних косинусів має вигляд (2.39), а таблиця 2.2 коефіцієнтів Q_{ij}

i\j	1	2	3	4	5	6
1	$\cos^2 \Theta$	$\sin^2 \Theta$	0	$2 \sin \Theta \cos \Theta$	0	0
2	$\sin^2 \Theta$	$\cos^2 \Theta$	0	$-2 \sin \Theta \cos \Theta$	0	0

3	0	0	1	0	0	0
4	$-\sin \Theta \cos \Theta$	$\sin \Theta \cos \Theta$	0	$\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta$	0	0
5	0	0	0	0	$\cos \Theta$	$-\sin \Theta$
6	0	0	0	0	$\sin \Theta$	$\cos \Theta$

Права частина кожного рівняння (2.49) складається з суми 36 доданків, тому що кожний індекс приймає значення від 1 до 6. Після зведення подібних внаслідок симетричності $G_{ij} = G_{ji}$ кількість пружних сталих скоротиться до 21. Оскільки серед коефіцієнтів Q_{ij} є нульові, кількість доданків ще зменшиться. Нарешті слід врахувати, що в системі координат x_1, x_2, x_3 ненульовими будуть лише дев'ять сталих пружності (для отроетропного тіла в системі координат, яка природно пов'язана з площинами симетрії тіла, маємо 9 незалежних пружних сталих $G_{11}, G_{12}, G_{13}, G_{22}, G_{23}, G_{33}, G_{44}, G_{55}, G_{66}$). Як наслідок пружні сталі в системі координат (x'_1, x'_2, x'_3) , утвореній шляхом повороту осей на кут Θ навколо осі Ox_3 визначаються за формулами:

$$\begin{aligned}
G'_{11} &= G_{11}Q_{11}Q_{11} + G_{12}Q_{11}Q_{12} + G_{13}Q_{11}Q_{13} + G_{21}Q_{12}Q_{11} + G_{22}Q_{12}Q_{12} + G_{23}Q_{12}Q_{13} + \\
&+ G_{31}Q_{13}Q_{11} + G_{32}Q_{13}Q_{12} + G_{33}Q_{13}Q_{13} + G_{44}Q_{14}Q_{14} + G_{55}Q_{15}Q_{15} + G_{66}Q_{16}Q_{16} = \\
&= G_{11} \cos^4 \Theta + 2G_{12} \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta + G_{22} \sin^4 \Theta + 4G_{44} \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta; \\
G'_{22} &= G_{11}Q_{21}Q_{21} + 2G_{12}Q_{21}Q_{22} + G_{22}Q_{22}Q_{22} + G_{44}Q_{24}Q_{24} = \\
&= G_{11} \sin^4 \Theta + 2G_{12} \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta + G_{22} \cos^4 \Theta + 4G_{44} \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta; \\
G'_{33} &= G_{33}; \\
G'_{44} &= G_{11}Q_{41}Q_{41} + 2G_{12}Q_{41}Q_{42} + G_{22}Q_{42}Q_{42} + G_{44}Q_{44}Q_{44} = \\
&= G_{11} \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta - 2G_{12} \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta + G_{22} \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta + G_{44} (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta)^2 \\
&\quad ; \\
G'_{55} &= G_{55}Q_{55}Q_{55} + G_{66}Q_{56}Q_{56} = G_{55} \cos^2 \Theta + G_{66} \sin^2 \Theta; \\
G'_{66} &= G_{55}Q_{65}Q_{65} + G_{66}Q_{66}Q_{66} = G_{55} \sin^2 \Theta + G_{66} \cos^2 \Theta. \\
G'_{12} &= G_{11}Q_{11}Q_{21} + G_{12}Q_{11}Q_{22} + G_{21}Q_{12}Q_{21} + G_{22}Q_{12}Q_{22} + G_{44}Q_{16}Q_{26} =
\end{aligned}$$

$$= G_{11} \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta + G_{12} (\cos^4 \Theta + \sin^4 \Theta) + G_{22} \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta - 4G_{44} \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta$$

;

$$G'_{13} = G_{13} Q_{11} Q_{33} + G_{32} Q_{13} Q_{31} + G_{31} Q_{13} Q_{13} + G_{23} Q_{12} Q_{33} = G_{13} \cos^2 \Theta + G_{23} \sin^2 \Theta;$$

$$G'_{14} = G_{11} Q_{11} Q_{41} + G_{12} Q_{11} Q_{42} + G_{13} Q_{11} Q_{43} + G_{21} Q_{12} Q_{41} + G_{22} Q_{12} Q_{42} + G_{23} Q_{12} Q_{43} +$$

$$+ G_{31} Q_{13} Q_{41} + G_{32} Q_{13} Q_{42} + G_{33} Q_{13} Q_{43} + G_{44} Q_{14} Q_{44} =$$

$$= -G_{11} \sin \Theta \cos^3 \Theta + G_{12} (\cos^3 \Theta \sin \Theta - \sin^3 \Theta \cos \Theta) + G_{22} \sin^3 \Theta \cos \Theta +$$

$$+ 2A_{44} (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta) \sin \Theta \cos \Theta =$$

$$= [G_{22} \sin^2 \Theta - G_{11} \cos^2 \Theta + (2G_{44} + G_{12})(\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta)] \sin \Theta \cos \Theta;$$

$$G'_{15} = 0;$$

$$G'_{16} = 0;$$

$$G'_{23} = G_{13} Q_{21} Q_{33} + G_{32} Q_{23} Q_{31} + G_{31} Q_{23} Q_{13} + G_{23} Q_{22} Q_{33} = G_{13} \sin^2 \Theta + G_{23} \cos^2 \Theta;$$

$$G'_{24} = G_{11} Q_{21} Q_{41} + G_{12} Q_{21} Q_{42} + G_{21} Q_{22} Q_{41} + G_{22} Q_{22} Q_{42} + G_{44} Q_{24} Q_{44} =$$

$$= -G_{11} \cos \Theta \sin^3 \Theta + G_{12} (\sin^3 \Theta \cos \Theta - \cos^3 \Theta \sin \Theta) + G_{22} \cos^3 \Theta \sin \Theta -$$

$$- 2G_{44} (\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta) \sin \Theta \cos \Theta =$$

$$[G_{22} \cos^2 \Theta - G_{11} \sin^2 \Theta - (G_{12} + 2A_{44})(\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta)] \sin \Theta \cos \Theta;$$

$$G'_{25} = 0;$$

$$G'_{26} = 0;$$

$$G'_{34} = G_{31} Q_{33} Q_{41} + G_{32} Q_{33} Q_{42} = (G_{32} - G_{31}) \sin \Theta \cos \Theta;$$

$$G'_{35} = 0;$$

$$G'_{36} = 0;$$

$$G'_{45} = 0;$$

$$G'_{46} = 0;$$

$$G'_{56} = G_{55} Q_{55} Q_{65} + G_{66} Q_{56} Q_{66} = (G_{55} - G_{66}) \cos \Theta \sin \Theta. \quad (2.53)$$

Як бачимо, при такому переході з системи координат x_1, x_3, x_3 в систему координат x'_1, x'_3, x'_3 матриця $[G]$ в новій системі координат має 13 відмінних від нуля коефіцієнтів, тобто. За такого вибору системи координат

ортотропний матеріал в новій системі координат веде себе як тіло з однією площиною симетрії, перпендикулярною до осі Ox_3 .

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & 0 & 0 & 0 \\ G_{12} & G_{22} & G_{23} & 0 & 0 & 0 \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{66} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} G'_{11} & G'_{12} & G'_{13} & G'_{14} & 0 & 0 \\ G'_{12} & G'_{22} & G'_{23} & G'_{24} & 0 & 0 \\ G'_{13} & G'_{23} & G'_{33} & G'_{34} & 0 & 0 \\ G'_{14} & G'_{24} & G'_{34} & G'_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G'_{55} & G'_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G'_{66} \end{bmatrix}$$

Зауважимо, що при повороті координатних осей не навколо однієї осі, а довільним чином, ми отримали б 21 сталу пружності, тобто в новій системі координат ортотропний матеріал вів би себе як цілковито анізотропний.

Перетворення коефіцієнтів g_{ij} до нових осей проходить відповідно до (2.50) аналогічно. У розглядуваному випадку ортотропного тіла при повороті осей координат навколо осі Ox_3 елементи матриці податливості змінюються за такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} g'_{11} &= g_{li}q_{1l}q_{1i} = g_{11}q_{11}q_{11} + g_{12}q_{11}q_{12} + g_{13}q_{11}q_{13} + g_{21}q_{12}q_{11} + g_{22}q_{12}q_{12} + g_{23}q_{12}q_{13} + \\ &+ g_{31}q_{13}q_{11} + g_{32}q_{13}q_{12} + g_{33}q_{13}q_{13} + g_{44}q_{14}q_{14} + g_{55}q_{15}q_{15} + g_{66}q_{16}q_{16} = \\ &g_{11} \cos^4 \Theta + 2g_{12} \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta + g_{22} \sin^4 \Theta + g_{44} \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta; \\ g'_{22} &= g_{li}q_{2l}q_{2i} = g_{11}q_{21}q_{21} + g_{12}q_{21}q_{22} + g_{21}q_{12}q_{22} + g_{22}q_{22}q_{22} + g_{44}q_{24}q_{24} = \\ &g_{11} \sin^2 \Theta + 2g_{12} \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta + g_{22} \cos^2 \Theta + g_{44} \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta; \\ g'_{33} &= g_{33}; \\ g'_{44} &= g_{li}q_{4l}q_{4i} = g_{11}q_{41}q_{41} + g_{12}q_{41}q_{42} + g_{21}q_{42}q_{41} + g_{22}q_{42}q_{42} + g_{44}q_{44}q_{44} = \\ &(g_{11} + g_{22} - 2g_{12})4\sin^2 \Theta \cos^2 \Theta + g_{44}(\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta)^2; \\ g'_{55} &= g_{li}q_{5l}q_{5i} = g_{55}q_{55}q_{55} + g_{66}q_{56}q_{56} = g_{55} \cos^2 \Theta + g_{66} \sin^2 \Theta; \\ g'_{66} &= g_{li}q_{6l}q_{6i} = g_{55}q_{65}q_{65} + g_{66}q_{66}q_{66} = g_{55} \sin^2 \Theta + g_{66} \cos^2 \Theta; \\ g'_{12} &= g_{li}q_{1l}q_{2i} = g_{11}q_{11}q_{21} + g_{12}q_{11}q_{22} + g_{21}q_{12}q_{21} + g_{22}q_{12}q_{22} + g_{44}q_{14}q_{24} = \\ &g_{11} \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta + g_{12}(\sin^4 \Theta + \cos^4 \Theta) + g_{22} \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta - g_{44} \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta; \\ g'_{13} &= g_{li}q_{1l}q_{3i} = g_{13}q_{11}q_{33} + g_{23}q_{12}q_{33} = g_{13} \cos^2 \alpha + g_{23} \sin^2 \alpha; \end{aligned}$$

$$g'_{14} = g_{li}q_{li}q_{4i} = g_{11}q_{11}q_{41} + g_{12}q_{11}q_{42} + g_{21}q_{12}q_{41} + g_{22}q_{12}q_{42} + g_{44}q_{14}q_{44} =$$

$$= [2(g_{22} \sin^2 \Theta - g_{11} \cos^2 \Theta) + (g_{44} + 2g_{12})(\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta)] \cos \Theta \sin \Theta ;$$

$$g'_{15} = 0 ;$$

$$g'_{16} = 0 ;$$

$$g'_{23} = g_{li}q_{2l}q_{3i} = g_{13}q_{21}q_{33} + g_{23}q_{22}q_{33} = g_{13} \sin^2 \alpha + g_{23} \cos^2 \alpha ;$$

$$g'_{24} = g_{li}q_{2l}q_{4i} = g_{11}q_{21}q_{41} + g_{12}q_{21}q_{42} + g_{21}q_{22}q_{41} + g_{22}q_{22}q_{42} + g_{44}q_{24}q_{44} =$$

$$= [2(g_{22} \cos^2 \Theta - g_{11} \sin^2 \Theta) - (g_{44} + 2g_{12})(\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta)] \cos \Theta \sin \Theta ;$$

$$g'_{25} = 0 ;$$

$$g'_{26} = 0 ;$$

$$g'_{34} = g_{li}q_{3l}q_{4i} = g_{32}q_{33}q_{42} + g_{31}q_{33}q_{41} = 2(g_{23} - g_{13}) \cos \Theta \sin \Theta ;$$

$$g'_{35} = 0 ;$$

$$g'_{36} = 0 ;$$

$$g'_{45} = 0 ;$$

$$g'_{46} = 0 ;$$

$$g'_{56} = g_{li}q_{5l}q_{6i} = g_{55}q_{55}q_{65} + g_{66}q_{56}q_{66} = (g_{55} - g_{66}) \cos \Theta \sin \Theta . \quad (2.54)$$

Таблиця 2.1 коефіцієнтів q_{ij} при цьому має вигляд:

i\j	1	2	3	4	5	6
1	$\cos^2 \Theta$	$\sin^2 \Theta$	0	$\sin \Theta \cos \Theta$	0	0
2	$\sin^2 \Theta$	$\cos^2 \Theta$	0	$-\sin \Theta \cos \Theta$	0	0
3	0	0	1	0	0	0
4	$-2 \sin \Theta \cos \Theta$	$2 \sin \Theta \cos \Theta$	0	$\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta$	0	0
5	0	0	0	0	$\cos \Theta$	$-\sin \Theta$
6	0	0	0	0	$\sin \Theta$	$\cos \Theta$

Враховуючи співвідношення переходу для деформацій (2.44), запишемо формули для коефіцієнтів температурного розширення ортотропного тіла. Температурні деформації в ортотропному тілі визначаються трьома коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, тобто

$$\varepsilon_1 = \alpha_1 T, \varepsilon_2 = \alpha_2 T, \varepsilon_3 = \alpha_3 T \quad (2.55)$$

Відповідно до (2.41) тоді

$$\varepsilon'_1 = q_{11}\varepsilon_1 + q_{12}\varepsilon_2 + q_{13}\varepsilon_3 = (\alpha_1 \cos^2 \Theta + \alpha_2 \sin^2 \Theta)T,$$

$$\varepsilon'_2 = q_{21}\varepsilon_1 + q_{22}\varepsilon_2 + q_{23}\varepsilon_3 = (\alpha_1 \sin^2 \Theta + \alpha_2 \cos^2 \Theta)T,$$

звідки

$$\alpha'_1 = \alpha_1 \cos^2 \Theta + \alpha_2 \sin^2 \Theta, \quad (2.56)$$

$$\alpha'_2 = \alpha_1 \sin^2 \Theta + \alpha_2 \cos^2 \Theta, \quad (2.57)$$

$$\alpha'_3 = \alpha_3. \quad (2.58)$$

Аналогічно можемо визначити як змінюються коефіцієнти теплопровідності ортотропного тіла при повороті осей на кут Θ навколо третьої осі, використовуючи формули переходу компонент тензора другого рангу (аналогічно (2.37)):

$$\lambda'_{kl} = \lambda_{ij} n_{ki} n_{lj}, \quad (2.59)$$

Отримаємо

$$\lambda'_{11} = \lambda_{11} n_{11} n_{11} + \lambda_{22} n_{12} n_{12} + \lambda_{33} n_{13} n_{13} = \lambda_{11} \cos^2 \Theta + \lambda_{22} \sin^2 \Theta,$$

$$\lambda'_{22} = \lambda_{11} n_{21} n_{21} + \lambda_{22} n_{22} n_{22} + \lambda_{33} n_{23} n_{23} = \lambda_{11} \sin^2 \Theta + \lambda_{22} \cos^2 \Theta,$$

$$\lambda'_{12} = \lambda_{11} n_{11} n_{21} + \lambda_{22} n_{12} n_{22} + \lambda_{33} n_{13} n_{23} = (\lambda_{22} - \lambda_{11}) \cos \Theta \sin \Theta,$$

$$\lambda'_{13} = \lambda'_{23} = 0; \quad \lambda'_{33} = \lambda_{33}. \quad (2.60)$$

Запишемо приведені співвідношення переходу для елементів матриць пружності та податливості у випадку осесиметричної конструктивної складової тіла за осесиметричних умов навантаження. При цьому x_1, x_2, x_3 – локальна система координат, до якої віднесено конструктивну складову тіла і в якій матеріал має ортотропні властивості; x'_1, x'_2, x'_3 – циліндрична система координат, в якій зручно досліджувати напружено-деформований стан тіла. При цьому між осями x'_1 і x_1 та x'_2 і x_2 маємо кут Θ . Враховуючи розташування компонентів напружень та деформацій у відповідних векторах $\{\varepsilon\}$ і $\{\sigma\}$ та розташування елементів в матриці пружності $[\mathbf{G}]$ маємо:

$$G'_{11} = G_{11} \cos^4 \Theta + G_{22} \sin^4 \Theta + (2G_{12} + 4G_{33}) \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta;$$

$$\begin{aligned}
G'_{22} &= G_{11} \sin^4 \Theta + G_{22} \cos^4 \Theta + (2G_{12} + 4G_{33}) \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta; \\
G'_{33} &= (G_{11} + G_{22} - 2G_{12} - 4G_{33}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + G_{33}; \\
G'_{44} &= G_{44}; \\
G'_{12} &= (G_{11} + G_{22} - 2G_{12} - 4G_{33}) \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta + G_{12}; \\
G'_{13} &= [G_{22} \sin^2 \Theta - G_{11} \cos^2 \Theta + (2G_{33} + G_{12})(\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta)] \sin \Theta \cos \Theta; \\
G'_{14} &= G_{14} \cos^2 \Theta + G_{24} \sin^2 \Theta; \\
G'_{23} &= [G_{22} \cos^2 \Theta - G_{11} \sin^2 \Theta - (2G_{33} + G_{12})(\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta)] \sin \Theta \cos \Theta; \\
G'_{24} &= G_{14} \sin^2 \Theta + G_{24} \cos^2 \Theta; \\
G'_{34} &= (G_{24} - G_{14}) \sin \Theta \cos \Theta; \tag{2.61}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'_{11} &= g_{11} \cos^4 \Theta + 2g_{12} \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta + g_{22} \sin^4 \Theta + g_{33} \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta; \\
g'_{22} &= g_{11} \sin^4 \Theta + 2g_{12} \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta + g_{22} \cos^4 \Theta + g_{33} \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta; \\
g'_{33} &= 4(g_{11} + g_{22} - g_{33} - 2g_{12}) \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta + g_{33}; \\
g'_{44} &= g_{44}; \\
g'_{12} &= (g_{11} + g_{22} - g_{33} - 2g_{12}) \cos^2 \Theta \sin^2 \Theta + g_{12}; \\
g'_{13} &= [2(g_{22} \sin^2 \Theta - g_{11} \cos^2 \Theta) + (g_{33} + 2g_{12})(\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta)] \cos \Theta \sin \Theta; \\
g'_{14} &= g_{14} \cos^2 \Theta + g_{24} \sin^2 \Theta; \\
g'_{24} &= g_{14} \sin^2 \Theta + g_{24} \cos^2 \Theta; \\
g'_{23} &= [2(g_{22} \cos^2 \Theta - g_{11} \sin^2 \Theta) - (g_{33} + 2g_{12})(\cos^2 \Theta - \sin^2 \Theta)] \cos \Theta \sin \Theta; \\
g'_{34} &= 2(g_{24} - g_{14}) \cos \Theta \sin \Theta. \tag{2.62}
\end{aligned}$$

Отримані співвідношення дозволяють визначити значення сталих пружності, податливості, коефіцієнтів теплопровідності та лінійного температурного розширення в довільній ортогональній системі координат, якщо відомі їх значення в локальних системах координат, які природно пов'язані з окремими конструктивними складовими, і в такий спосіб врахувати просторову структуру матеріалу. При цьому ці локальні системи координат можуть бути різні для різних структурних складових.

2.4. Висновки по розділу

У цьому розділі сформульована орієнтована на застосування числових методів математична модель для кількісного опису процесів деформування в структурно неоднорідних тривимірних конструкціях складної форми на основі співвідношень теорії термопружності. Виділено два підходи, пов'язані з використанням рівнянь рівноваги в переміщеннях та варіаційного принципу Лагранжа. Наведено співвідношення для ізотропних, ортотропних і анізотропних матеріалів, а також зв'язки між фізико-механічними характеристиками таких матеріалів в різних ортогональних системах координат.

Запропонований варіант кількісного опису фізико-механічної поведінки структурно-неоднорідних анізотропних твердих тіл за дії силового й температурного навантаження дає можливість врахувати у сукупності термочутливість властивостей матеріалів у всьому діапазоні зміни температури (усі фізико-механічні характеристики залежать від температури), неканонічність геометричної форми тіл (додаткових обмежень на геометричну конфігурацію тіла, за винятком неперервності їх поверхні за Ліпшицем, не накладено) та просторову структуру матеріалу.

Сформульовані співвідношення покладено в основу дослідження процесів деформування термоперетворювачів та захисних оболонок для них за умов їхньої експлуатації.

РОЗДІЛ 3

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

Дослідження напружено-деформованого стану термоперетворювачів складної геометричної форми та структури за допомогою аналітичних підходів є надзвичайно важким. Тому при побудові методики розв'язування сформульованої у розділі 2 квазістатичної задачі термопружності використано відомі, достатньо добре розроблені, універсальні числові методи і підходи [86, 88, 168, 180, 227, 247, 248, 250, 277], які базуються на сумісному використанні методу скінченних елементів (для апроксимації шуканих розв'язків за просторовими координатами) у сукупності з різницевиими алгоритмами апроксимації шуканих розв'язків за часом.

Здатність методу скінченних елементів визначати теплові й механічні поля в реальних складної геометричної форми і структури областях роблять його потужним знаряддям чисельного дослідження термомеханічної поведінки пружних тіл за термосилового навантаження.

У даному розділі відповідно до прийнятої розрахункової схеми, сформульованої в розділі 2, задачу термопружності розв'язуємо за два етапи. На першому етапі, внаслідок проведення стандартної процедури скінчено-елементної дискретизації тіла у варіанті методу зважених залишків [53], нестационарну задачу теплопровідності зводимо до систем звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих значень температури у вузлах скінченно-елементного поділу. Розв'язок отриманих задач Коші побудовано з використанням простих однокрокових багатопараметричних різницевих алгоритмів, відомих в літературі під назвою методу Зенкевича-Вуда [277]. Отримані на першому етапі із розв'язків цієї задачі розподіли температури є вхідними для задачі другого етапу – визначення термонапруженого стану тіла у скінченно-елементній постановці.

Наведені в даному розділі результати опубліковані в роботах [12, 43].

3.1. Співвідношення методу зважених залишків для визначення температури в тілі

Відповідно до запропонованої у розділі 2 розрахункової схеми визначаємо спочатку нестационарне температурне поле в термоперетворювачі за умов, які моделюють експлуатаційні. Запишемо вихідні співвідношення для чисельного розв'язування задачі першого етапу – (2.1), (2.4), (2.5) – визначення температурного поля в термоперетворювачі, який розглядаємо як тривимірне пружне тіло.

Відповідно до вимоги регулярності розв'язку задачі визначають функціональний простір [49]

$$H^1(V) = \left\{ T \in L^2(\Omega), \vec{\nabla} \times T \in L^2(\Omega) \right\},$$

в якому знаходитимемо температуру. Тут

L^2 – простір Лебега;

$H^1(V)$ – простір Соболева інтегрованих з квадратом за Лебегом на V функцій із частковими похідними (в розумінні узагальнених функцій) першого порядку;

$\vec{\nabla}$ – оператор Гамільтона.

Відповідно до стандартної процедури методу зважених залишків [53] домножимо рівняння (2.1), що описує температурне поле у тілі, на довільну ненульову вагову функцію w_0 з функціонального простору $H^1(V)$, і зінтегруємо отримане співвідношення по області визначення. Тоді

$$\int_V \left(c \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - Q \right) w_0 dv = 0 \quad \forall w_0 \in H^1(V). \quad (3.1)$$

Застосуємо до співвідношення (3.1) формулу Остроградського–Гауса, записану в такому вигляді [49, 53, 120]:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) w_0 dv = \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} w_0 \right) dv - \int_V \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial w_0}{\partial x_i} dv. \quad (3.2)$$

Після підстановки співвідношення (3.2) у (3.1) маємо:

$$\int_V \left(c \frac{\partial T}{\partial t} w_0 + \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial w_0}{\partial x_i} - Q w_0 \right) dv - \int_S \left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} w_0 \right) n_i ds = 0 \quad \forall w_0 \in H^1(\Omega). \quad (3.3)$$

З урахуванням умови теплообміну (2.5) в рівнянні (3.3) отримаємо вихідне співвідношення методу зважених залишків

$$\int_V \left(c \frac{\partial T}{\partial t} w_0 + \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial w_0}{\partial x_i} - Q w_0 \right) dv + \int_S (\beta'(T - T_S) + q) w_0 ds = 0 \quad \forall w_0 \in H^1(\Omega), \quad (3.4)$$

що описує температурне поле в розглядуваному тілі.

Співвідношення (3.4) приймаємо за основу при розробці скінченно-елементного підходу до чисельного визначення температури у тілі. Зазначимо, що під час побудови цього співвідношення вже використано крайову умову (2.5). Вона природно виконується для довільної геометричної конфігурації поверхні тіла, неперервної за Ліпшицем.

Зауважимо, що при розгляді кусково-однорідного тіла, що складається з M складових з різними теплофізичними характеристиками, умова рівності теплових потоків природно виконується. Адже внаслідок застосування методу зважених залишків співвідношення (3.3) має вигляд

$$\sum_{k=1}^M \int_{V_k} \left(c \frac{\partial T}{\partial t} w_0 + \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial w_0}{\partial x_i} - Q w_0 \right) dv - \sum_{k=1}^M \int_{S_k} \left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} w_0 \right) n_i ds = 0, \quad (3.5)$$

де V_k – область евклідового простору, зайнята складовою тіла з номером k ; S_k – поверхня області V_k . Частина поверхні S_k може збігатися з частиною зовнішньої поверхні тіла S , а частина S_{kl} – бути поверхнею розділу між підобластю V_k та іншою підобластю V_l тіла з іншими теплофізичними характеристиками. Тоді після застосування формули Остроградського-Гауса для кожної з підобластей тіла у співвідношення (3.5) входять пари

$$\int_{S_{kl}} \left(\left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} w_0 \right) n_i \right)_k ds - \int_{S_{kl}} \left(\left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} w_0 \right) n_i \right)_l ds$$

для частин поверхонь підобластей тіла, які є поверхнями розділу між двома різними підобластями V_k і V_l . Оскільки \mathbf{n} – внутрішня (щодо V_l) нормаль до поверхні S_{kl} біля другого доданку з'являється знак „мінус”. В силу умови (2.7) і довільності вагової функції w_0

$$\int_{S_{ml}} \left(\left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} w_0 \right) n_i \right)_m ds - \int_{S_{ml}} \left(\left(\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} w_0 \right) n_i \right)_l ds = 0$$

З урахуванням умови теплообміну (2.5) рівняння (3.4) для кусково-однорідного тіла набуває вигляду:

$$\sum_{m=1}^M \int_{V_m} \left(c \frac{\partial T}{\partial t} w_0 + \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial w_0}{\partial x_i} - Q w_0 \right) dv + \int_S (\beta'(T - T_S) + q) w_0 ds = 0 \quad \forall w_0 \in H^1(\Omega) \quad (3.6)$$

за умов (2.6) на межі підобластей, які будуть враховані на етапі введення відповідних апроксимацій для шуканої функції T в області V . Так що для кусково-однорідного тіла практично будемо розв'язувати те ж рівняння (3.4) з розривними коефіцієнтами у всій області V .

Співвідношення (3.4) приймаємо за основу при скінченно-елементному підході до числового визначення температури в тілі за взаємодії з навколишнім середовищем. Зазначимо, що при побудові цих співвідношень використані умови (2.5) та (2.7) на межі розділу тіла й середовища. Вони природно виконуються для довільної геометричної конфігурації поверхні тіла, неперервної за Ліпшицем.

Проведемо стандартну процедуру скінченно-елементної дискретизації співвідношень (3.4) за просторовими змінними. Відповідно до концепції методу скінченних елементів подамо тривимірну область V у вигляді об'єднання скінченної кількості n_e підобластей Ω_e , які будемо називати скінченними елементами, так, щоб межі розділу складових з різних матеріалів потрапляли на грані елементів і мали місце такі властивості:

$$1. \quad V = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e ;$$

2. $\forall e: e = 1 \div n_e$ Ω_e – замкнений і множина його внутрішніх точок не є порожньою;
3. $\forall e, m: e = 1 \div n_e; m = 1 \div n_m$ $\overset{\circ}{\Omega}_e \cap \overset{\circ}{\Omega}_m = \emptyset, e \neq m$;
4. $\forall \Omega_e$ його межа $\partial\Omega_e$ неперервна за Ліпшицем;
5. Довільно вибрана грань будь-якого скінченного елемента Ω_e є або підмножиною поверхні області, або межі розділу складових з різних матеріалів, або гранню іншого скінченного елемента Ω_m .

Введемо на кожному скінченному елементі апроксимації шуканої та вагової функцій через їхні значення у вузлах:

$$T = [N]\{T_h\}_e; w_0 = [N]\{w_h^0\}_e, \quad (3.7)$$

де

$[N] = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n]$ – матриця базисних функцій [86, 274] скінченного елемента (n – кількість вузлів елемента);

$\{T_h\}_e = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}^T, \quad \{w_h^0\}_e = \{w_1^0, w_2^0, \dots, w_n^0\}^T$ – значення температури та вагової функції відповідно у вузлах розглядуваного елемента.

Після підстановки апроксимацій (3.7) у співвідношення (3.4) (внаслідок довільності вагових функцій [53]) приходимо до системи звичайних диференціальних рівнянь

$$[\mathbf{L}_1]\{\dot{T}_h(t)\} + [\mathbf{L}_0]\{T_h(t)\} = \mathbf{f}_T, \quad \{T_h(0)\} = T_h^0, \quad (3.8)$$

Матрично-векторні характеристики у співвідношенні (3.8) відносно невідомих значень температури $\{T_h\}$ у вузлах скінченно-елементного поділу розглядуваної області отримуємо шляхом підсумовування відповідних матрично-векторних характеристик окремих скінченних елементів, які знаходимо за такими формулами:

$$[\mathbf{L}_0]^{el} = \int_{\Omega_e} [\partial\mathbf{N}]^T [\lambda] [\partial\mathbf{N}] dv + \int_{S_e} \beta [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] ds; \quad (3.9)$$

$$[\mathbf{L}_1]^{el} = \int_{\Omega_e} c[\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] dv; \quad (3.10)$$

$$\{\mathbf{f}_T\}^{el} = \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^T Q dv + \delta_\beta \int_{S_e} [\mathbf{N}]^T \beta T_S ds - \delta_q \int_{S_e} [\mathbf{N}]^T q ds; \quad (3.11)$$

$$[\lambda] = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} \end{pmatrix}; [\partial \mathbf{N}] = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & \frac{\partial N_3}{\partial x_3} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x_3} \end{pmatrix}; \quad (3.12)$$

$\delta_\beta = 1$ ($\delta_q = 1$) якщо грань елемента збігається з частиною поверхні тіла, на якій задано конвективний теплообмін з довкіллям (тепловий потік), інакше $\delta_\beta = 0$ ($\delta_q = 0$).

Детальніше алгоритм формування матричних характеристик для різних типів скінченних елементів розглянуто у п. 3.4.

Отриману систему звичайних диференціальних рівнянь (3.8) розв'язуємо за допомогою сім'ї однокрокових багатопараметричних алгоритмів [277], які дозволяють виконувати розрахунки зі змінними кроками за часом.

3.2. Розв'язування задачі Коші

Зміну температури у тілі за часом визначаємо покроково. При цьому теплофізичні характеристики матеріалу в момент часу $t_{k+1} = t_k + \Delta t$ ($k = 0, 1, \dots$) визначаємо через відомі значення температури на попередньому кроці за часом (при $t = t_k$; значення температури при $t = 0$ задані початковими умовами).

Розглянемо k -ий крок ($t_{k+1} = t_k + \Delta t$).

Подамо шукану функцію на розглядуваному кроці у вигляді ряду Тейлора із залишковим членом, який визначимо через похідну цієї функції степеня p за часом t ($0 \leq t \leq \Delta t$):

$$\{T_h\} = \sum_{q=0}^{p-1} \{T_h\}_k \frac{t^q}{q!} + \psi_k^{(p)} \frac{t^p}{p!}, \quad (3.13)$$

$$\text{де } \{T_h\}_k^{(q)} = \frac{d^q}{dt^q} \{T_h\}.$$

Зокрема, для методів першого, другого та третього порядків відповідно матимемо розклади:

$$\{T_h\} = \{T_h\}_k + \psi_k^{(1)} t, \quad \{\dot{T}_h\} = \psi_k^{(1)};$$

$$\{T_h\} = \{T_h\}_k + \{\dot{T}_h\}_k t + \psi_k^{(2)} \frac{t^2}{2}, \quad \{\dot{T}_h\} = \{\dot{T}_h\}_k + \psi_k^{(2)} t, \quad \{\ddot{T}_h\} = \psi_k^{(2)};$$

$$\{T_h\} = \{T_h\}_k + \{\dot{T}_h\}_k t + \{\ddot{T}_h\}_k \frac{t^2}{2} + \psi_k^{(3)} \frac{t^3}{6}, \quad \{\dot{T}_h\} = \{\dot{T}_h\}_k + \{\ddot{T}_h\}_k t + \psi_k^{(3)} \frac{t^2}{2},$$

$$\{\ddot{T}_h\} = \{\ddot{T}_h\}_k + \psi_k^{(3)} t.$$

Припустимо, що значення $\{T_h\}_k$, $\{\dot{T}_h\}_k$, $\{\ddot{T}_h\}_k$, ..., $\{T_h\}_k^{(p-1)}$ відомі на початку кроку; $\psi_k^{(p)}$ – невідомий вектор, за допомогою якого значення шуканої функції та її похідних до порядку $p-1$ включно на кінці кроку обчислюємо так:

$$\begin{aligned} \{T_h\}_{k+1} &= \sum_{q=0}^{p-1} \{T_h\}_k \frac{t^q}{q!} + \psi_k^{(p)} \frac{(\Delta t)^p}{p!}, \\ \{\dot{T}_h\}_{k+1} &= \sum_{q=1}^{p-1} \{T_h\}_k \frac{t^{q-1}}{(q-1)!} + \psi_k^{(p)} \frac{(\Delta t)^{p-1}}{(p-1)!}, \\ \{\ddot{T}_h\}_{k+1} &= \sum_{q=2}^{p-2} \{T_h\}_k \frac{t^{q-2}}{(q-2)!} + \psi_k^{(p)} \frac{(\Delta t)^{p-2}}{(p-2)!} \dots \end{aligned} \quad (3.14)$$

Для визначення $\psi_k^{(p)}$ формулюємо відповідне співвідношення методу зважених залишків [53] (домножаємо рівняння на вагову функцію та інтегруємо на розглядуваному часовому проміжку):

$$\int_0^{\Delta t} W([\mathbf{L}_1]\{\dot{T}_h\} + [\mathbf{L}_0]\{T_h\} - \mathbf{f}) dt = 0, \quad (3.15)$$

де W довільна ненульова функція t ($0 \leq t \leq \Delta t$).

Якщо ввести позначення [277]

$$\frac{\int_0^{\Delta t} W t^q dt}{\int_0^{\Delta t} W dt} = \Theta_q \Delta t^q, \quad (3.16)$$

та використати (3.14), то можемо записати:

$$\frac{\int_0^{\Delta t} W \{T_h\} dt}{\int_0^{\Delta t} W dt} = \sum_{q=0}^{p-1} \{T_h\}_k \frac{\Delta t^q}{q!} \Theta_q + \psi_k^{(p)} \frac{\Delta t^p}{p!} \Theta_p, \quad (3.17)$$

$$\frac{\int_0^{\Delta t} W \{\dot{T}_h\} dt}{\int_0^{\Delta t} W dt} = \sum_{q=1}^{p-1} \{T_h\}_k \frac{\Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \Theta_{q-1} + \psi_k^{(p)} \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!} \Theta_{p-1}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\int_0^{\Delta t} W \{\ddot{T}_h\} dt}{\int_0^{\Delta t} W dt} = \sum_{q=2}^{p-1} \{T_h\}_k \frac{\Delta t^{q-2}}{(q-2)!} \Theta_{q-2} + \psi_k^{(p)} \frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!} \Theta_{p-2}, \quad (3.19)$$

$$\frac{\int_0^{\Delta t} W \mathbf{f} dt}{\int_0^{\Delta t} W dt} = \tilde{\mathbf{f}}. \quad (3.20)$$

Розділивши рівняння (3.15) на $\int_0^{\Delta t} W dt$, з урахуванням співвідношень

(3.17) – (3.20) отримуємо рівняння для визначення $\psi_k^{(p)}$:

$$[\mathbf{L}_1] \left(\sum_{q=0}^{p-1} \{T_h\}_k \frac{(\Delta t)^{q-1}}{(q-1)!} \Theta_{q-1} + \psi_k^{(p)} \frac{(\Delta t)^{p-1}}{(p-1)!} \Theta_{p-1} \right) + \\ + [\mathbf{L}_0] \left(\sum_{q=0}^{p-1} \{T_h\}_k \frac{(\Delta t)^q}{q!} \Theta_q + \psi_k^{(p)} \frac{(\Delta t)^p}{p!} \Theta_p \right) - \tilde{\mathbf{f}} = 0.$$

Звідси

$$\left(\frac{(\Delta t)^{p-1}}{(p-1)!} \Theta_{p-1} [\mathbf{L}_1] + \frac{(\Delta t)^p}{p!} \Theta_p [\mathbf{L}_0] \right) \psi_k^{(p)} = \tilde{\mathbf{f}} - [\mathbf{L}_1] \{\dot{T}_h^1\}_{k+1} - [\mathbf{L}_0] \{T_h^1\}_{k+1}. \quad (3.21)$$

де

$$\{T_h^1\}_{k+1} = \sum_{q=0}^{p-1} \{T_h\}_k \frac{\Delta t^q}{q!} \Theta_q, \\ \{\dot{T}_h^1\}_{k+1} = \sum_{q=1}^{p-1} \{T_h\}_k \frac{\Delta t^{q-1}}{(q-1)!} \Theta_{q-1}. \quad (3.22)$$

є певними наближеннями значень $\{T_h\}, \{\dot{T}_h\}$ у момент часу $t_{k+1} = t_k + \Delta t$.

Отже, значення шуканої функції $\{T_h\}$ у момент часу t_{k+1} можна визначити за співвідношеннями (3.13), (3.21), (3.22), використовуючи значення цієї функції та її похідних лише у момент часу t_k (без використання значень функції у попередні моменти часу t_{k-1}, t_{k-2}, \dots). Такі методи називають однокроковими [277]. Істотною перевагою такого підходу є те, що він не вимагає розробки жодних додаткових алгоритмів початку розрахунків. Зокрема, розглянутий однокроковий алгоритм p -го порядку точності для розв'язування задачі Коші повністю визначений, якщо на початку (при $t = 0$) задані значення шуканої функції та її похідних до порядку $p-1$ включно. За таких умов розв'язок розглядуваної задачі визначаємо за три етапи:

1. Обчислюємо значення $\{T_h\}, \{\dot{T}_h\}$ за співвідношеннями (3.13) на основі значень $\{T_h\}_k, \{\dot{T}_h\}_k, \{\ddot{T}_h\}_k, \dots, \{\overset{(q)}{T}_h\}_k$ на початку кроку (при $t = t_k$).
2. Визначаємо $\psi_k^{(p)}$ із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.21).
3. За формулами (3.14) отримуємо значення шуканого розв'язку та його похідних у кінці кроку (при $t = t_{k+1}$).

Після цього повторюємо аналогічні обчислення, але вже на наступному кроці за часом. Похибка обчислень на проміжку $[t_k, t_{k+1}]$ є порядку $O(\Delta t_k^{p+1})$ [277].

Зазначимо, що розглянутий метод розв'язування задачі Коші узагальнює низку відомих методів, які можна отримати як його часткові випадки. Наприклад, для $p=1$, вибираючи відповідно значення параметра Θ , отримуємо добре відомі методи: Кренк–Ніколсон ($\Theta = 0.5$), Гальоркіна ($\Theta = 2/3$), повністю неявну ($\Theta = 1$) чи явну ($\Theta = 0$) схеми [86].

Для методів першого, другого та третього порядків для визначення $\psi_k^{(1)}, \psi_k^{(2)}, \psi_k^{(3)}$ відповідно маємо рівняння:

$$\psi_k^{(1)} = ([\mathbf{L}_1] + \Theta_1 \Delta t [\mathbf{L}_0])^{-1} (\tilde{\mathbf{f}} - [\mathbf{L}_0] \{T_h\}_k); \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \psi_k^{(2)} = & \left(\Theta_1 \Delta t [\mathbf{L}_1] + \Theta_2 \frac{\Delta t^2}{2} [\mathbf{L}_0] \right)^{-1} \times \\ & \times \left(\tilde{\mathbf{f}} - [\mathbf{L}_1] \{\dot{T}_h\}_k - [\mathbf{L}_0] \left(\{T_h\}_k + \{\dot{T}_h\}_k \Theta_1 \Delta t \right) \right); \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \psi_k^{(3)} = & \left(\Theta_2 \frac{\Delta t^2}{2} [\mathbf{L}_1] + \Theta_3 \frac{\Delta t^3}{3!} [\mathbf{L}_0] \right)^{-1} \times \\ & \times \left(\tilde{\mathbf{f}} - [\mathbf{L}_1] \left(\{\dot{T}_h\}_k + \{\ddot{T}_h\}_k \Theta_1 \Delta t \right) - [\mathbf{L}_0] \left(\{T_h\}_k + \{\dot{T}_h\}_k \Theta_1 \Delta t + \{\ddot{T}_h\}_k \Theta_2 \frac{\Delta t^2}{2} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Тож розв'язування задачі Коші (3.8) за алгоритмом першого порядку ($p = 1$) виглядає так. За співвідношенням

$$\{T_h\}_{k+1} = \{T_h\}_k + \{\psi_T\}\Delta t, \quad t_{k+1} = t_k + \Delta t \quad (3.26)$$

визначаємо значення температури у вузлах скінченно-елементного поділу в момент часу $t = t_{k+1}$. У формулі (3.26)

$$\{\psi_T\} = ([\mathbf{L}_1]_{k+1} + \Theta \Delta t [\mathbf{L}_0])^{-1} (\Theta \{\mathbf{f}_T\}_{k+1} + (1 - \Theta) \{\mathbf{f}_T\}_k - [\mathbf{L}_0]_k \{T_h\}_k). \quad (3.27)$$

Так, проходячи крок за кроком, отримуємо історію зміни температури у кожній точці скінченно-елементного поділу тіла. За необхідності на кожному кроці за часом значення теплофізичних характеристик можна ітераційно уточнювати.

3.3. Скінченно-елементні співвідношення задачі термопружності

Виходячи із запропонованої розрахункової схеми, параметри, які характеризують напружено-деформований стан тіла, визначаємо на другому етапі розв'язування задачі з умови мінімуму функціоналу Лагранжа (2.26) на множині переміщень (2.27).

З огляду на виконане скінченно-елементне подання області, функціонал енергії пружної деформації (2.26) перепишемо у вигляді суми поелементних вкладів, тобто

$$\Pi(\mathbf{u}) = \sum_{e=1}^{n_e} \Pi_e(\mathbf{u}). \quad (3.28)$$

Тут

$$\begin{aligned} \Pi_e(\mathbf{u}) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \mathbf{u}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{G}] [\mathbf{B}] \mathbf{u} \, dV - \int_{\Omega_e} \mathbf{u}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{G}] [\mathbf{B}] \{\varepsilon^{(0)}\} \, dV + \\ & + \int_{\Omega_e} \{\varepsilon^{(0)}\}^T [\mathbf{G}] \{\varepsilon^{(0)}\} \, dV - \int_{\Omega_e} \mathbf{u}^T \mathbf{F} \, ds - \int_{S_\sigma^e} \mathbf{u}^T \mathbf{p} \, ds \end{aligned} \quad (3.29)$$

Введемо на кожному елементі апроксимації переміщень

$$\mathbf{u} = [\mathbf{N}]\mathbf{q}^{el}, \quad (3.30)$$

де

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} - \quad (3.31)$$

матриця базисних функцій елемента, найчастіше поліномів того чи іншого порядку;

$\mathbf{q} = (u_1^1, u_2^1, u_3^1, u_1^2, u_2^2, u_3^2, \dots, u_1^n, u_2^n, u_3^n)^T$ – вектор невідомих коефіцієнтів розкладу переміщень за допомогою базисних функцій; n – кількість опорних точок в межах елемента, які, як правило, називають вузлами (див. рис. 3.1). Базисні функції зазвичай вибирають такими, що ці коефіцієнти розкладу переміщень є значеннями шуканої функції у відповідному вузлі [86].

Найчастіше при розв'язуванні тривимірних задач використовують скінченні елементи у вигляді тетраедрів з лінійною апроксимацією переміщень в межах елемента, оскільки існують універсальні алгоритми, що дозволяють автоматично отримувати скінченно-елементні поділи для областей практично довільної складності. Однак точність отриманих розв'язків за такого підходу є надзвичайно низькою [209], і вона катастрофічно погіршується при використанні витягнутих елементів зі співвідношення ребер більшим, ніж 1:2. Тому для побудови досить точних розв'язків виникає потреба використовувати скінченні елементи з апроксимацією шуканих розв'язків вищого порядку. До того ж такі елементи краще апроксимують конструкції з криволінійними поверхнями.

Після підсумовування вкладів кожного зі скінченних елементів повна потенційна енергія

$$\Pi(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T [\mathbf{K}] \cdot \mathbf{Q} - \mathbf{Q}^T \mathbf{f}, \quad (3.32)$$

де \mathbf{Q} – глобальний вектор вузлових переміщень тіла (всі компоненти переміщень послідовно пронумерованих вузлів скінченно-елементного поділу конструкції);

$[\mathbf{K}]$ і \mathbf{f} – матриця жорсткості і вектор навантаження, одержувані шляхом підсумовування відповідних матрично-векторних характеристик окремих елементів, які набувають вигляду

$$[\mathbf{K}^{el}] = \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{G}] [\mathbf{B}] [\mathbf{N}] dV, \quad (3.33)$$

$$\mathbf{f}^{el} = \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{G}] \{\varepsilon^{(0)}\} dV + \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^T \mathbf{F} ds + \int_{S_\sigma^e} [\mathbf{N}]^T \mathbf{p} ds. \quad (3.34)$$

Використовуючи необхідну умову мінімуму потенційної енергії (3.32), приходимо до рівнянь рівноваги

$$[\mathbf{K}] \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{f}. \quad (3.35)$$

у скінченно-елементному формулюванні.

Таким чином, завдання визначення вектора переміщень розглядуваного тіла зведена до розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.35) з матрицею жорсткості $[\mathbf{K}]$, вектором навантаження \mathbf{f} і вектором \mathbf{Q} невідомих вузлових переміщень тіла. Після розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь (3.35) напруження в межах довільного елемента Ω_e обчислюємо, використовуючи формулу

$$\{\sigma\} = [\mathbf{G}] ([\mathbf{B}][\mathbf{N}]\mathbf{q}_{(e)} - \{\varepsilon^{(0)}\}_e). \quad (3.36)$$

3.4. Обчислювальні аспекти формування матрично-векторних характеристик

Можливості обчислювальних комплексів розв'язування задач на основі методу скінченних елементів багато в чому визначають ті скінченні елементи, за допомогою яких розв'язують задачу. У роботі використано ізопараметричні скінченні елементи, побудовані на основі інтерполяційних поліномів сириндипової сім'ї [274].

Розглянемо тривимірні ізопараметричні скінченні елементи з вісьмома, двадцятьма та тридцятьма двома вузлами (див. рис. 3.1).

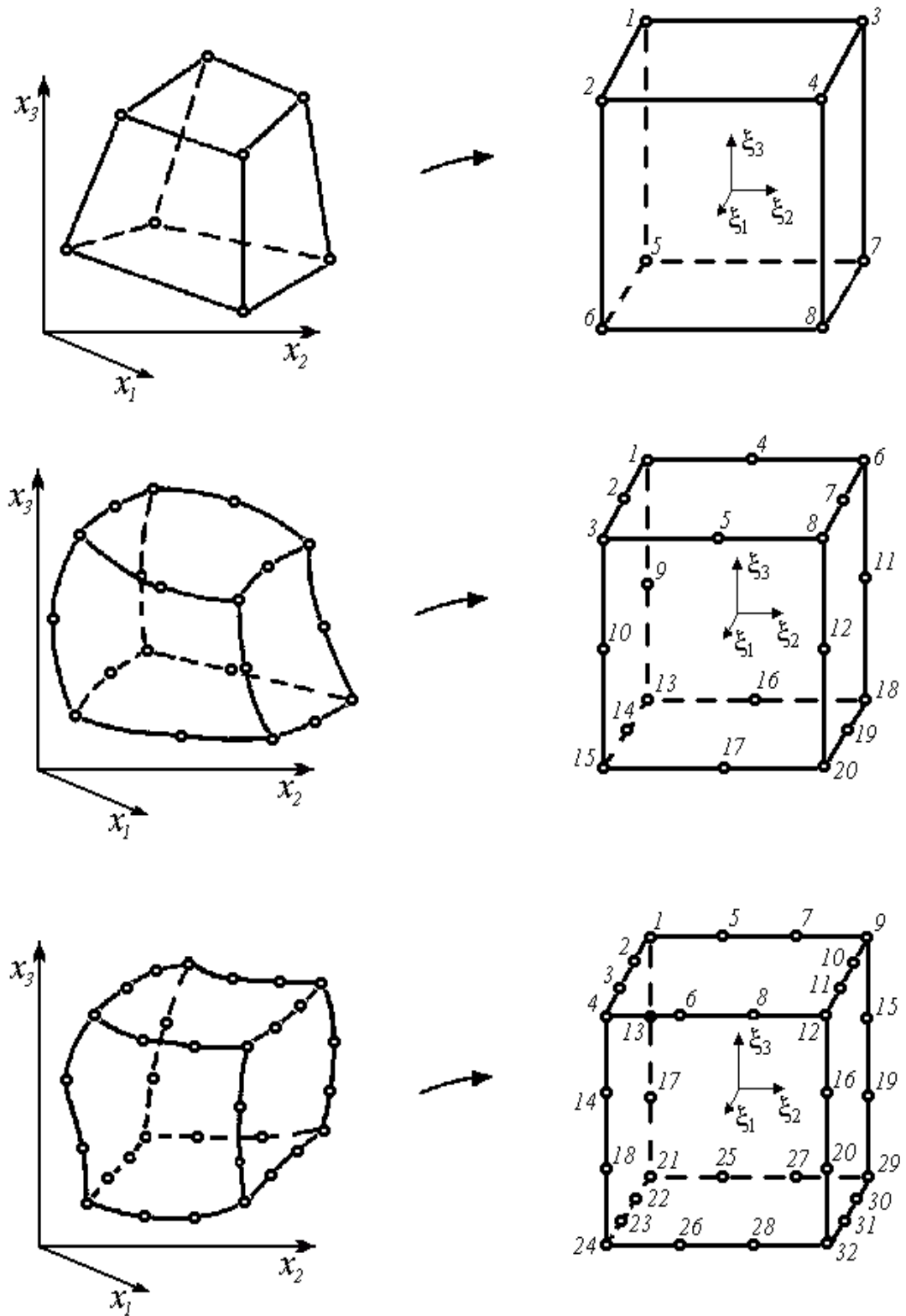


Рис. 3.1. Тривимірні скінченні елементи і порядок локальної нумерації вузлів

Базисні функції, які одночасно є функціями форми цих елементів (позаяк з використанням цих функцій описують також форму елементів) мають вигляд

$$N_i = (1 + \xi_1 \xi_1^{(i)})(1 + \xi_2 \xi_2^{(i)})(1 + \xi_3 \xi_3^{(i)})/8, \quad i = 1 \div 8$$

для елемента з вісьмома вузлами;

$$N_i = (1 + \xi_1 \xi_1^{(i)})(1 + \xi_2 \xi_2^{(i)})(1 + \xi_3 \xi_3^{(i)})(\xi_1 \xi_1^{(i)} + \xi_2 \xi_2^{(i)} + \xi_3 \xi_3^{(i)} - 2) / 8,$$

$$i = 1, 3, 6, 8, 13, 15, 18, 20;$$

$$N_i = (1 + \xi_1 \xi_1^{(i)})(1 + \xi_2 \xi_2^{(i)})(1 + \xi_3 \xi_3^{(i)}) \times \\ \times (1 - (\xi_1 \xi_2^{(i)} \xi_3^{(i)})^2 - (\xi_2 \xi_1^{(i)} \xi_3^{(i)})^2 - (\xi_3 \xi_2^{(i)} \xi_1^{(i)})^2) / 4$$

$$i = 2, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 17, 19$$

для елемента з двадцятьма вузлами;

$$N_i = (1 + \xi_1 \xi_1^{(i)})(1 + \xi_2 \xi_2^{(i)})(1 + \xi_3 \xi_3^{(i)})(9\xi_3^2 + 9\xi_2^2 + 9\xi_1^2 - 19) / 64$$

$$i = 1, 4, 9, 12, 21, 24, 30, 32,$$

$$N_i = 9(1 - \xi_1^2)(1 + 9\xi_1 \xi_1^{(i)})(1 + \xi_2 \xi_2^{(i)})(1 + \xi_3 \xi_3^{(i)}) / 64 \quad i = 5, 6, 7, 8, 25, 26, 27, 28,$$

$$N_i = 9(1 - \xi_2^2)(1 + 9\xi_2 \xi_2^{(i)})(1 + \xi_1 \xi_1^{(i)})(1 + \xi_3 \xi_3^{(i)}) / 64 \quad i = 2, 3, 10, 11, 22, 22, 30, 31,$$

$$N_i = 9(1 - \xi_3^2)(1 + 9\xi_3 \xi_3^{(i)})(1 + \xi_1 \xi_1^{(i)})(1 + \xi_2 \xi_2^{(i)}) / 64 \quad i = 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$$

для елемента з тридцятьма двома вузлами, де $\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \xi_3^{(i)}$ – координати i -го вузла елемента в локальній системі координат.

Враховуючи порядок інтерполяційних поліномів N_i , розглянуті елементи називають відповідно білінійними, біквадратичними й бікубічними.

Для розв'язування осесиметричних і плоских задач маємо аналогічні двовимірні білінійні (4 вузли), біквадратичні (8 вузлів), бікубічні (12 вузлів) елементи (див. рис 3.2).

Функції форми двовимірних елементів мають вигляд:

$$N_i = (1 + \xi_1 \xi_1^{(i)})(1 + \xi_2 \xi_2^{(i)}) / 4, \quad i = 1 \div 4$$

для білінійного;

$$N_i = (1 + \xi_1 \xi_1^{(i)})(1 + \xi_2 \xi_2^{(i)})(\xi_1 \xi_1^{(i)} + \xi_2 \xi_2^{(i)} - 1) / 4, \quad i = 1, 3, 5, 7;$$

$$N_i = (1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2 \xi_2^{(i)}) / 2, \quad i = 2, 6;$$

$$N_i = (1 - \xi_2^2)(1 + \xi_1 \xi_1^{(i)}) / 2, \quad i = 4, 8$$

біквдратичного;

$$N_i = (1 + \xi_1 \xi_1^{(i)})(1 + \xi_2 \xi_2^{(i)})(9\xi_1^2 + 9\xi_2^2 - 10)/32, \quad i = 1, 4, 7, 10;$$

$$N_i = 9(1 + \xi_1 \xi_1^{(i)})(1 + 9\xi_2 \xi_2^{(i)})(1 - \xi_2^2)/32, \quad i = 5, 6, 11, 12;$$

$$N_i = 9(1 + \xi_2 \xi_2^{(i)})(1 + 9\xi_1 \xi_1^{(i)})(1 - \xi_1^2)/32, \quad i = 2, 3, 8, 9$$

бікубічного елементів.

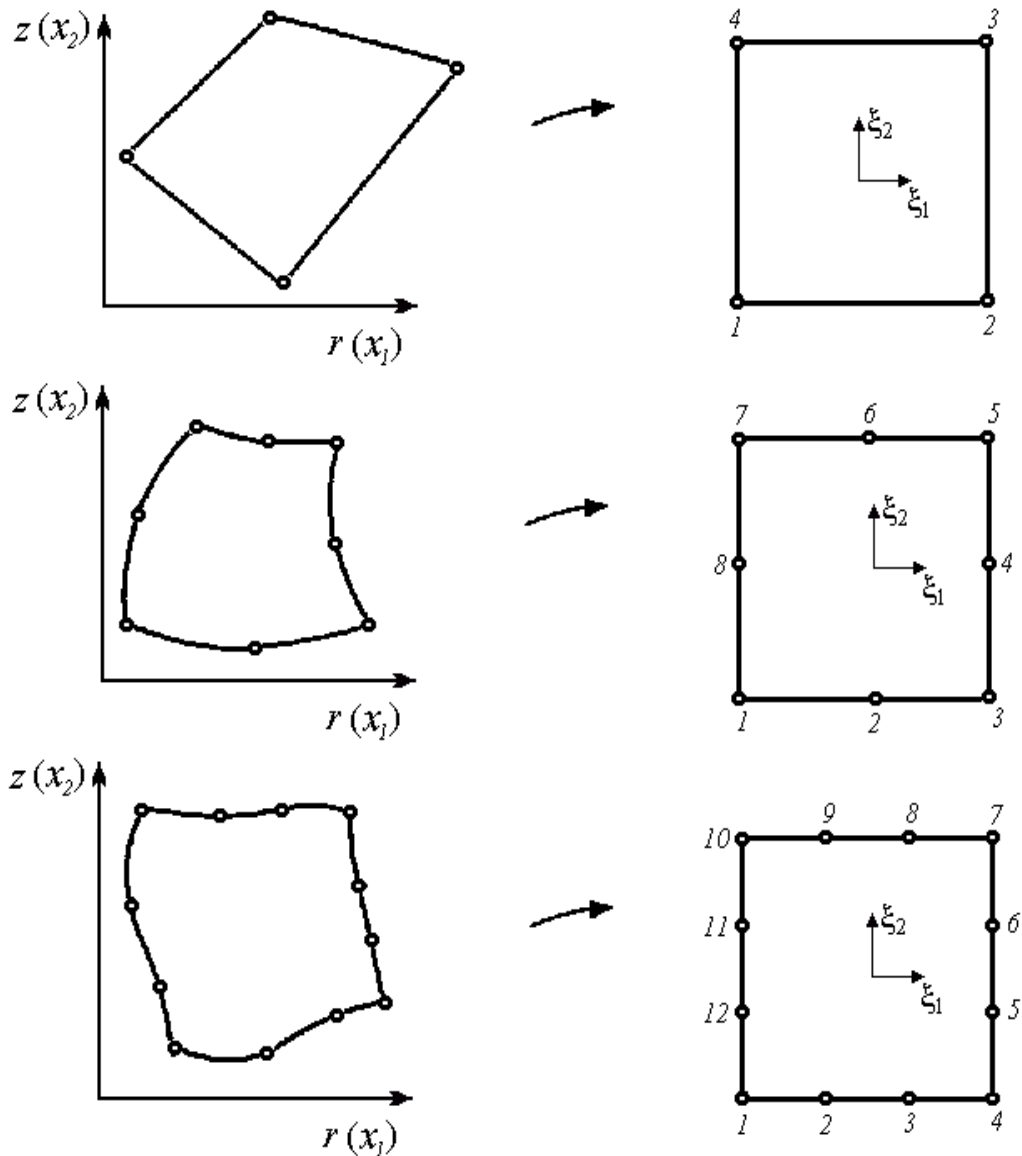


Рис. 3.2. Двовимірні ізопараметричні скінченні елементи

Слід зазначити, що з погляду компромісу двох взаємосуперечливих критеріїв (обсягу обчислень і необхідної точності розрахунків) найкраще зарекомендували себе біквдратичні ізопараметричні елементи. Білінійні елементи є менш точними і надто приблизно описують криволінійні границі.

Тому виникає необхідність використовувати занадто густі поділи областей на скінченні елементи. Бікубічні елементи точніші, однак збільшується також і час формування матричних характеристик елементів.

Розглянемо детальніше алгоритм формування матричних характеристик для різних типів скінченних елементів.

Внаслідок використання методу скінченних елементів і сімейства простих багатопараметричних алгоритмів отримуємо систему алгебричних рівнянь на зразок (3.23), (3.24), (3.25). Більша частина комп'ютерного часу при застосуванні такого підходу йде на формування і розв'язання цих систем, причому час формування матрично-векторних характеристик таких систем сумірний з часом їх розв'язування. Оскільки на кожному кроці за часом виникає потреба будувати та розв'язувати такі системи, особливу увагу необхідно приділити алгоритмам формування відповідних матриць цих систем і наступного їх розв'язування. Тому розглянемо основні обчислювальні аспекти реалізації методу скінченних елементів, які дають можливість істотно скоротити обсяги обчислювальної роботи на кожному кроці за часом.

При числовій реалізації в основу покладено ізопараметричні скінченні елементи. Формувати основні матричні характеристики таких елементів зручно в криволінійних локальних координатах (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , область зміни яких у тривимірному випадку є кубом: $\Omega_0 = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T : |\xi_i| \leq 1, i = 1 \div 3\}$. За такого підходу перетворення між глобальними (x_1, x_2, x_3) і локальними координатами елемента (ξ_1, ξ_2, ξ_3) задаємо за допомогою тих же функцій форми $N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, що і апроксимацію шуканих розв'язків (концепція ізопараметричності), а саме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cdot \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ x_3^{(i)} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

чи у матричному вигляді

$$\mathbf{r} = [N] \tilde{\mathbf{r}}, \quad (3.38)$$

де $[N] = [N_1, N_2, \dots, N_n]$ – матриця функцій форми;

$$\tilde{\mathbf{r}} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_3^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, x_3^{(2)}, \dots, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)})^T \quad \text{– вектор координат}$$

вузлів елемента; n – кількість вузлів елемента.

Співвідношення між частинними похідними першого порядку в розглядуваних системах координат встановлює матриця Якобі перетворення (3.37):

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad (3.39)$$

або у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{pmatrix} = [\mathbf{J}] \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}; \quad J_{kj} = \frac{\partial x_k}{\partial \xi_j}. \quad (3.40)$$

Елементи матриці Якобі обчислюємо за допомогою співвідношень (3.40). При цьому всі похідні у виразах для матричних характеристик окремих скінченних елементів можуть бути виражені через похідні в локальній системі координат елемента оберненим щодо (3.40) перетворенням:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \end{pmatrix}. \quad (3.41)$$

Враховуючи, що елементи об'єму dv та поверхні ds в локальній системі координат скінченного елемента набувають вигляду

$$dv = \det[\mathbf{J}] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (3.42)$$

$$ds = \sqrt{G_1 G_2 - G_{12}^2} d\xi_1 d\xi_2, \quad (3.43)$$

отримуємо матрично-векторні характеристики

$$\begin{aligned}
[\mathbf{L}_0]^{el} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\partial \mathbf{N}]^T [\lambda] [\partial \mathbf{N}] \det[\mathbf{J}] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 + \\
&+ \delta_\beta \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \beta [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] \sqrt{G_1 G_2 - G_{12}^2} d\xi_1 d\xi_2,
\end{aligned} \tag{3.44}$$

$$[\mathbf{L}_1]^{el} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 c [\mathbf{N}]^T [\mathbf{N}] \det[\mathbf{J}] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{f}_T\}^{el} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Q [\mathbf{N}]^T \det[\mathbf{J}] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 - \delta_q \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q [\mathbf{N}]^T \sqrt{G_1 G_2 - G_{12}^2} d\xi_1 d\xi_2 + \\
&+ \delta_\beta \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \beta T_S [\mathbf{N}]^T \sqrt{G_1 G_2 - G_{12}^2} d\xi_1 d\xi_2,
\end{aligned} \tag{3.46}$$

де

$\det[\mathbf{J}]$ – визначник матриці Якобі перетворення (3.37);

$$G_1 = \sum_{k=1}^3 J_{1k}^2, \quad G_2 = \sum_{k=1}^3 J_{2k}^2, \quad G_{12} = \sum_{k=1}^3 J_{1k} J_{2k} \quad (\xi_3 = -1).$$

Як бачимо, при формуванні матричних характеристик окремих елементів виникає необхідність обчислення інтегралів по області елемента чи його поверхні. Внаслідок складності підінтегральних виразів, якими для викривлених елементів разом з поліномами можуть бути раціональні та ірраціональні функції, ці інтеграли неможливо обчислити аналітично в замкненому вигляді. Тому інтегрування виконуємо чисельно. Збіжність розв'язків при цьому зберігається, якщо об'єм скінченного елемента

$$\int_{\Omega_e} dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \det[\mathbf{J}] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3$$

обчислюється точно [274].

Як правило, числове інтегрування виконують з використанням квадратурних формул Гауса, згідно з якими

$$\int_{-1}^1 \phi(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^m w_i^{(m)} \phi(\xi_i^{(m)}), \tag{3.47}$$

де $\xi_i^{(m)}$, $w_i^{(m)}$ - відповідно опорні точки та вагові коефіцієнти числового інтегрування; m - кількість точок, необхідна для адекватного обчислення інтегралу.

Подвійні та потрійні інтеграли обчислюють на основі послідовного застосування цих формул для одновимірних інтегралів, а саме:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} w_i^{(m_1)} w_j^{(m_2)} \phi(\xi_i^{(m_1)}, \xi_j^{(m_2)}); \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \\ & = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{k=1}^{m_3} w_i^{(m_1)} w_j^{(m_2)} w_k^{(m_3)} \phi(\xi_i^{(m_1)}, \xi_j^{(m_2)}, \xi_k^{(m_3)}). \end{aligned} \quad (3.49)$$

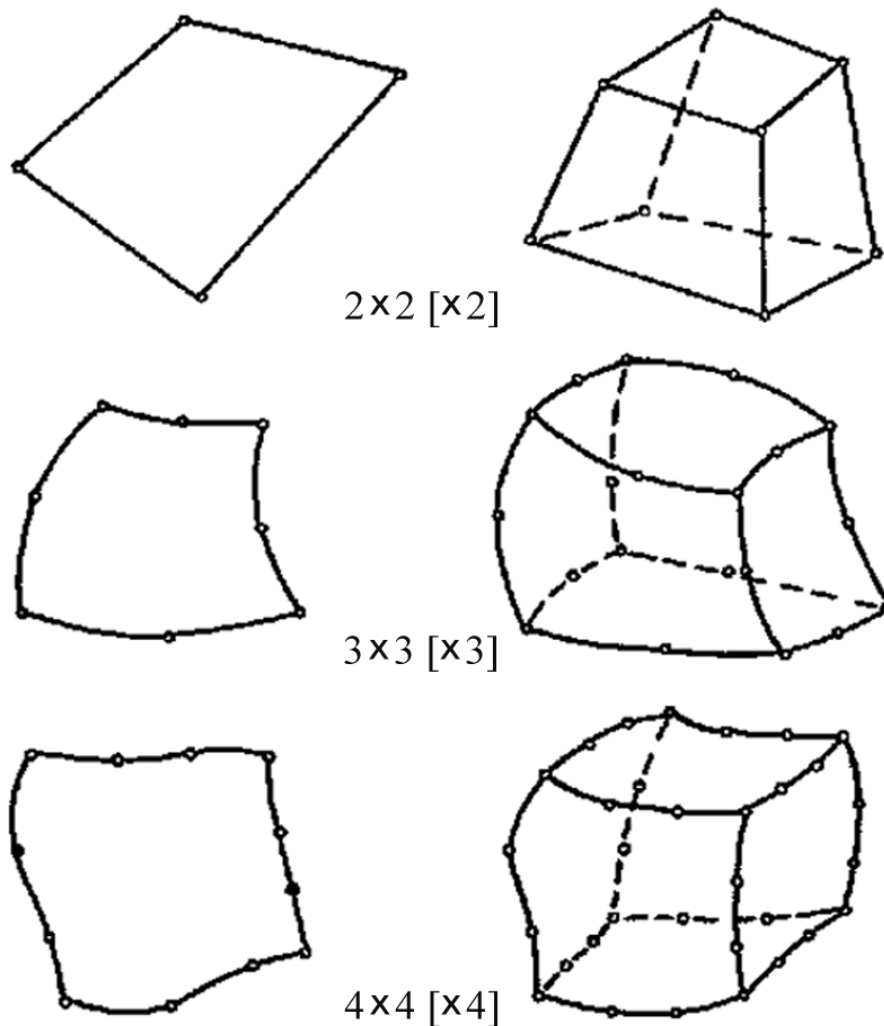


Рис. 3.3. Оптимальні кількості точок інтегрування для формул Гауса

На рис. 3.3 приведено оптимальні кількості точок інтегрування по кожній із змінних для квадратурних формул Гауса, а в таблиці 3.1 вказані відповідні координати точок інтегрування $\xi^{(m)}$ і значення вагових коефіцієнтів $w^{(m)}$. Зокрема, бачимо, що для формування матриці теплопровідності тривимірного білінійного, біквадратичного та бікубічного ізопараметричних елементів необхідно 8 (2x2x2), 27 (3x3x3) та 64 (4x4x4) рази відповідно обчислити матрицю розмірності 8x8 (8 вузлів), 20x20 (20 вузлів) чи 32x32 (32 вузли) і, помноживши кожен з них на відповідний ваговий коефіцієнт, підсумувати в матрицю теплопровідності елемента. Тому велику практичну цінність мають квадратурні формули з меншою кількістю точок інтегрування при збереженні точності обчислення інтегралів.

Таблиця 3.1

m	$w_i^{(m)}$	$\xi_i^{(m)}$
2	1,0000000	$\pm 0,577350269$
3	0,5555556 0,8888889	$\pm 0,77456669,$ 0,000000000
4	0,3478548451 0,6521451548625	$\pm 0,86113631159,$ $\pm 0,33998104358$

Однією з таких спеціальних формул є [77]

$$\int_{\Omega_0} \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = A \sum_1^{2^m} \phi(\pm a, \dots, \pm a) + B \sum_1^{2m} \phi(0, \dots, 0, \pm b, 0, \dots, 0), \quad (3.50)$$

де Ω_0 – одиничний гіперкуб з центром симетрії в початку координат m – вимірному простору;

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$ – точка гіперкуба;

$$A = \frac{(5m-4)^2}{(5m+4)^2}; \quad B = \frac{5 \cdot 2^{m+3}}{(5m+4)^2}; \quad a = \sqrt{\frac{5m+4}{3(5m-4)}}; \quad b = \sqrt{\frac{5m+4}{30}}.$$

Кількість точок тут практично удвічі менша, ніж при використанні формул Гауса (координати точок числового інтегрування у локальній системі

координат і відповідні вагові коефіцієнти для біквадратичного скінченного елемента за формулою (3.50) подано у таблиці 3.2) – 14 замість 27.

При обчисленні матриць теплопровідності та теплоємності, а також векторів правих частин при скінченно-елементному синтезі необхідно мати значення теплофізичних характеристик матеріалів у точках інтегрування скінченного елемента. Аналітичні подання залежностей характеристик матеріалів від температури дають задовільну апроксимацію вихідних кривих, як правило, не у всьому діапазоні зміни аргументу і лише для певних класів матеріалів. Тому разом із цими способами апроксимації характеристик матеріалів використовують загальніший підхід, згідно з яким одним аналітичним виразом апроксимується не вся крива, а лише її частина – окіл точки, в якій в даний момент нас цікавлять характеристики. На кривих, що описують термомеханічну поведінку матеріалу залежно від температури, вибираємо достатню кількість опорних точок, між якими вихідну криву наближаємо інтерполяційними сплайнами (у найпростішому випадку – прямою лінією).

Таблиця 3.2

i	$\xi_1^{(i)}$	$\xi_2^{(i)}$	$\xi_3^{(i)}$	w_i
1	-0,7587869	-0,7587869	-0,7587869	1,0000000
2	-0,7587869	-0,7587869	+0,7587869	1,0000000
3	-0,7587869	+0,7587869	-0,7587869	1,0000000
4	-0,7587869	+0,7587869	+0,7587869	1,0000000
5	+0,7587869	-0,7587869	-0,7587869	1,0000000
6	+0,7587869	-0,7587869	+0,7587869	1,0000000
7	+0,7587869	+0,7587869	-0,7587869	1,0000000
8	+0,7587869	+0,7587869	+0,7587869	1,0000000
9	-0,7958224	0,0000000	0,0000000	0,8864266
10	+0,7958224	0,0000000	0,0000000	0,8864266
11	0,0000000	-0,7958224	0,0000000	0,8864266
12	0,0000000	+0,7958224	0,0000000	0,8864266

13	0,0000000	0,0000000	- 0,7958224	0,8864266
14	0,0000000	0,0000000	+ 0,7958224	0,8864266

При формуванні загальної системи скінченно-елементних рівнянь ми послідовно проходимо елемент за елементом і для кожного елемента будемо матрично-векторні характеристики, які підсумовуємо в глобальні матриці і вектори.

Послідовне застосування розглянутої методології скінченно-елементної дискретизації до мінімізації функціоналу (2.26) зводить задачу про визначення полів переміщень до системи алгебричних рівнянь (3.35) відносно глобального вектора \mathbf{Q} переміщень вузлів скінченно-елементного поділу тіла, де глобальна матриця жорсткості $[\mathbf{K}]$ і вектор правих частин \mathbf{f} формуємо через підсумовування матрично-векторних характеристик окремих скінченних елементів:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}^{el}] &= \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{G}] [\mathbf{B}] [\mathbf{N}] dv = \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([\mathbf{B}_\xi][\mathbf{N}])^T [\mathbf{G}] [\mathbf{B}_\xi][\mathbf{N}] \det[\mathbf{J}] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 ; \quad (3.51)
\end{aligned}$$

$$\mathbf{f}^{el} = \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{G}] \{\varepsilon^{(0)}\} dV + \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}]^T \mathbf{F} ds + \int_{S_\sigma^e} [\mathbf{N}]^T \mathbf{p} ds =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 ([\mathbf{B}_\xi][\mathbf{N}])^T [\mathbf{G}] \{\varepsilon^{(0)}\} \det[\mathbf{J}] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{N}]^T \mathbf{F} \det[\mathbf{J}] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 + \\
&\quad + \delta_p \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{N}]^T \mathbf{p} \sqrt{G_1 G_2 - G_{12}^2} d\xi_1 d\xi_2 ; \quad (3.52)
\end{aligned}$$

—

$$\mathbf{q} = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)}, u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, u_3^{(2)}, \dots, u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)})^T ;$$

$\det[\mathbf{J}]$ – визначник матриці Якобі перетворення (3.37);

$$G_1 = \sum_{k=1}^3 J_{1k}^2, \quad G_2 = \sum_{k=1}^3 J_{2k}^2, \quad G_{12} = \sum_{k=1}^3 J_{1k} J_{2k} ;$$

$$[\mathbf{N}] = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_n \end{pmatrix};$$

$\delta_p = 1$ якщо грань елемента збігається з частиною поверхні тіла, на якій задано поверхневе навантаження, інакше $\delta_p = 0$.

Зазначимо, що тут використовуються ті ж ізопараметричні скінченні елементи, що й при дослідженні процесів теплопровідності, а при обчисленні матрично-векторних характеристик елементів застосовано числове інтегрування. Враховуючи, що у кожному вузлі в наявності три компоненти вектора переміщень, загальна кількість ступенів вільності використовуваних елементів утричі більша, ніж при дослідженні процесів теплопровідності (24 – в білінійного, 60 – у біквадратичного, 92 – у бікубічного скінченного елемента).

З огляду на зазначене обчислення інтегралів зводиться до підсумовування значень підінтегральних виразів у точках числового інтегрування елемента. Іншими словами

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}_\xi \mathbf{N}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_\xi \mathbf{N}] \det[\mathbf{J}] d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 = \\ & = \sum_{l=1}^L v_l ([\mathbf{B}_\xi \mathbf{N}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}_\xi \mathbf{N}] \det[\mathbf{J}]) \Big|_{(\xi_1^l, \xi_2^l, \xi_3^l)}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

де L – кількість точок $(\xi_1^l, \xi_2^l, \xi_3^l)$ числового інтегрування,

v_l – вагові коефіцієнти числового інтегрування.

Алгоритм обчислення матриці жорсткості скінченного елемента можна подати у вигляді такої послідовності кроків:

1. Відкриваємо цикл за точками числового інтегрування: $l = 0$.
2. $l = l + 1$; якщо $l < L$ визначаємо якобіан перетворення координат (3.37) у точці числового інтегрування з номером l :

$$J_{jk}(\xi_1^l, \xi_2^l, \xi_3^l) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi_1^l, \xi_2^l, \xi_3^l)}{\partial \xi_j} x_k^{(i)}, \quad j, k = 1, 2, 3.$$

3. Обчислюємо визначник і елементи оберненого якобіану:

$$J_{11}^{-1} = J_{22}J_{33} - J_{23}J_{32},$$

$$J_{12}^{-1} = J_{13}J_{32} - J_{12}J_{33},$$

$$J_{13}^{-1} = J_{12}J_{23} - J_{22}J_{13},$$

$$J_{21}^{-1} = J_{23}J_{31} - J_{21}J_{33},$$

$$J_{22}^{-1} = J_{11}J_{33} - J_{13}J_{31},$$

$$J_{23}^{-1} = J_{21}J_{13} - J_{11}J_{23},$$

$$J_{31}^{-1} = J_{21}J_{32} - J_{22}J_{31},$$

$$J_{32}^{-1} = J_{12}J_{31} - J_{11}J_{32},$$

$$J_{33}^{-1} = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21};$$

$$\det[J] = J_{11}J_{11}^{-1} + J_{12}J_{21}^{-1} + J_{13}J_{31}^{-1},$$

$$J_{ij}^{-1} = \frac{J_{ij}^{-1}}{\det[J]}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

4. За наявності елементів оберненого якобіану обчислюємо похідні функцій форми у глобальних координатах (x_1, x_2, x_3) через похідні цих функцій у локальних координатах (ξ_1, ξ_2, ξ_3) :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} & J_{13}^{-1} \\ J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} & J_{23}^{-1} \\ J_{31}^{-1} & J_{32}^{-1} & J_{33}^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \end{pmatrix}.$$

5. І визначаємо матрицю $[\mathbf{B}_\xi \mathbf{N}]$ розмірності $6 \times N_s$, де $N_s = 3 \cdot n$ – кількість ступенів вільності елемента (у кожному з вузлів використовуваного просторового ізопараметричного скінченного елемента маємо три невідомі компоненти вектора переміщень). Наприклад, при використанні білінійних

(біквдратичних, бікубічних) ізопараметричних елементів розмірність матриці $[\mathbf{B}_\xi \mathbf{N}]$ рівна 6×24 ($6 \times 60, 6 \times 96$).

Фактично обчислюємо матрицю такої структури:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x_3} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} & \frac{\partial N_n}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial N_n}{\partial x_3} & \frac{\partial N_n}{\partial x_2} \end{bmatrix}.$$

6. Далі отримуємо матрицю $[\mathbf{A}]$ розмірності $N_s \times N_s$, перемножуючи матриці $[\mathbf{B}_\xi \mathbf{N}]^T$ (розмірності $N_s \times 6$), $[\mathbf{G}]$ (розмірності 6×6) та $[\mathbf{B}_\xi \mathbf{N}]$ (розмірності $6 \times N_s$), обчислюючи лише діагональні елементи та елементи над діагоналлю (матриця симетрична). Алгоритм цього множення можна записати в такій послідовності:

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^6 G_{ik} B_{kj}, \quad i = 1, 2, \dots, 6; \quad j = 1, 2, \dots, 3n;$$

$$A_{ik} = \sum_{j=1}^6 B_{ji} C_{jk}, \quad i = 1, 2, \dots, 3n; \quad k = i, i+1, \dots, 3n.$$

7. Домножаючи кожний елемент матриці $[\mathbf{A}]$, обчисленої в точці $(\xi_1^l, \xi_2^l, \xi_3^l)$ числового інтегрування, на визначник і відповідний ваговий коефіцієнт, просумовуємо їх з отриманими для всіх попередніх точок інтегрування і повертаємось до пункту 2.

Для побудови вектора поверхневого навантаження необхідно провести інтегрування заданих поверхневих сил по поверхні елемента, яке аналогічно

зводять до інтегрування поверхневих сил по базовому чотирикутнику $(-1 \leq \xi_1 \leq 1, -1 \leq \xi_2 \leq 1)$, яке виконують чисельно.

Відповідно до квадратурних формул

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{N}]^T \mathbf{p} \sqrt{E_1 E_2 - E_{12}^2} d\xi_1 d\xi_2 = \sum_{l=1}^{L'} v_l \left([\mathbf{N}]^T \mathbf{p} \sqrt{E_1 E_2 - E_{12}^2} \right)_l, \quad (3.54)$$

де L' – кількість точок числового інтегрування по грані елемента, на якій задано поверхнєве навантаження.

Визначення елемента поверхні $\sqrt{E_1 E_2 - E_{12}^2}$ у точці числового інтегрування (ξ_1^l, ξ_2^l) з номером l виконуємо з використаннями формул:

$$E_1(\xi_1^l, \xi_2^l) = \left(\sum_{i=1}^{n'} \frac{\partial N_i(\xi_1^l, \xi_2^l)}{\partial \xi_1} x_1^{(i)} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n'} \frac{\partial N_i(\xi_1^l, \xi_2^l)}{\partial \xi_1} x_2^{(i)} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n'} \frac{\partial N_i(\xi_1^l, \xi_2^l)}{\partial \xi_1} x_3^{(i)} \right)^2, \quad (3.55)$$

$$E_2(\xi_1^l, \xi_2^l) = \left(\sum_{i=1}^{n'} \frac{\partial N_i(\xi_1^l, \xi_2^l)}{\partial \xi_2} x_1^{(i)} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n'} \frac{\partial N_i(\xi_1^l, \xi_2^l)}{\partial \xi_2} x_2^{(i)} \right)^2 + \sum_{i=1}^{n'} \frac{\partial N_i(\xi_1^l, \xi_2^l)}{\partial \xi_2} x_3^{(i)} \quad (3.56)$$

$$E_{12}(\xi_1^l, \xi_2^l) = \left(\sum_{i=1}^{n'} \frac{\partial N_i(\xi_1^l, \xi_2^l)}{\partial \xi_1} x_1^{(i)} \right) \left(\sum_{i=1}^{n'} \frac{\partial N_i(\xi_1^l, \xi_2^l)}{\partial \xi_2} x_1^{(i)} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n'} \frac{\partial N_i(\xi_1^l, \xi_2^l)}{\partial \xi_1} x_2^{(i)} \right) \left(\sum_{i=1}^{n'} \frac{\partial N_i(\xi_1^l, \xi_2^l)}{\partial \xi_2} x_2^{(i)} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n'} \frac{\partial N_i(\xi_1^l, \xi_2^l)}{\partial \xi_1} x_3^{(i)} \right) \left(\sum_{i=1}^{n'} \frac{\partial N_i(\xi_1^l, \xi_2^l)}{\partial \xi_2} x_3^{(i)} \right), \quad (3.57)$$

де $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)})$ – координати вузлів поверхневого скінченного елемента.

Обчислення вектора поверхневого силового навантаження у точці числового інтегрування можна провести на основі введених апроксимацій через його значення у вузлах елемента, а саме

$$(\mathbf{p})_l = [\mathbf{N}]_l \{\mathbf{p}\}^{(e)}, \quad (3.58)$$

де $\{\mathbf{p}\}^{(e)} = \{p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, p_3^{(1)}, p_1^{(2)}, p_2^{(2)}, p_3^{(2)}, \dots, p_1^{(n')}, p_2^{(n')}, p_3^{(n')}\}^T$ – вектор поверхневого навантаження у вузлах навантаженої поверхні елемента; $[\mathbf{N}]_l$ – матриця функцій форми, обчислена в l -точці числового інтегрування.

Відзначимо, що для скорочення часу обчислення матриці жорсткості, значення функцій форми N_i та їхніх похідних в опорних точках чисельного інтегрування в локальних координатах можна визначити лише один раз (на початку обчислень), запам'ятати і не вираховувати заново для кожного скінченного елемента.

Після поелементного синтезу (виконання сумування по всіх елементах і отримання глобальних матриці й вектора правих частин) необхідно врахувати крайові умови в переміщеннях, які виключають рух тіла як жорсткого цілого. Це можна зробити аналогічно до того, як це враховувалося при дослідженні процесів теплоперенесення. Однак, якщо задана нульова крайова умова ($q_i = 0$), рівняння для цього ступеня вільності можна не формувати і в систему рівнянь не вносити. Це один з найважчих способів врахування крайових умов, оскільки приводить до певної модифікації вихідної структури системи рівнянь. Однак ця складність компенсується зменшенням розмірності системи рівнянь, що у просторово тривимірному випадку доволі істотно зменшує розмірність остаточної системи рівнянь, позаяк кількість таких крайових умов іноді сягає тисяч.

Коли задано певне крайове значення $q_i = q^{(0)} \neq 0$, тоді з правих частин усіх рівнянь, за винятком i -го, віднімаємо добуток $K_{ji}q^{(0)}$. Далі всі елементи i -го стовпчика та i -ї стрічки, за винятком K_{ii} , який залишається без змін, прирівнюємо до нуля, а елемент f_i правої частини заміняємо на добуток $K_{ii}q^{(0)}$. Тоді ця крайова умова буде врахована автоматично внаслідок роз-

в'язання системи рівнянь. Отримана ж система рівнянь при цьому має додатно визначену симетричну матрицю і має єдиний розв'язок [274].

Зазначимо, що шляхом поєднання деяких вузлів шестигранних елементів можна отримувати скінченні елементи з меншою кількістю вузлів і граней (див. рис. 3.4).

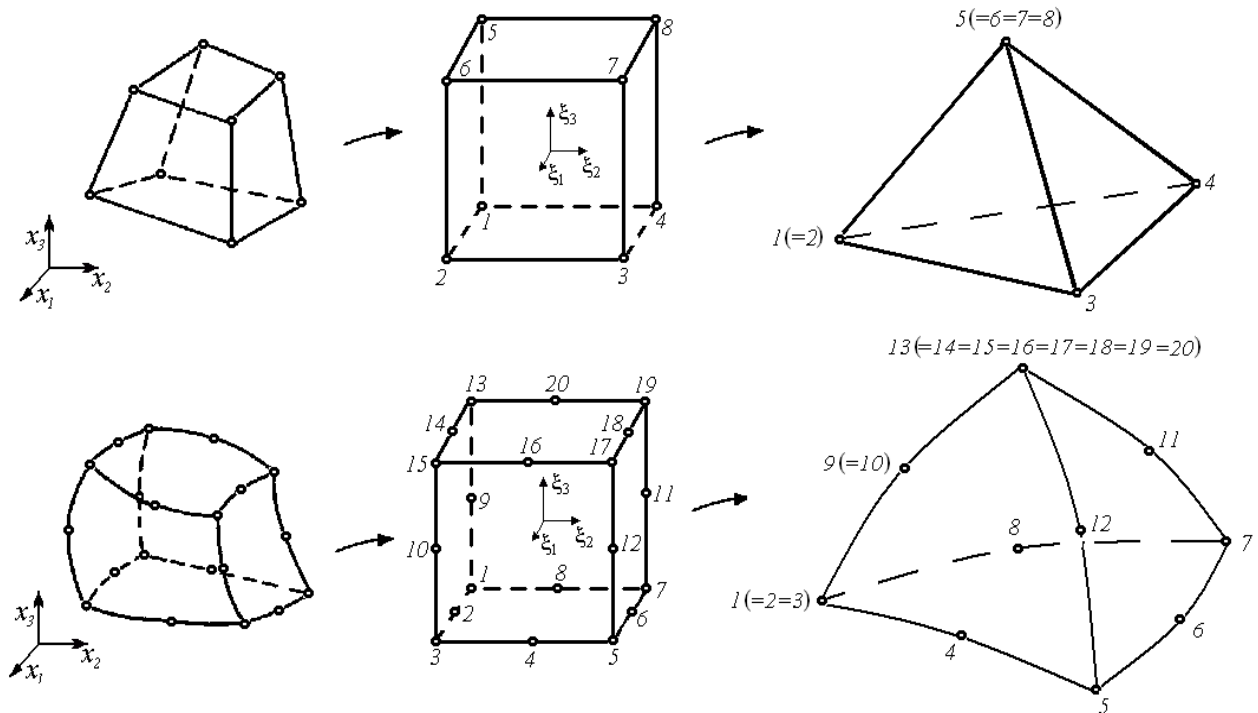


Рис. 3.4. Виродження шестигранних елементів у тетраедричні

Скінченні елементи у вигляді тетраедрів широко використовуються в інженерній практиці, позаяк з допомогою таких елементів автоматично можна дискретизувати область довільної форми.

Розглянемо алгоритм формування матрично-векторних характеристик на прикладі двовимірного тіла, скінченно-елементна модель якого відображена на рис. 3.5.

Як бачимо, тіло представлено у вигляді об'єднання шістнадцяти чотиривузлових білінійних ізопараметричних елементів. Загалом маємо 27 вузлів, кожний з яких має свій номер.

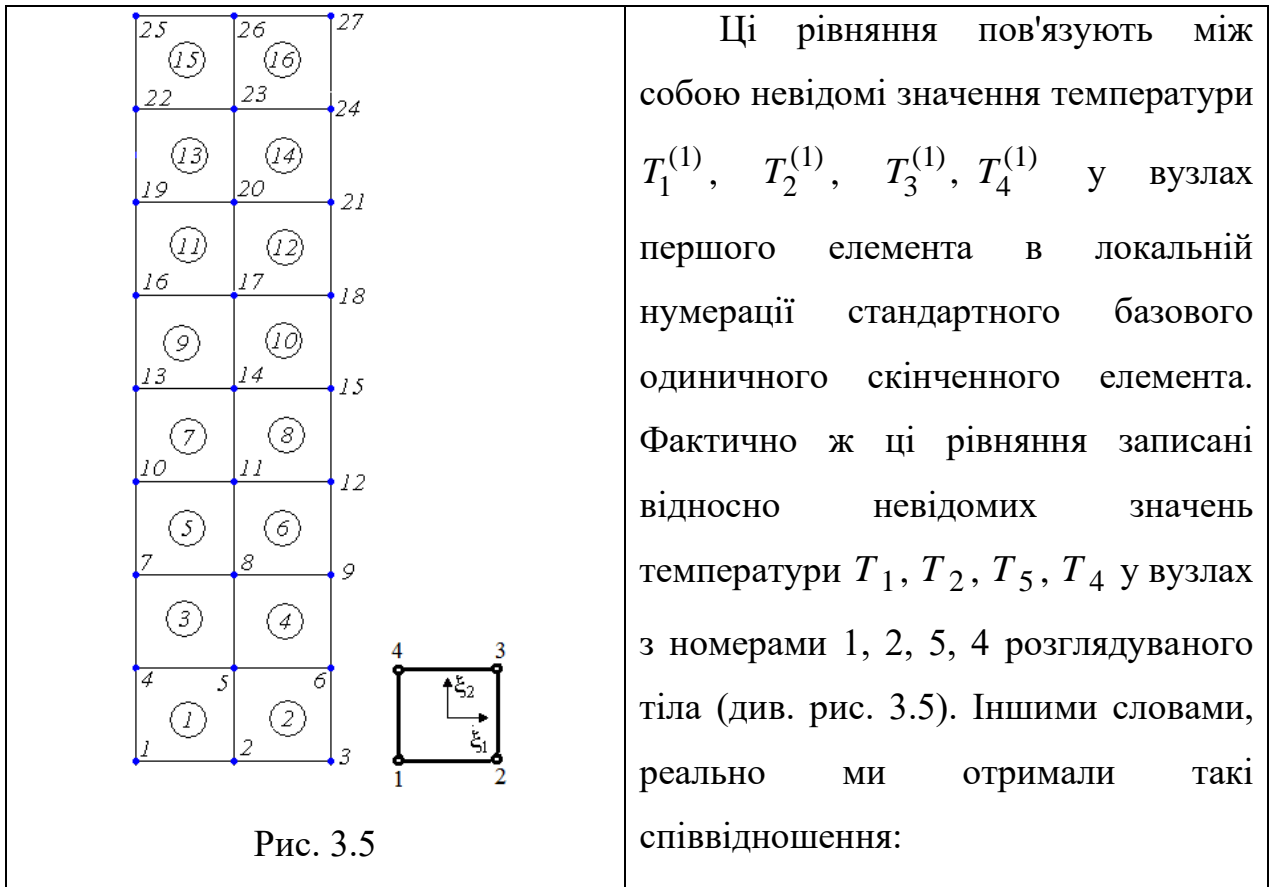
При обчисленні, наприклад, глобальної матриці теплопровідності ми починаємо з першого елемента. Вибираємо координати вузлів, які належать цьому елементу, і будуємо відповідні скінченно-елементні співвідношення. Отримуємо:

$$\mathbf{k}_{11}^{(1)}T_1^{(1)} + \mathbf{k}_{12}^{(1)}T_2^{(1)} + \mathbf{k}_{13}^{(1)}T_3^{(1)} + \mathbf{k}_{14}^{(1)}T_4^{(1)} = \mathbf{f}_1^{(1)};$$

$$\mathbf{k}_{21}^{(1)}T_1^{(1)} + \mathbf{k}_{22}^{(1)}T_2^{(1)} + \mathbf{k}_{23}^{(1)}T_3^{(1)} + \mathbf{k}_{24}^{(1)}T_4^{(1)} = \mathbf{f}_2^{(1)};$$

$$\mathbf{k}_{31}^{(1)}T_1^{(1)} + \mathbf{k}_{32}^{(1)}T_2^{(1)} + \mathbf{k}_{33}^{(1)}T_3^{(1)} + \mathbf{k}_{34}^{(1)}T_4^{(1)} = \mathbf{f}_3^{(1)};$$

$$\mathbf{k}_{41}^{(1)}T_1^{(1)} + \mathbf{k}_{42}^{(1)}T_2^{(1)} + \mathbf{k}_{43}^{(1)}T_3^{(1)} + \mathbf{k}_{44}^{(1)}T_4^{(1)} = \mathbf{f}_4^{(1)}.$$



$$\mathbf{k}_{11}^{(1)}T_1 + \mathbf{k}_{12}^{(1)}T_2 + \mathbf{k}_{13}^{(1)}T_5 + \mathbf{k}_{14}^{(1)}T_4 = \mathbf{F}_1;$$

$$\mathbf{k}_{21}^{(1)}T_1 + \mathbf{k}_{22}^{(1)}T_2 + \mathbf{k}_{23}^{(1)}T_5 + \mathbf{k}_{24}^{(1)}T_4 = \mathbf{F}_2;$$

$$\mathbf{k}_{31}^{(1)}T_1 + \mathbf{k}_{32}^{(1)}T_2 + \mathbf{k}_{33}^{(1)}T_5 + \mathbf{k}_{34}^{(1)}T_4 = \mathbf{F}_5;$$

$$\mathbf{k}_{41}^{(1)}T_1 + \mathbf{k}_{42}^{(1)}T_2 + \mathbf{k}_{43}^{(1)}T_5 + \mathbf{k}_{44}^{(1)}T_4 = \mathbf{F}_4.$$

З огляду на зазначене, загальна система скінченно-елементних рівнянь після підсумовування отриманих матрично-векторних характеристик першого елемента у глобальні матрицю теплопровідності та вектор правих частин набуває вигляду:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{k}_{11}^{(1)} & \mathbf{k}_{12}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{14}^{(1)} & \mathbf{k}_{13}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{k}_{21}^{(1)} & \mathbf{k}_{22}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{24}^{(1)} & \mathbf{k}_{23}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{k}_{31}^{(1)} & \mathbf{k}_{32}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{44}^{(1)} & \mathbf{k}_{43}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{k}_{41}^{(1)} & \mathbf{k}_{42}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{34}^{(1)} & \mathbf{k}_{33}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^{(1)} \\ f_2^{(1)} \\ \mathbf{0} \\ f_4^{(1)} \\ f_3^{(1)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \dots \end{pmatrix}$$

Підсумувавши в глобальну матрицю теплопровідності та вектор правих частин отримані співвідношення, переходимо до аналогічних обчислень на другому елементі, який містить вузли 2, 3, 5 та 6 (див. рис. 1.6). Якщо аналогічно записати отримані з другого елемента співвідношення з урахуванням усіх невідомих, матимемо систему рівнянь:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{11}^{(2)} & \mathbf{k}_{12}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{14}^{(2)} & \mathbf{k}_{13}^{(2)} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{21}^{(2)} & \mathbf{k}_{22}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{24}^{(2)} & \mathbf{k}_{23}^{(2)} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{31}^{(2)} & \mathbf{k}_{32}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{44}^{(2)} & \mathbf{k}_{43}^{(2)} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_{41}^{(2)} & \mathbf{k}_{42}^{(2)} & \mathbf{0} & \mathbf{k}_{34}^{(2)} & \mathbf{k}_{33}^{(2)} & \mathbf{0} & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ f_1^{(2)} \\ f_2^{(2)} \\ \mathbf{0} \\ f_4^{(2)} \\ f_3^{(2)} \\ \mathbf{0} \\ \dots \end{pmatrix}$$

Після їх підсумовування до глобальних матрично-векторних характеристик, система алгебричних рівнянь після обчислень на другому елементі набуває вигляду:

$$\begin{array}{cccccccc}
 T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & T_7 & \dots \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 \mathbf{k}_{11}^{(1)} & \mathbf{k}_{12}^{(1)} & 0 & \mathbf{k}_{14}^{(1)} & \mathbf{k}_{13}^{(1)} & 0 & 0 & \dots \\
 \mathbf{k}_{21}^{(1)} & \mathbf{k}_{22}^{(1)} + \mathbf{k}_{11}^{(2)} & \mathbf{k}_{12}^{(2)} & \mathbf{k}_{24}^{(1)} & \mathbf{k}_{23}^{(1)} + \mathbf{k}_{14}^{(2)} & \mathbf{k}_{13}^{(2)} & 0 & \dots \\
 0 & \mathbf{k}_{21}^{(2)} & \mathbf{k}_{22}^{(2)} & 0 & \mathbf{k}_{24}^{(2)} & \mathbf{k}_{23}^{(2)} & 0 & \dots \\
 \mathbf{k}_{41}^{(1)} & \mathbf{k}_{42}^{(1)} & 0 & \mathbf{k}_{44}^{(1)} & \mathbf{k}_{43}^{(1)} & 0 & 0 & \dots \\
 \mathbf{k}_{31}^{(1)} & \mathbf{k}_{32}^{(1)} + \mathbf{k}_{41}^{(2)} & \mathbf{k}_{42}^{(2)} & \mathbf{k}_{34}^{(1)} & \mathbf{k}_{33}^{(1)} + \mathbf{k}_{44}^{(2)} & \mathbf{k}_{43}^{(2)} & 0 & \dots \\
 0 & \mathbf{k}_{41}^{(2)} & \mathbf{k}_{42}^{(2)} & 0 & \mathbf{k}_{34}^{(2)} & \mathbf{k}_{33}^{(2)} & 0 & \dots \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
 \end{array} \right] \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ T_7 \\ \dots \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{f}_1^{(1)} \\ \mathbf{f}_2^{(1)} + \mathbf{f}_1^{(2)} \\ \mathbf{f}_2^{(2)} \\ \mathbf{f}_4^{(1)} \\ \mathbf{f}_3^{(1)} + \mathbf{f}_4^{(2)} \\ \mathbf{f}_3^{(2)} \\ 0 \\ \dots \end{array}
 \end{array}$$

Продовжуючи так обчислення для всіх інших елементів, приходимо до остаточної системи рівнянь з матрицею розмірності 27×27 . Як відомо ця матриця є симетричною. З огляду на це відпадає потреба обчислювати і зберігати елементи матриць жорсткості елементів, які лежать під діагоналлю.

Максимальна кількість ненульових елементів у кожній стрічці матриці, починаючи від діагонального, рівна п'яти. Тож максимальна кількість ненульових елементів глобальної матриці, які треба зберігати, не буде перевищувати 27×5 . У зв'язку з цим використовують різні економні форми зберігання матриць з метою заощадити комп'ютерні ресурси.

Після остаточної формування системи алгебричних рівнянь залишається врахувати крайові умови на шукану функцію і розв'язати остаточно систему алгебричних рівнянь, для чого використовують різноманітні методи, як прямі, так і ітераційні.

Проілюструємо можливість розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь вигляду

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{f}\} \quad (3.59)$$

методом Холецкого-Краута [138].

В основу алгоритму покладено розклад Холецкого для матриці $[\mathbf{K}]$:

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_\Delta]^T [\mathbf{Z}][\mathbf{K}_\Delta], \quad (3.60)$$

де $[\mathbf{Z}]$ – діагональна матриця з додатними елементами z_i ;

$[\mathbf{K}_\Delta]$ – верхня трикутна матриця з одиничною діагоналлю та елементами K_{ij}^Δ .

Відповідно до властивостей матриці $[\mathbf{K}]$ такий розклад існує і є єдиним [136]. Для знаходження елементів K_{ij}^Δ верхньої наддіагональної матриці використаємо стандартне формулювання методу Холецкого [135], згідно з яким

$$K_{ij}^\Delta = \frac{K_{ij} - \sum_{m=1}^i K_{mi}^\Delta K_{mj}^\Delta}{K_{ii}^\Delta}, \quad j = 2 \div n, \quad i = 1 \div (j-1); \quad (3.61)$$

$$K_{ii}^\Delta = \sqrt{K_{ii} - \sum_{m=1}^{i-1} (K_{mi}^\Delta)^2}, \quad i = 1 \div n, \quad (3.62)$$

де n – розмірність системи рівнянь.

Елементи матриці $[\mathbf{Z}]$ визначаємо на основі алгоритму Краута [138]. В результаті отримуємо

$$\sum_{m=1}^i K_{mi}^\Delta K_{mj}^\Delta = K_{ij}; \quad (3.63)$$

$$k_{ij} = K_{ij} - \sum_{m=1}^{j-1} K_{mi}^\Delta K_{mj}^\Delta, \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, i-1; \quad (3.64)$$

$$\sum_{m=1}^i K_{mi}^\Delta z_m K_{mi}^\Delta = z_i, \quad (i = j); \quad (3.65)$$

$$z_i = K_{ii} - \sum_{m=1}^{i-1} k_{mi} K_{mi}^\Delta, \quad (3.66)$$

де

$$K_{mi} = k_{mi} / z_m, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.67)$$

Вводимо вектор $\{\mathbf{q}_0\} = [\mathbf{Z}][\mathbf{K}_\Delta]\{\mathbf{q}\}$. Тоді розв'язок системи лінійних рівнянь вигляду (3.59) знаходимо за два етапи за співвідношеннями:

$$[\mathbf{K}_\Delta]^T \{\mathbf{q}_0\} = \{\mathbf{f}\}; \quad (2.68)$$

$$[\mathbf{K}_\Delta]\{\mathbf{q}\} = [\mathbf{Z}]^{-1}\{\mathbf{q}_0\}. \quad (3.69)$$

Розклад (3.60) матриці системи алгебричних рівнянь на добуток двох трикутних називають прямим ходом, а розв'язування систем рівнянь (3.68), (3.69) – оберненим ходом методу. Провівши один раз факторизацію (3.60), можна багаторазово розв'язувати систему рівнянь (3.59) з різними правими частинами за допомогою лише оберненого ходу, що суттєво скорочує об'єм обчислень.

Відзначимо, що раціональне поєднання алгоритмів Холецького і Краута у розкладі (3.61) – (3.69) (у порівнянні із звичайним розкладом Холецького $[\mathbf{K}_\Delta]^T [\mathbf{Z}] [\mathbf{K}_\Delta]$) у процесі розв'язування системи рівнянь порядку n з шириною стрічки матриці M дозволяє уникнути $n \times M$ операцій множення.

При формуванні матриці системи рівнянь вигляду (3.59) особлива увага звертається на форму її зберігання. Зокрема, часто використовують компактну форму зберігання верхньої частини матриці [134] по стовпцях ненульових елементів, розташованих в одновимірному масиві. Розташування діагональних елементів матриці $[\mathbf{K}]$ в одновимірному масиві визначається додатковим індикаційним масивом IM розмірності n . Для кожного i -го стовпчика матриці $[\mathbf{K}]$ у одновимірному масиві зберігається крайній верхній ненульовий елемент і всі наступні, розташовані нижче за нього, до діагонального включно. Загальна кількість елементів в одновимірному

масиві – $\sum_{j=1}^n \theta_j$, де θ_j – кількість елементів в j -му стовпчику.

Розташування елемента K_{ij} матриці визначається значенням $IM(j) - j + i$ за умови, що $IM(j) - j + i > IM(j-1)$. Іншими словами, цей елемент розташований не вище першого ненульового елемента j -го стовпчика (інакше $K_{ij} = 0$ і не зберігається в одновимірному масиві).

Основна перевага такої форми зберігання матриці системи алгебричних рівнянь в тому, що вимоги щодо об'єму комп'ютерної пам'яті при цьому істотно послаблюються.

3.5. Апробація методики

Запропонований підхід пройшов широку апробацію на розв'язуванні великої кількості тестових задач. Розглянемо деякі результати для порожнистого циліндра під внутрішнім тиском (задача Ламе), розтягнутої на нескінченості пластини з отвором, скінченного циліндра при нагріві шляхом конвективного теплообміну. Для цих задач відомі аналітичні розв'язки, що дає можливість порівняти різні підходи при чисельному розв'язуванні задач та проливає світло на особливості побудови дискретної моделі.

3.5.1. Розв'язування осесиметричної задачі Ламе. Розглянемо товсто-стінну трубу, внутрішній радіус i товщина якої відповідно R і s , за дії внутрішнього тиску p [100]. Дослідимо її напружено-деформований стан з використанням розробленої методики, вибравши за розрахункову модель скінчений циліндр довжиною L . Обчислювальний експеримент проведемо для циліндра із сталі Ст. 20 за таких значень числових параметрів:

$$R=0,5\text{ м}; s=0,5\text{ м}; L=1\text{ м}; p=1\text{ МПа.} \quad (3.70)$$

Використаємо осесиметричні біквадратичні скінченні елементи з вісьмома вузлами. Скінченно-елементний поділ циліндра за двошарової апроксимації по товщині циліндра, подано на рис 3.6.

Оскільки циліндр однорідний, масив номерів матеріалів у цьому випадку складається з шістнадцяти одиничок: (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1).

Масив номерів ступенів вільності, на які накладено нульові крайові умови має вигляд (2, 4, 6, 8, 10), тобто переміщення $u_z = 0$ у вузлах 1 – 5 (у кожному вузлі маємо дві складові переміщення, і складові у напрямі z у

1	3	9	11	17	19	25	27	33	35	41	43	49	51	57	59
2	4	10	12	18	20	26	28	34	36	42	44	50	52	58	60
3	5	11	13	19	21	27	29	35	37	43	45	51	53	59	61
7	8	15	16	23	24	31	32	39	40	47	48	55	56	63	64
11	13	19	21	27	29	35	37	43	45	51	53	59	61	67	69
10	12	18	20	26	28	34	36	42	44	50	52	58	60	66	68
9	11	17	19	25	27	33	35	41	43	49	51	57	59	65	67
6	7	14	15	22	23	30	31	38	39	46	47	54	55	62	63

Ці масиви разом з координатами вузлів у циліндричній системі є вхідною інформацією для розрахунку напружено-деформованого стану циліндра за дії внутрішнього тиску.

На рис. 3.7 показано розподіли кільцевих $\sigma_{\varphi\varphi}$ і радіальних σ_{rr} напружень, а також інтенсивності напружень σ_i уздовж радіусу циліндра. Суцільною лінією наведено аналітичний розв'язок [100]. Значками „*” та „o” відзначені скінченно-елементні розв'язки, отримані при одношаровій і двошаровій апроксимаціях циліндра за товщиною восьмивузловими осесиметричними елементами (напруження обчислені в точках інтегрування елементів).

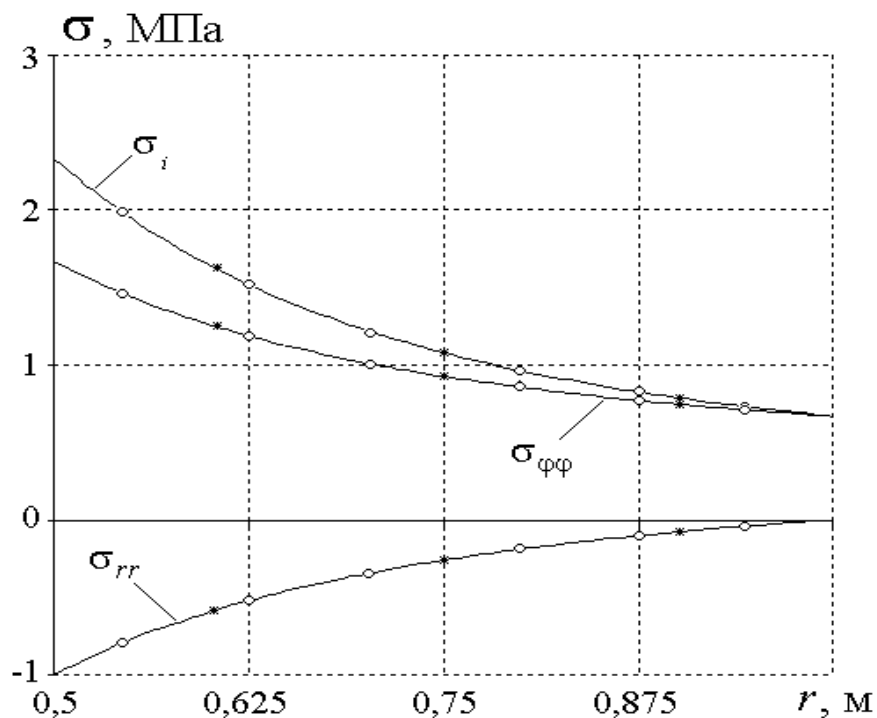


Рис. 3.7. Напруження в циліндрі за дії внутрішнього тиску

Як бачимо, відмінність між точним і наближеним розв'язками практично відсутня при двох елементах за товщиною циліндра. Досить хороші наближення отримуємо і при одношаровій апроксимації циліндра за товщиною. Напружений стан у циліндрі не залежить від координати z . Осьові напруження $\sigma_{zz}=0$ у всьому циліндрі.

3.5.2. Розв'язування задачі Ламе в межах плоскої задачі. Визначимо напружений стан у порожнистому циліндрі за дії внутрішнього тиску в межах формулювання задачі про плоский напружений стан за тих же умов, як у п. 3.5.1. При цьому для апробації методики розглянемо три випадки, скінченно-елементні моделі яких зображені на рис. 3.7.

Спочатку проведемо розрахунок, розглядаючи половину поперечного перерізу циліндра і накладаючи на переміщення на гранях $y=0$ умову симетрії

$$u_y = 0. \quad (3.71)$$

Далі розв'яжемо задачу для четвертої частини перерізу циліндра, задаючи граничні умови:

$$u_y = 0 \quad \forall y = 0, \quad u_x = 0 \quad \forall x = 0. \quad (3.72)$$

Нарешті виділимо довільний кут φ і виконаємо обчислення для сектору, що відповідає цьому куту. На грані $y=0$ задаємо граничну умову (3.71), а на грані $y' = 0$ умови циклічної симетрії

$$u_{y'} = 0. \quad (3.73)$$

У цьому випадку у вузлах з номерами 3, 5, 8, 10, 13 введено локальну систему координат (див. рис. 3.8).

Зв'язок між компонентами вектора переміщень в локальній і глобальній декартовій системах координат відомий:

$$\begin{pmatrix} u_{x'} \\ u_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

Розв'язки, отримані у всіх трьох випадках практично ідентичні й збігаються з точністю до 1% з розв'язками осесиметричної задачі теорії пружності, поданими на рис. 3.8.

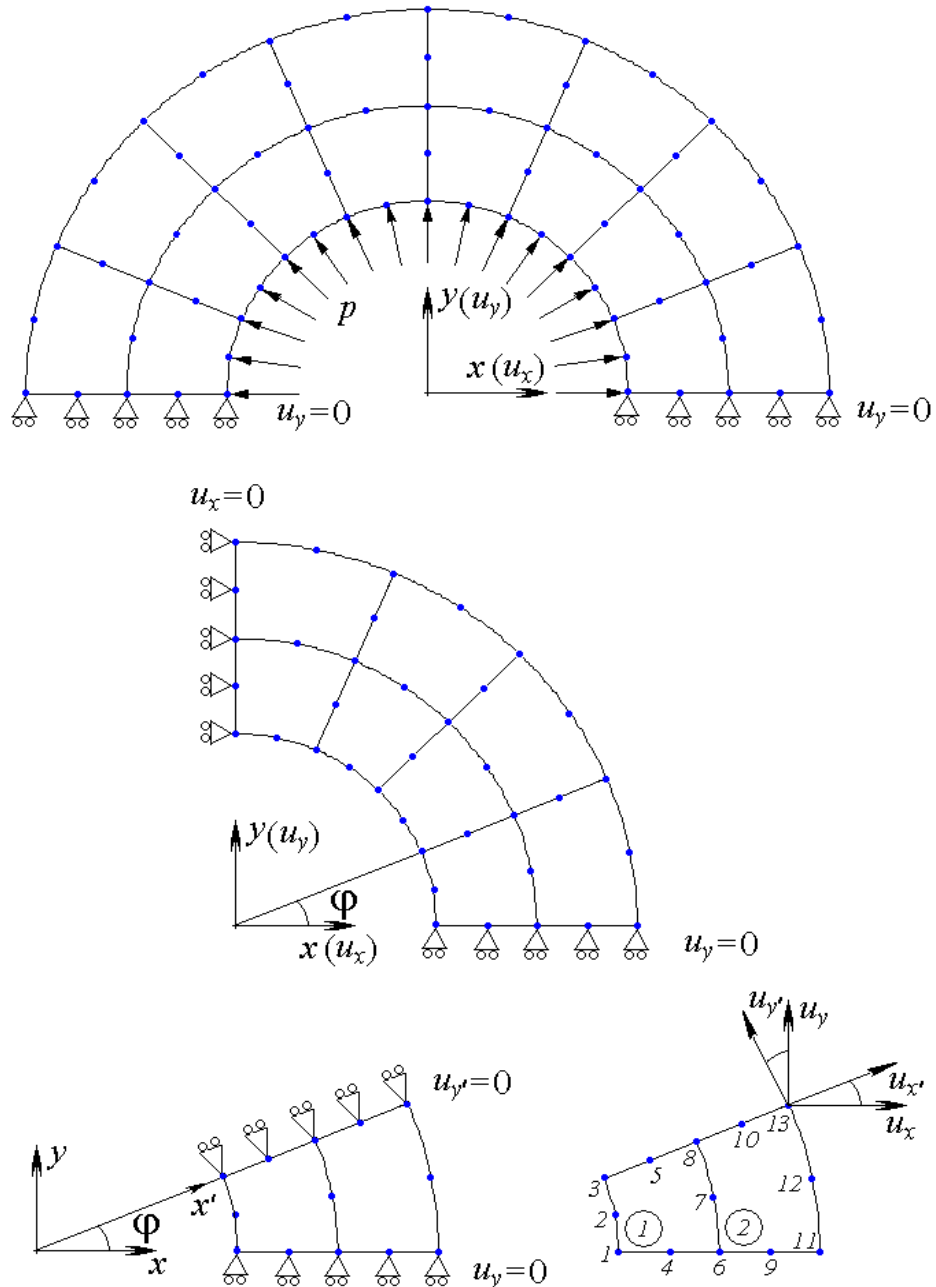


Рис. 3.8. Скінченно-елементні моделі задачі Ламе
(плоский деформований стан)

Зазначимо, що при розв'язуванні конкретних задач завжди повстає питання вибору дискретної моделі. При розв'язуванні задачі Ламе в межах моделі плоского деформованого стану маємо можливість скористатись трьома скінченно-елементними поділами циліндра, останній з яких є

найбільш економним з погляду кількості обчислень, адже розглядали лише два скінченні елементи. Питання оптимізації обчислень особливо гостре для трьох вимірною випадку.

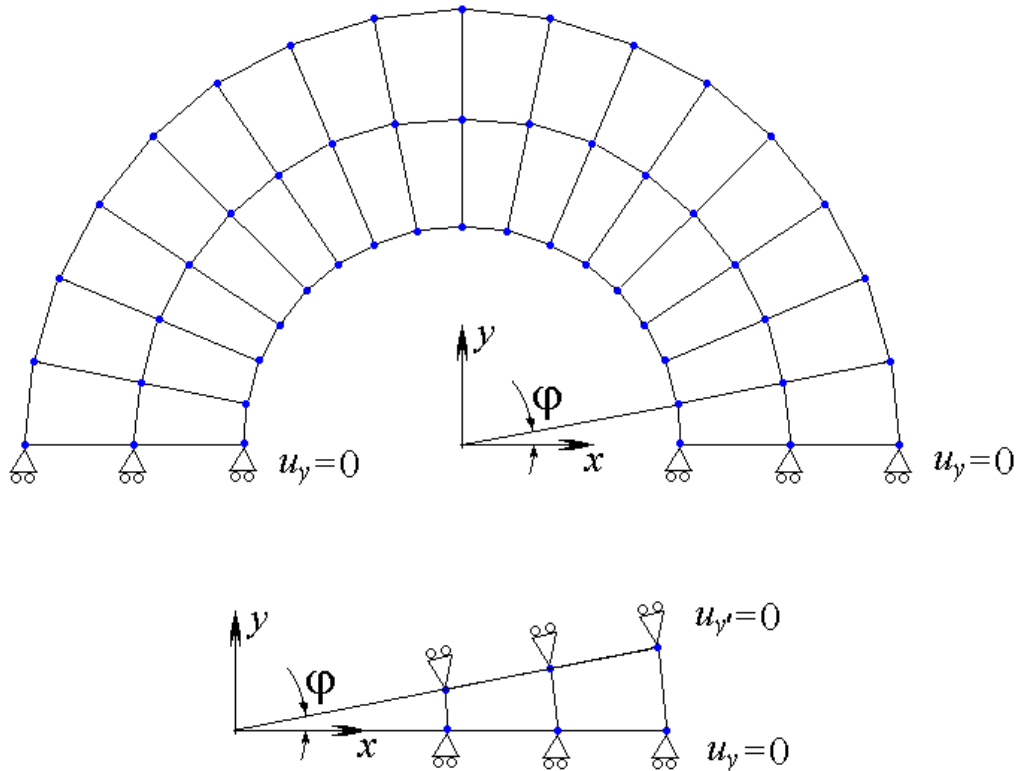


Рис. 3.9. Поділ поперечного перерізу циліндра на білінійні ізопараметричні скінченні елементи

У розглянутих випадках використано ізопараметричні біквадратичні скінченні елементи, які точно описують геометрію циліндра. Для отримання практично точних розв'язків задачі у цьому випадку достатньо двох елементів за товщиною циліндра. Ситуація змінюється за використання білінійних (чотиривузлових) ізопараметричних скінченних елементів (див рис. 3.9). Для отримання таких же за точністю розв'язків (у вузлах числового інтегрування), як за біквадратичної апроксимації, необхідно вісім білінійних елементів за товщиною циліндра.

Зазначимо, що напруження, обчислені у вузлах скінченно-елементного поділу (за відомими вузловими переміщеннями), є менш точними ніж напруження, обчислені в точках числового інтегрування елемента.

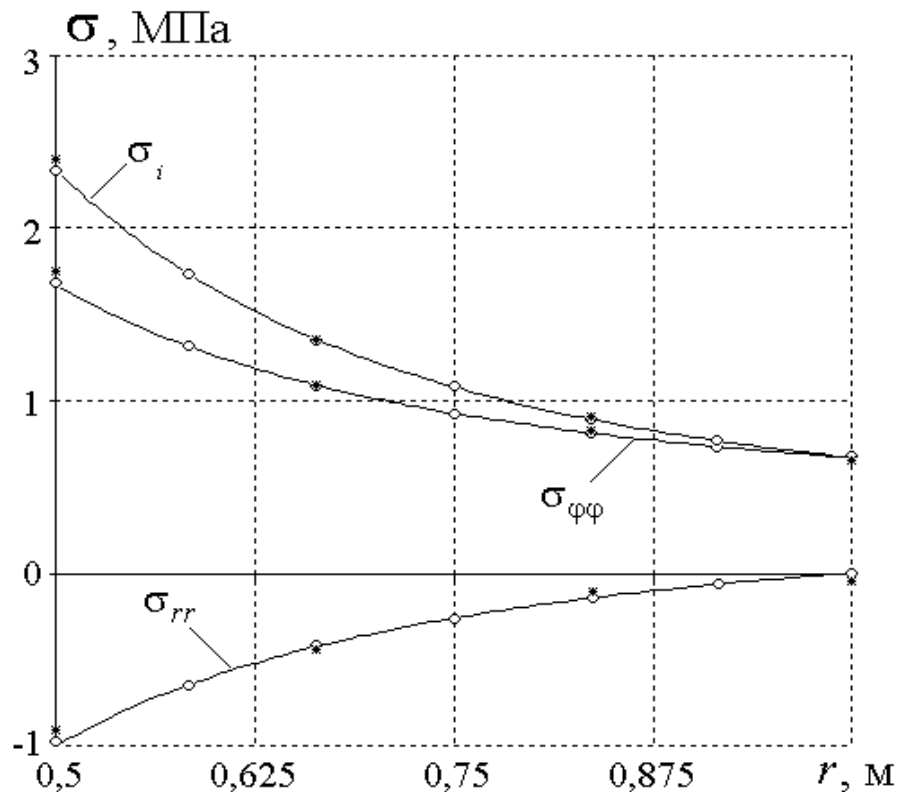


Рис. 3.10. Напруження у циліндрі за використання бікубічних елементів

На рис. 3.10 символами „*” і „o” показано напруження, обчислені у вузлах одно- та двошарового поділів циліндра за товщиною бікубічними елементами, а суцільною лінією – аналітичний розв’язок. Відносна похибка при обчисленні нормальних напружень σ_{rr} на внутрішній поверхні циліндра за одношарової апроксимації за товщиною становить біля 11% (за точний прийнято аналітичний розв’язок). Під час обчислення напружень σ_{rr} у вузлах скінченно-елементного поділу циліндра з використанням восьмишарової апроксимації білінійними елементами за товщиною похибка досягала 25%.

3.5.3. Просторово тривимірна задача Ламе. На прикладі розглядуваної задачі Ламе проведено дослідження збіжності скінченно-елементних розв’язків тривимірних задач теорії пружності.

Поділи частини порожнистого циліндра на білінійні (8-вузлові), біквадратичні (20-вузлові) та бікубічні (32-вузлові) тривимірні скінченні елементи представлено на рис. 3.11 – 3.14.

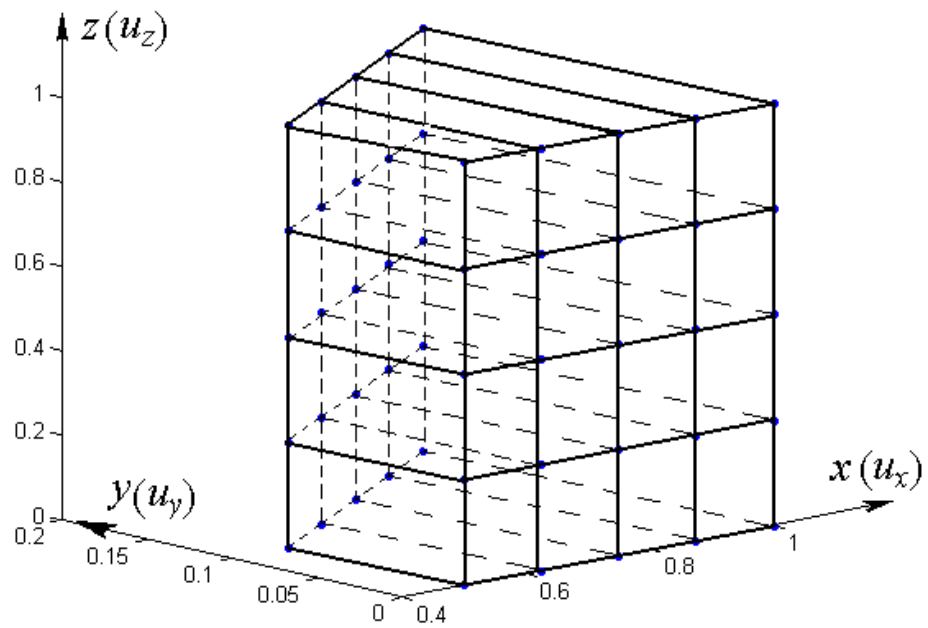


Рис. 3.11. Скінченно-елементний поділ частини циліндра (чотиришарова апроксимація білінійними 8-вузловими тривимірними скінченними елементами за товщиною циліндра).

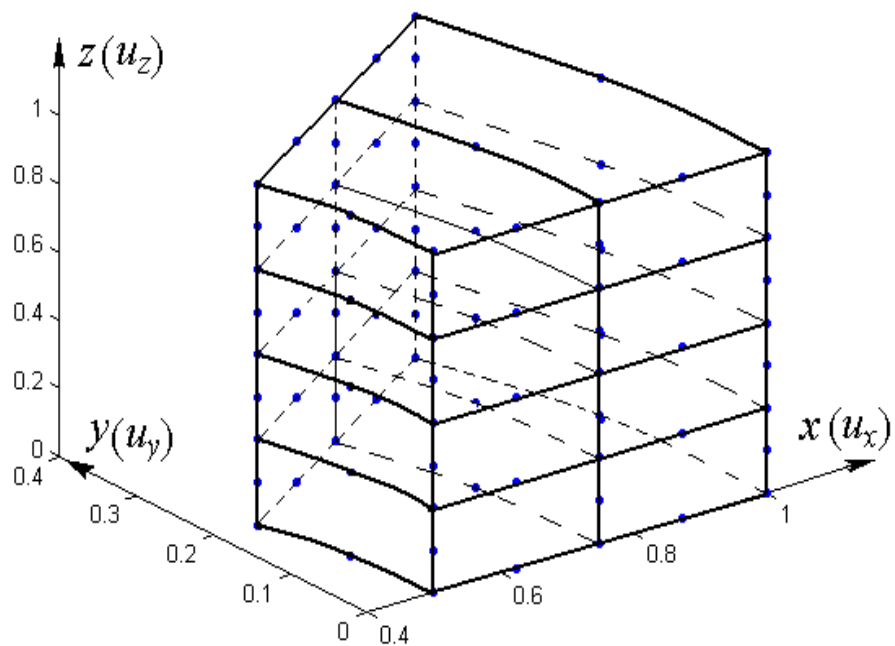


Рис. 3.12. Скінченно-елементний поділ частини циліндра (двошарова апроксимація біквадратичними 20-вузловими тривимірними скінченними елементами по товщині циліндра).

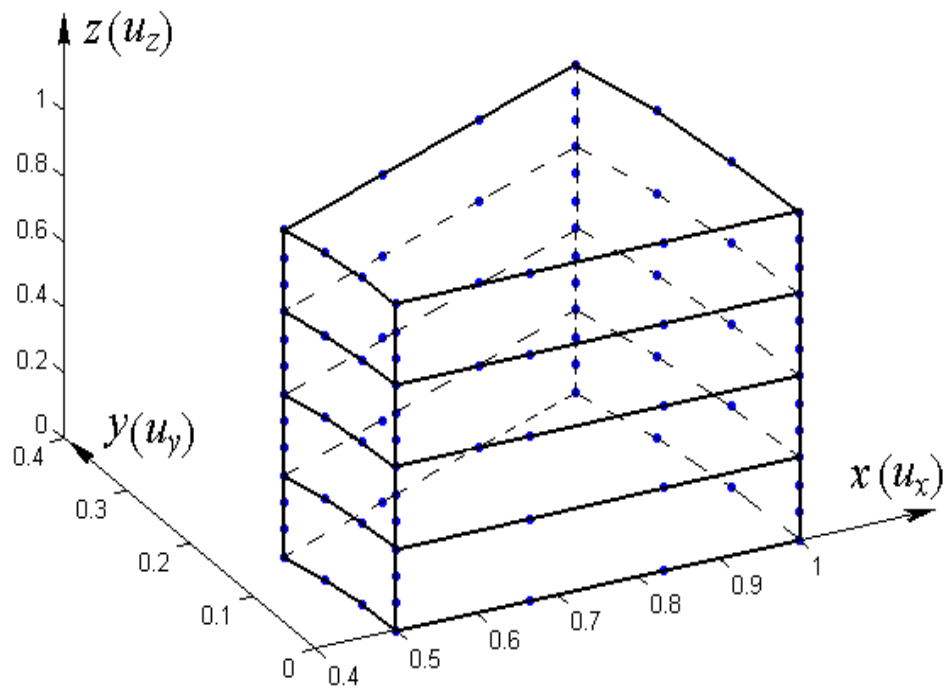


Рис. 3.13. Скінченно-елементний поділ частини циліндра
(одношарова апроксимація бікубічними 32-вузловими елементами)

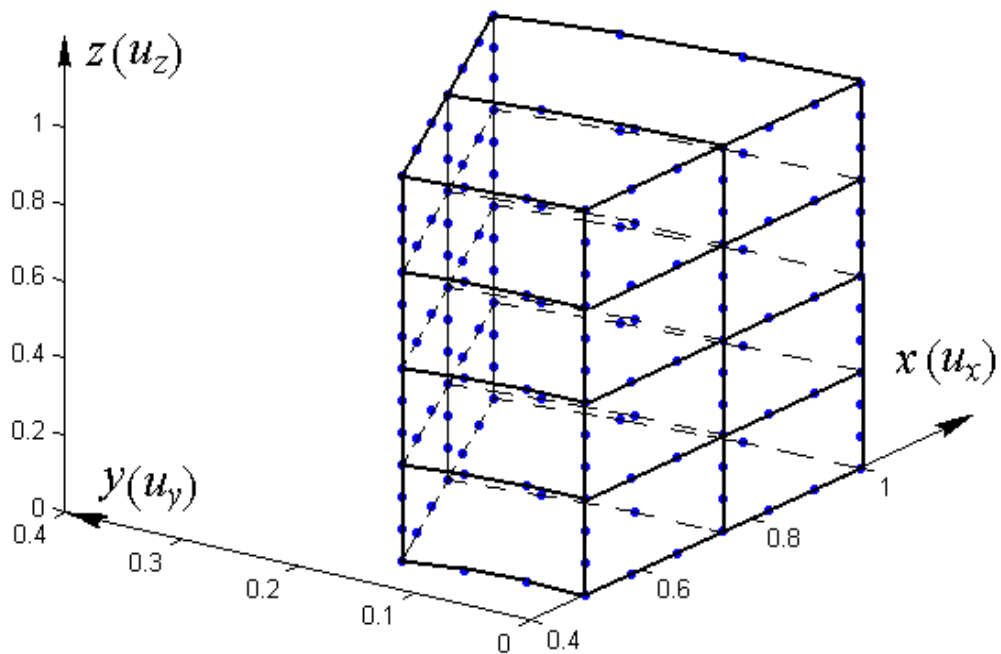


Рис. 3.14. Скінченно-елементний поділ частини циліндра
(двошарова апроксимація бікубічними 32-вузловими
тривимірними скінченними елементами по товщині циліндра).

Подані результати підтверджують, що обчислення виконано на оптимальних скінченно-елементних поділах (з погляду мінімізації часу обчислень) з використанням умов циклічної симетрії, які записували аналогічно як у двовимірному випадку.

Практично найкраще себе зарекомендували при розв'язуванні розглядуваної задачі біквадратичні скінченні елементи. Зокрема, двошарова апроксимація циліндра по товщині за допомогою цих елементів забезпечувала отримання практично точного розв'язку. Досить хороші наближення в межах похибки до 2% забезпечувала і одношарова апроксимація.

3.5.4. Нескінченна пластина з круглим отвором. На рис. 3.15 подано пластину з центральним круговим отвором радіусу a за дії рівномірно розподіленого розтягу p і напрямі координат x .

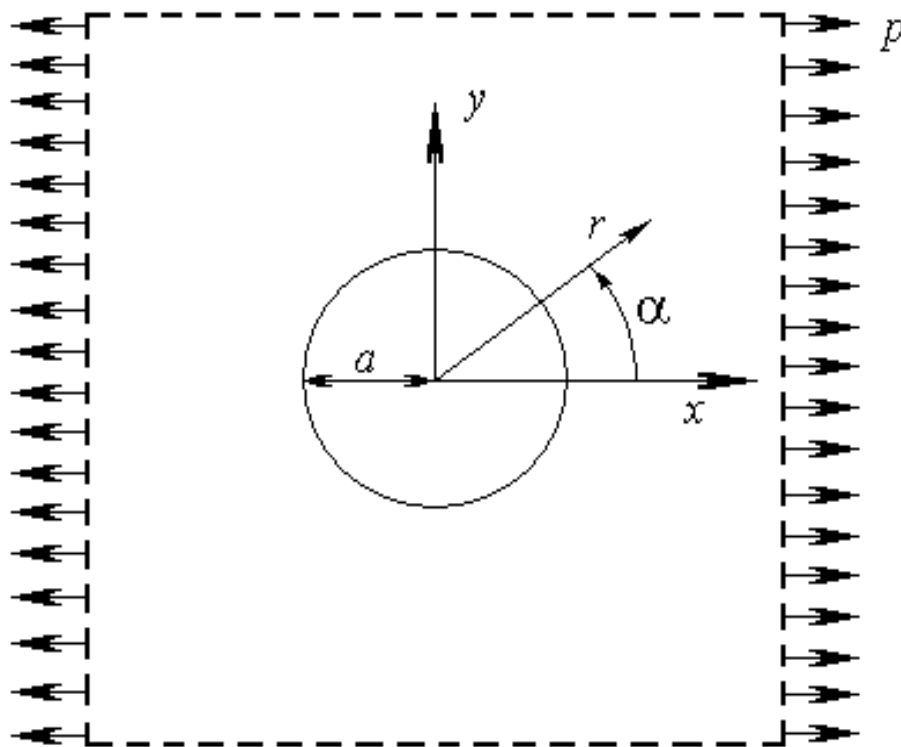


Рис. 3.15. Нескінченна пластина з круговим отвором

Процес деформування пластини із сталі 22К промодельовали в рамках плоскої задачі теорії пружності. Зауважимо, що для даної задачі відомий

аналітичний розв'язок [209], з яким порівнювали отримані результати. При цьому вхідні дані вибирали такими:

$$a = 0,0525 \text{ м}; p = 114 \text{ МПа/м.}$$

Оскільки розрахунок виконували за допомогою методу скінченних елементів, обмежились скінченною квадратною пластиною. Крайові умови задавали на краю пластини, віддаленому від краю отвору на віддалі $10a$. З умов симетрії розглядали лише четверту частину пластини (див. рис. 3.16). При цьому використовували трикутні і чотирикутні ізопараметричні скінченні елементи першого та другого порядку.

Аналіз отриманих результатів показав, що біквадратичні криволінійні чотирикутні скінченні елементи виявили швидку збіжність. Уже при шести поділах четвертини отвору отримано розв'язки, які добре збігаються з аналітичними (див. рис. 3.17). Відмінності між чисельним і аналітичним розв'язками не перевищують 1% і в масштабах рисунку накладаються. Коефіцієнт концентрації, отриманий за допомогою цих елементів, дорівнює 3,01.

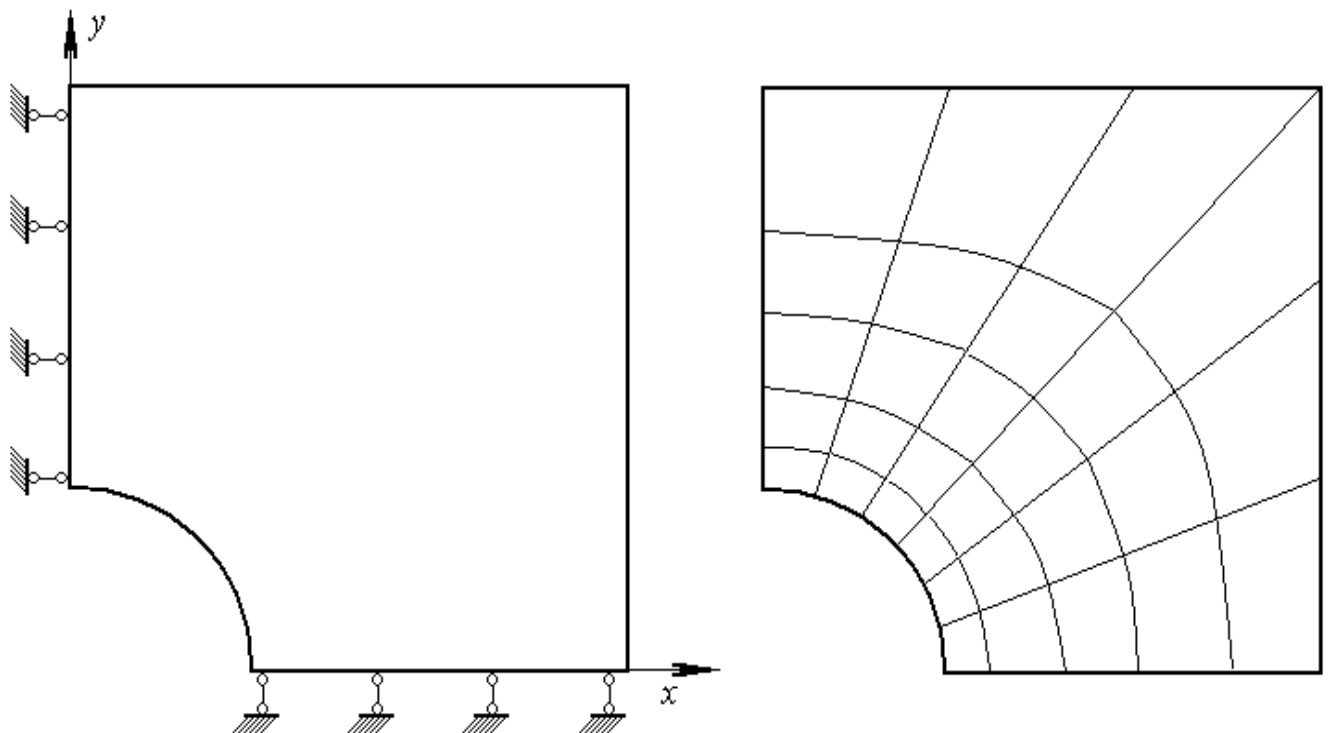


Рис. 3.16. Розрахункова область та топологія її скінченно-елементного поділу на чотирикутні елементи

Розглянули також тривимірний напружений стан аналогічної пластини сталюї товщини $h = 0,089$ м з отвором $a = 0,0525$ м за дії сили $p = 114$ МПа на краю пластини при $x = 10a$. Напружений стан за товщиною пластини у найбільш навантаженому місці показано на рис. 3.18.

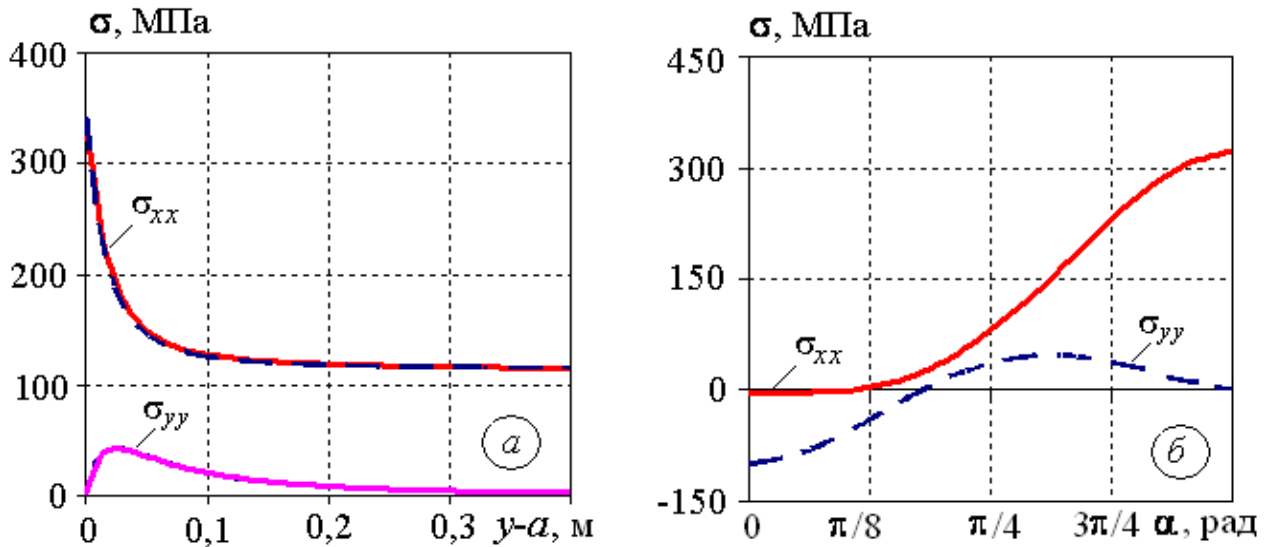


Рис. 3.17. Компоненти тензора напружень залежно від віддалі від краю отвору уздовж координати y (а) та на отворі залежно від кутової координати (б)

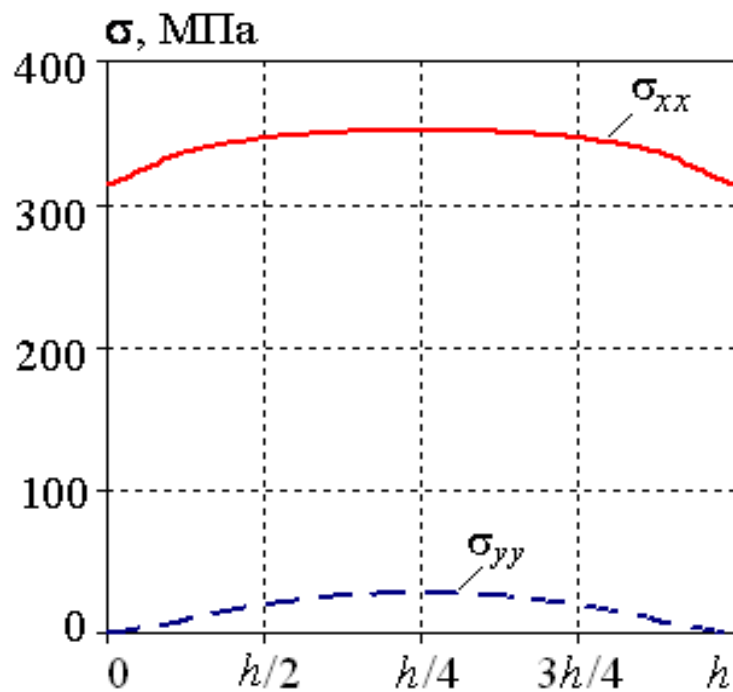


Рис. 3.18. Компоненти тензора напружень за товщиною пластини у місці максимальної концентрації напружень на отворі

Отримані розподіли напружень в плані пластини добре узгоджуються з відповідним аналітичним розв'язком для пластини [209].

3.5.5. Розподіли температури та напружень в скінченному циліндрі. Розглянемо скінчений циліндр з однорідного матеріалу [92]. У початковий момент часу циліндр помістили в середовищі з постійною температурою T_S .

Обчислювальний експеримент виконано для таких вихідних даних [92]: коефіцієнт теплообміну $\beta = 4200$ Дж/(м²К); внутрішній радіус циліндра $R_1 = 0,04$ м; зовнішній – $R_2 = 0,1$ м $T_0 = 293$ К; $T_S = 473$ К; питома теплоємність $c = 1260$ Дж/(кг К); густина $\rho = 1940$ кг/м³; теплопровідність $\lambda = 84$ Вт/(м К); довжина циліндра $L = 0,2$ м.

На рис. 3.19 показано зміни температури за часом у центральній частині циліндра на зовнішній та внутрішній поверхнях за часом (умови конвективного теплообміну задано на внутрішній і зовнішній поверхнях). Суцільною лініями наведено результати розрахунків за запропонованою в роботі методикою, штриховими – аналітичні розв'язки [92]. Отримані результати обчислювального експерименту практично збігаються з аналітичним розв'язком (в масштабі рис. 3.19 результати накладаються). Відзначимо, що на зовнішній поверхні циліндра температура зростає швидше.

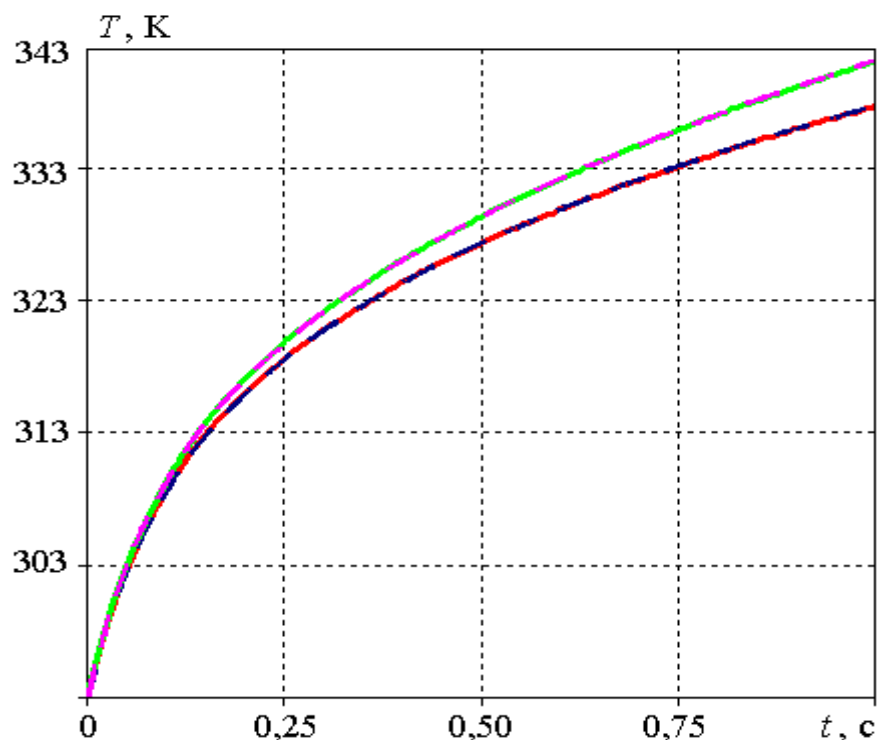


Рис. 3.19. Зміни температури на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра

На рис. 3.20 приведено розподіл в центральній частині циліндра за радіусом в момент часу 1 с.

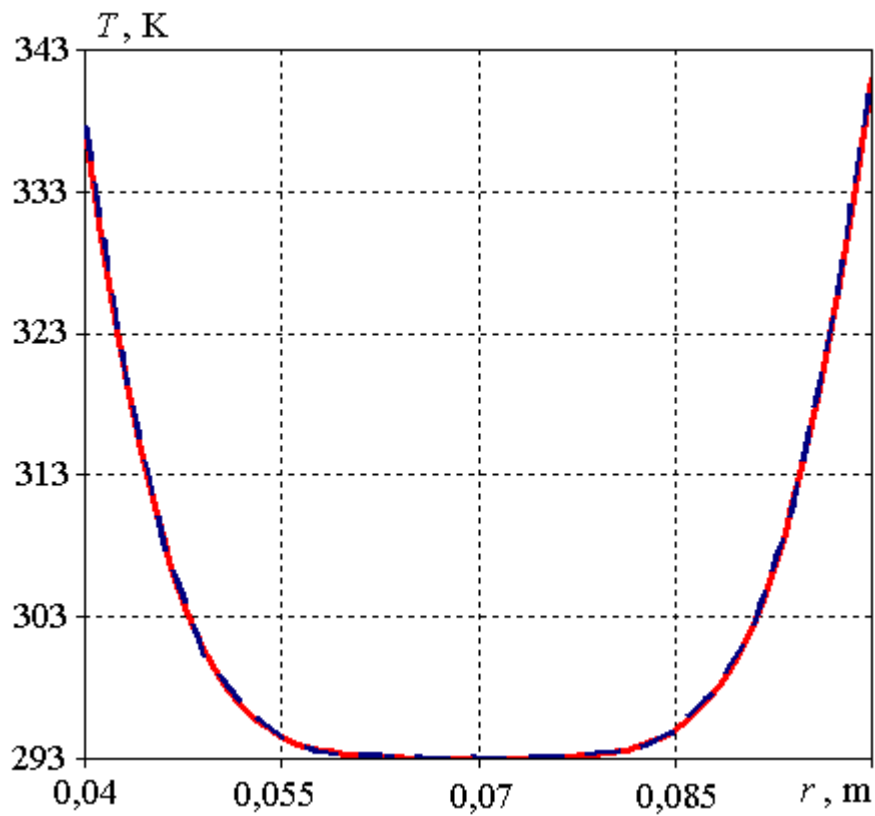


Рис. 3.20. Розподіл температури в центральній частині циліндра при $t = 1$ с.

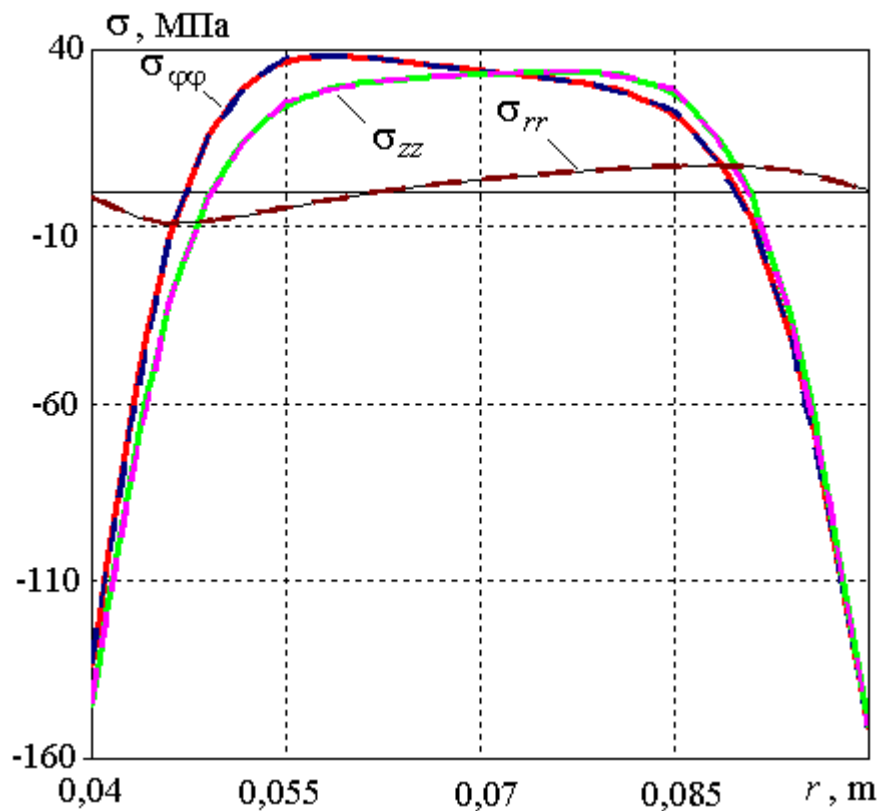


Рис. 3.21. Розподіл напружень в центральній частині циліндра при $t = 1$ с.

На рис. 3.21 зображено розподіли напружень в центральній частині циліндра за радіусом в момент часу 1 с. Бачимо ідеальну збіжність отриманих розв'язків.

3.6. Висновки по розділу

На основі методу скінченних елементів та однокрокових багато-параметричних різницевих алгоритмів розроблено методику дослідження напружено-деформованого стану термопружних тіл, яка надає можливість розраховувати теплові й механічні поля в областях складної геометричної форми з урахуванням кускової неоднорідності й анізотропії матеріалу та температурної залежності властивостей матеріалів у широкому температурному діапазоні. Використані ізопараметричні елементи вищих порядків дозволяють з достатньою точністю апроксимувати тіла складної геометрії і забезпечують високу точність розв'язків.

Запропонований підхід пройшов апробацію на розв'язуванні тестових задач для порожнистого циліндра під внутрішнім тиском (задача Ламе), розтягнутої на нескінченості пластини з отвором (концентрація напружень), скінченного циліндра при нагріві шляхом конвективного теплообміну, для яких відомі аналітичні розв'язки.

Наведено загальний алгоритм побудови ключової системи скінченно-елементних рівнянь. Загальна структура побудови розв'язку є єдиною, як для тривимірних за просторовими змінними задач, так для двовимірних, змінюються лише блоки, які відповідають за обчислення конкретних часткових матриць і векторів у ключових співвідношеннях.

Запропонований підхід в подальшому використано при дослідженні міцності й експлуатаційної надійності термоперетворювачів.

РОЗДІЛ 4

МІЦНІСТЬ ТА ЕКСПЛУАТАЦІЙНА НАДІЙНІСТЬ БІМЕТАЛЕВИХ ТЕРМОПЕРЕТВОРЮВАЧІВ

Термоперетворювачі (регулятори, термостати, запобіжники тощо) є одними з найпоширеніших в термометрії, позаяк їхні деформації є вельми інформативними і доволі точними з погляду визначення температури досліджуваних об'єктів при незначних затратах на обслуговування та невисокій вартості. Ними комплектуються сучасні інженерні конструкції автомобільної, енергетичної, хімічної, харчової та інших галузей промисловості, а також озброєнь та військової техніки.

Більшість термометричних систем та їх аналогів є кусково-однорідними тілами, що складаються з металів з різними фізико-механічними характеристиками. Внаслідок цього в них за умов експлуатації можуть виникати значні температурні напруження, які спричиняють розтріскування, порушення зчеплення між окремими пластинами, частковий або повний розрив між ними, виникнення тріщин під час закріплення в корпусах тих чи інших конструкційних складників і, врешті-решт, – вихід з ладу. Тому актуально підвищити міцність існуючих термометричних систем і створити нові надійніші. І дослідження термомеханічних процесів у контактних термоперетворювачах з використанням адекватних засобів математичного та комп'ютерного моделювання має вирішальне значення для оцінювання їх надійності та визначення допустимих меж функціонування.

У даному розділі досліджено напружено-деформований стан у запропонованих нових версіях біметалевого термоперетворювача [13, 14] за умов експлуатації на основі описаної в розділі 2 математичної моделі і запропонованої в розділі 3 методики.

Наведені в цьому розділі результати опубліковані в роботах [4 – 10, 42].

4.1. Конструкція біметалевого термоперетворювача

Часто вживаний в інженерній практиці термочутливий елемент містить дві з'єднані в один пакет пластини з різних металів. Внаслідок різних фізико-механічних характеристик його складників, передусім коефіцієнта температурного розширення, біметалевий термоперетворювач під час нагрівання відхиляється в бік елемента з меншим його значенням.

Такі термочутливі елементи достатньо точно визначають температуру досліджуваних об'єктів. Однак істотний їх недолік – недостатня надійність, позаяк температурні напруження, що виникають під час їх експлуатації, призводять до порушення міцності зчеплення між пластинами і часткового або повного розриву між ними. Аби уникнути швидкого виходу з ладу біметалевого термоперетворювача, запропоновано таку його конструкцію [13, 14], за якої пластина з більшим коефіцієнтом лінійного температурного розширення виконана із окремих сегментів, а інша – на одній із бокових сторін містить бурти (див. рис. 4.1; *1* та *2* – пластини з більшим і меншим коефіцієнтом лінійного температурного розширення, відповідно; *3* – бурти; *4* – проміжки між пластинами; *a* і *б* – вид збоку, *в* – згори). За такої будови сегменти пластини з більшим коефіцієнтом лінійного температурного розширення встановлені між буртами пластини з меншим. Для пом'якшення контакту між пластинами передбачено проміжки (можливі конфігурації ілюструють рис. 1-*a* і 1-*б*); водночас торцеві поверхні буртів пластини з меншим коефіцієнтом лінійного температурного розширення та сегменти пластини з більшим, які до них прилягають, виконано конічними з однаковими кутами нахилу γ , які вибирають з умови збереження цілісності термоперетворювача за його згину під час експлуатації внаслідок робочих деформацій. Лімітований проміжок *4* між пластинами *1* та *2* усуває тертя між ними.

Дослідимо напружено-деформований стан термоперетворювача за умов, які моделюють експлуатаційні.

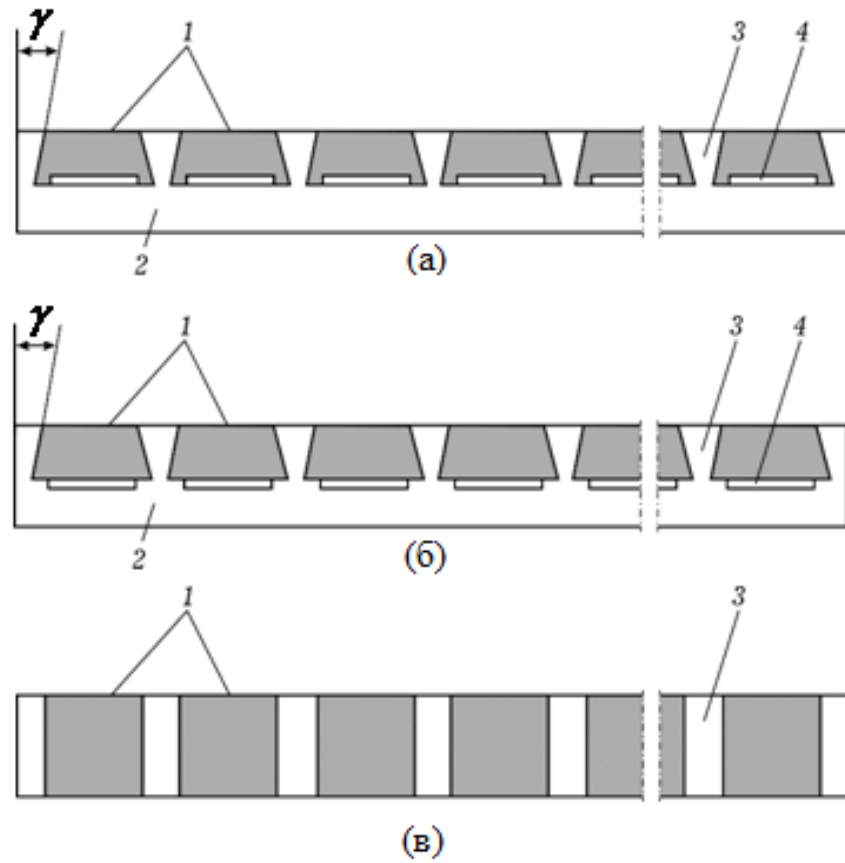


Рис. 4.1. Конструкція термоперетворювача

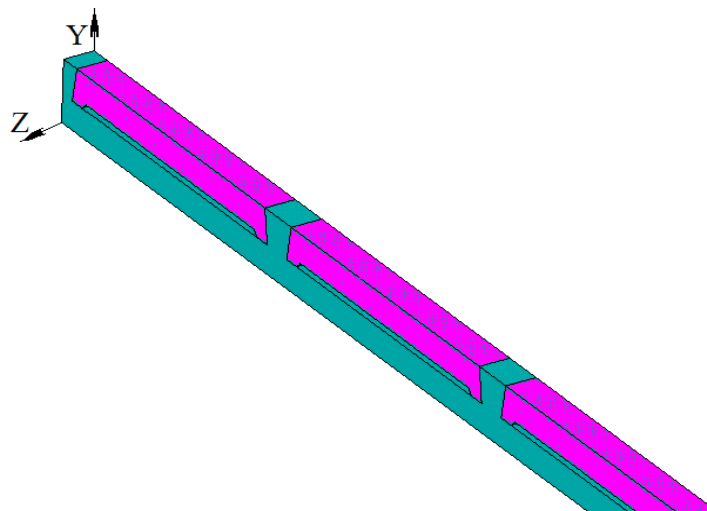
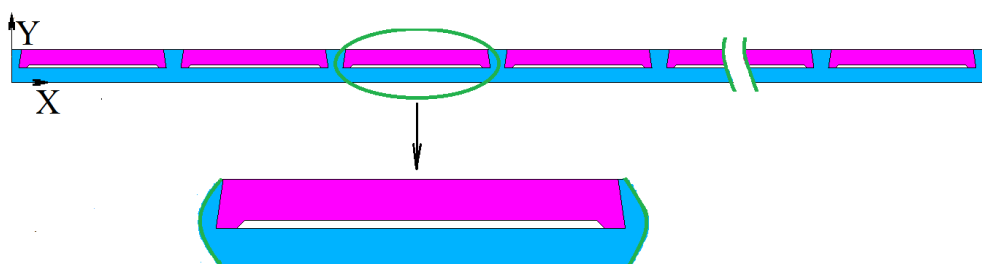


Рис. 4.2. Фрагмент розрахункової області

Рис. 4.3. Розрахункова область V у площині XY

Розглянемо представлений на рис. 4.1-а контактний термоперетворювач загальної довжини L , що займає область V з неперервною за Ліпшицем поверхнею S , в середовищі з температурою T . Віднесемо його до декартової системи координат O_{XYZ} (рис. 4.2 і 4.3); на рис. 4.3 подано розрахункову область у площині XY). Сегменти з матеріалу з більшим коефіцієнтом лінійного температурного розширення висотою h_1 (в напрямі координати Y) мають довжину l_0 . Висота пластини з меншим коефіцієнтом температурного розширення h_2 , а ширина бурта h_0 . Товщина термоперетворювача (в напрямі координати Z) H . Проміжок між пластинами δ_0 .

4.2. Деформування термоперетворювача

Комп'ютерне моделювання процесів деформування термоперетворювача у середовищі з температурою T виконали в межах задачі про плоский напружений стан з використанням біквадратичних скінченних елементів.

Досліджували термоперетворювач зі сплаву міді ($\alpha_{T_1} = 17,4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; $E_1 = 100 \text{ ГПа}$; $\nu_1 = 0,34$; $R_{p0,2}^1 = 300 \text{ МПа}$) і сталі 45 ($\alpha_{T_2} = 13,4 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$; $E_2 = 195 \text{ ГПа}$; $\nu_2 = 0,3$; $R_{p0,2}^2 = 355 \text{ МПа}$) [130] з геометричними параметрами: $h_1 = h_2 = 0,0005 \text{ м}$; $l_0 = 0,005 \text{ м}$; $h_0 = 0,0005 \text{ м}$; $\delta_0 = 0,0001 \text{ м}$.

За перебування в середовищі з температурою $T = 5 \text{ К}$ термоперетворювач деформується (див. рис. 4.4).

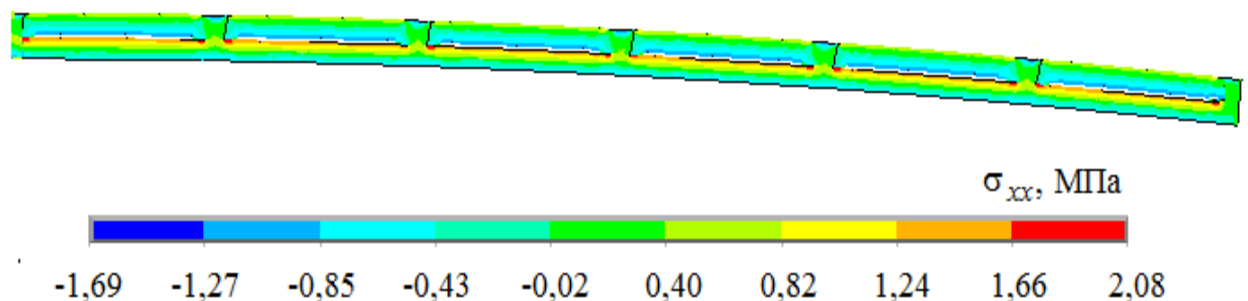


Рис. 4.4. Розподіл осьових напружень в термоперетворювачі за перебування в середовищі з температурою 5K

Напруження σ_{xx} на його верхній (крива 1) та нижній (крива 2) поверхнях показано на рис. 4.5 ($l = x/L$).

Як бачимо, напружений стан у термоперетворювачі практично не залежить від кількості секцій (аналогічні результати отримані при 200 секціях).

При наближенні до бургтів у мідних секціях маємо незначну концентрацію напружень. В центральних частинах сегментів рівень сталий.

Напруження по товщині термоперетворювача в одній з центральних секцій приведено на рис. 4.6, а напруження на верхній поверхні сталевій пластини (при $y = h_2$) і нижній поверхні мідної секції (при $y = h_2 + \delta_0$) показано на рис 4.7 і 4.8 відповідно (l' – аналогічна безрозмірна координата секції).

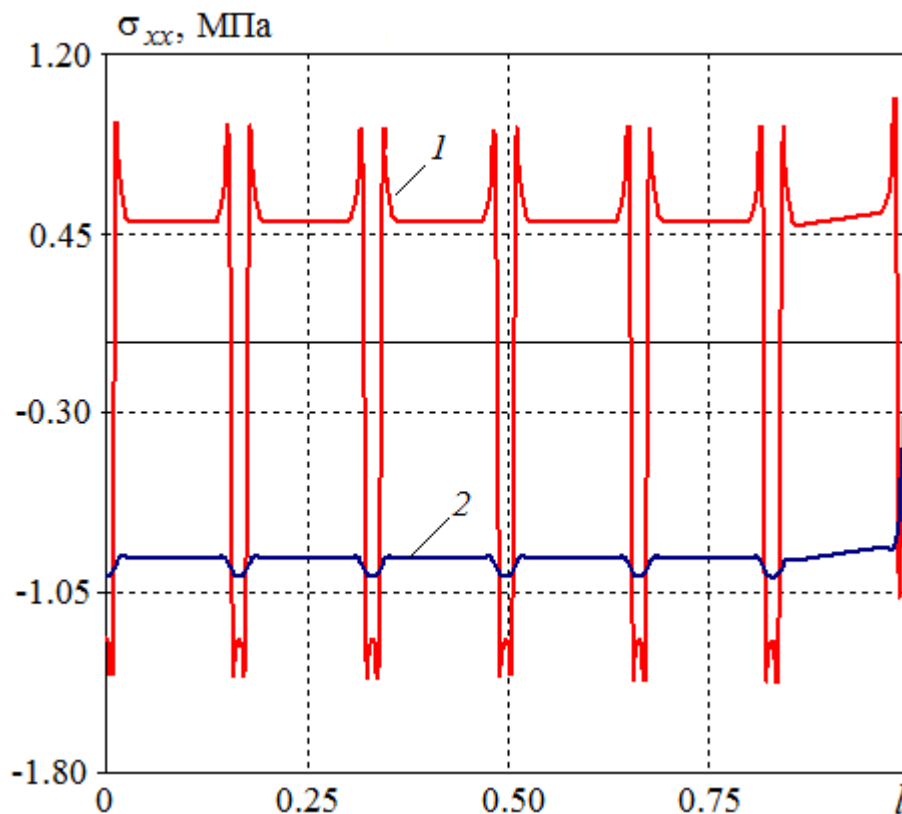


Рис. 4.5. Осьові напруження на верхній (крива 1) і нижній (крива 2) поверхнях

На нижніх поверхнях пластин маємо стиск, на верхніх поверхнях – розтяг. Завдяки проміжку між пластинами напруження на внутрішній поверхні мідних секцій і верхній поверхні сталевій пластини не працюють на

розрив. Завдяки запропонованій конструкції з буртами термоперетворювач зберігає свою цілісність.

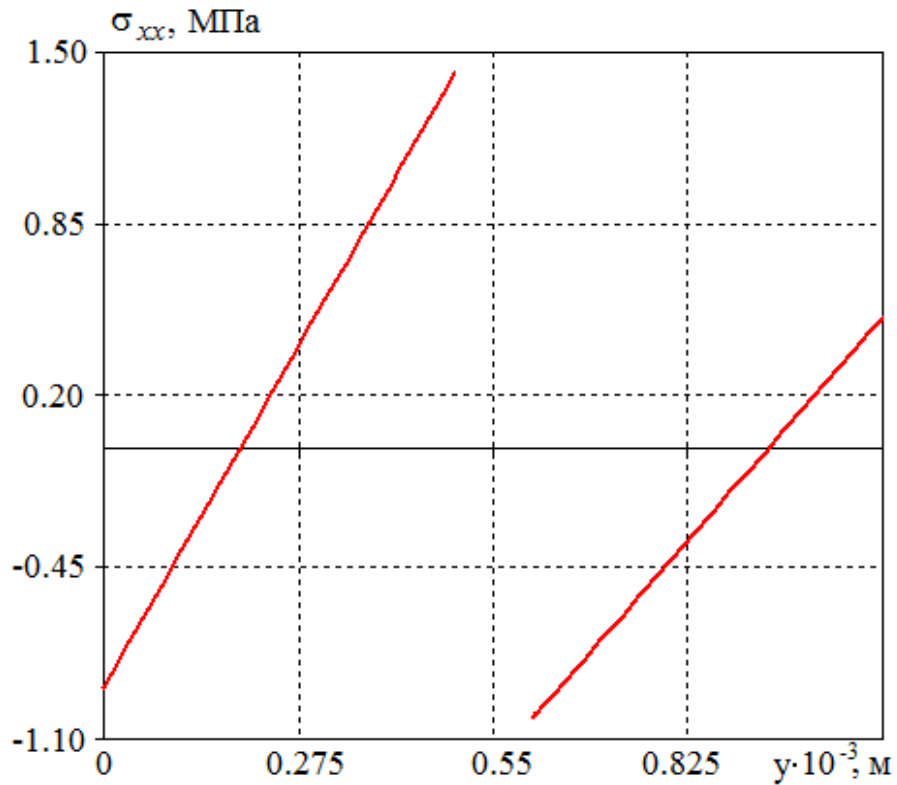


Рис. 4.6. Осьові напруження за товщиною в одній із центральних секцій

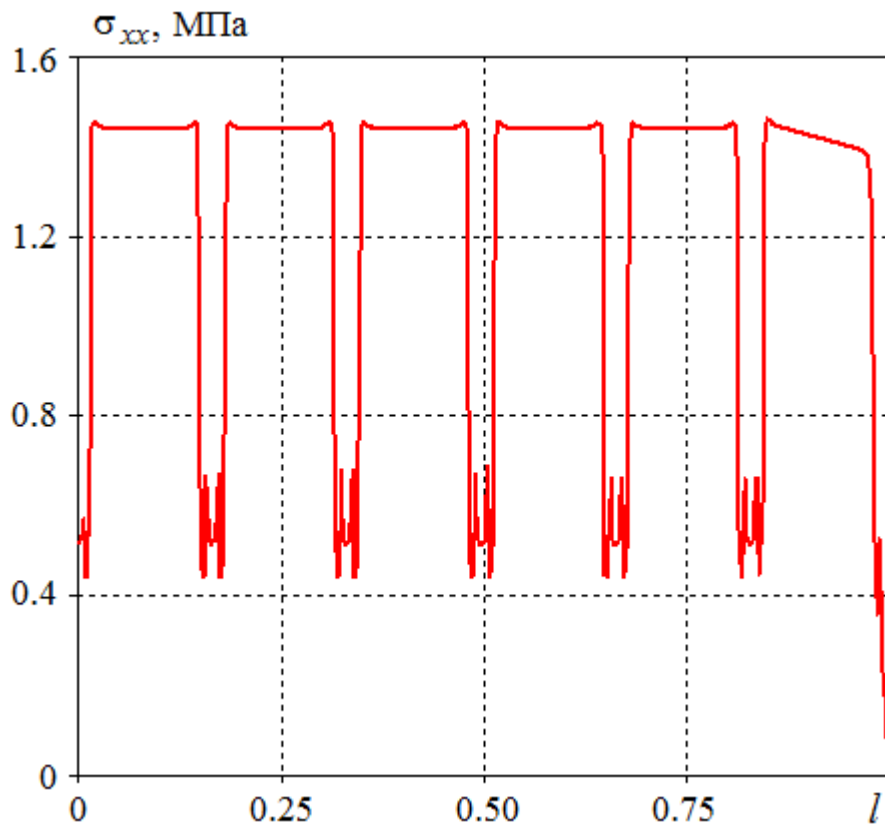


Рис. 4.7. Осьові напруження на верхній поверхні сталевій пластини

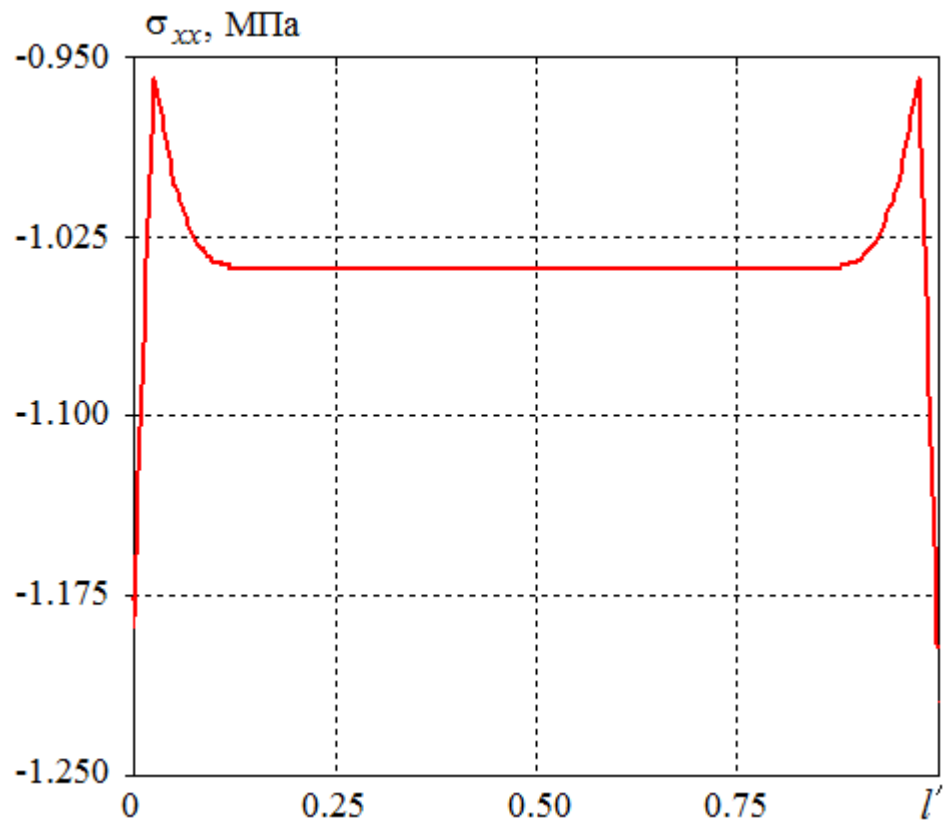


Рис. 4.8. Осьові напруження на нижній поверхні мідної пластини

Загальний розподіл осьових напружень σ_{xx} у мідному сегменті та відповідній сталевій пластині, в якій виникають максимальні напруження, приведено на рис. 4.9 та 4.10 відповідно.

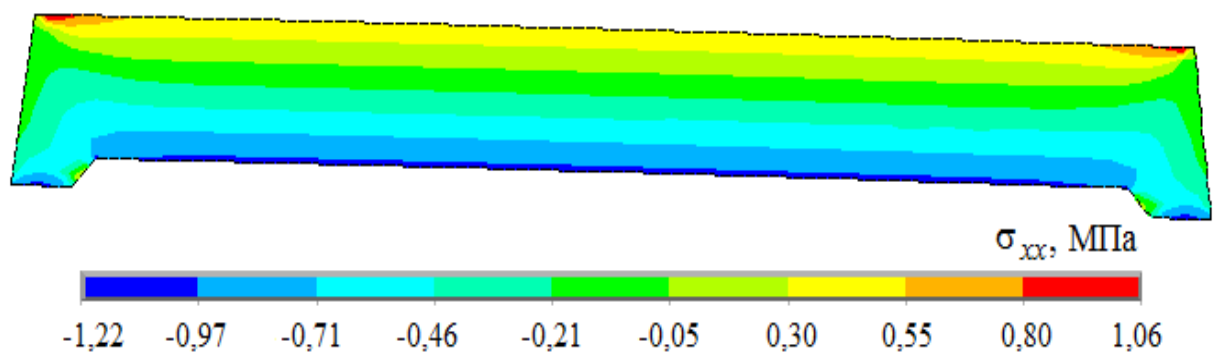


Рис. 4.9. Розподіл осьових напружень у мідному фрагменті

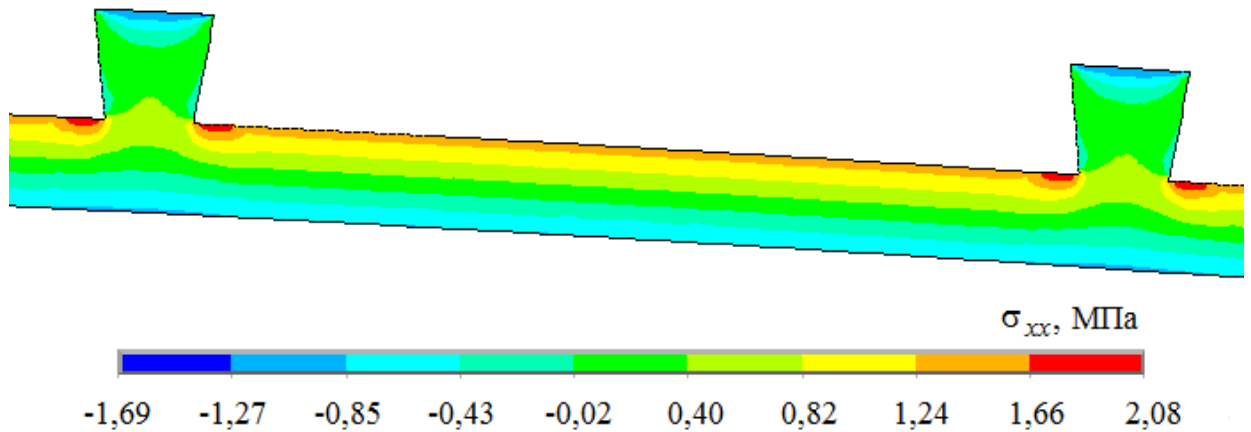


Рис. 4.10. Розподіл осьових напружень у фрагменті сталевій пластини

Важливо, аби термоперетворювач працював у пружній області, позаяк залишкові температурні деформації внаслідок його пластичного деформування можуть суттєво впливати на параметри роботи вимірювальної апаратури. Виконаний обчислювальний експеримент показав, що у разі виготовлення розглядуваного термоперетворювача з використанням твердого сплаву міді, при відносно повільних коливаннях температури прилад працюватиме в пружній області до температур порядку 850 °С.

4.3. Термоперетворювач з проміжком за рахунок сталевого складника

Розглянемо тепер контактний термоперетворювач, представлений на рис. 4.1-б. Дослідимо його напружено-деформований стан у середовищі з температурою 5°С в межах просторово тривимірної теорії термопружності.

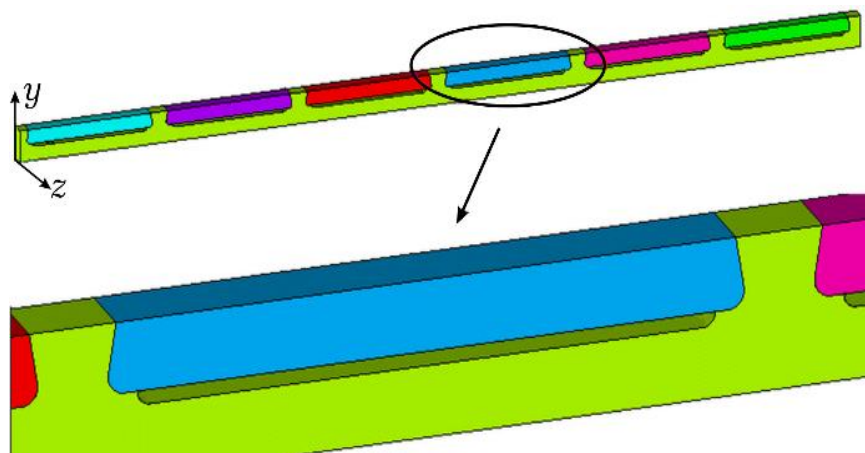


Рис. 4.11. Фрагмент розрахункової області

Віднесемо його до декартової системи координат. Розрахункову область показано на рис. 4.11 і 4.12; на рис. 4.12 подано розрахункову область у площині XU .

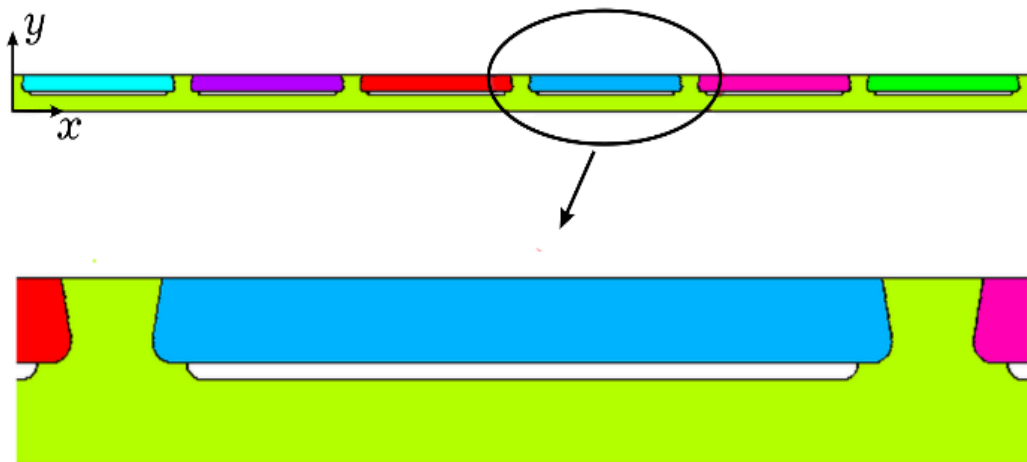


Рис. 4.12. Розрахункова область V у площині XU

Термоперетворювач складається з міді та сталі 45 з тими ж геометричними параметрами. І перебуваючи в середовищі з температурою 5°C , він деформується (див. рис. 4.13).

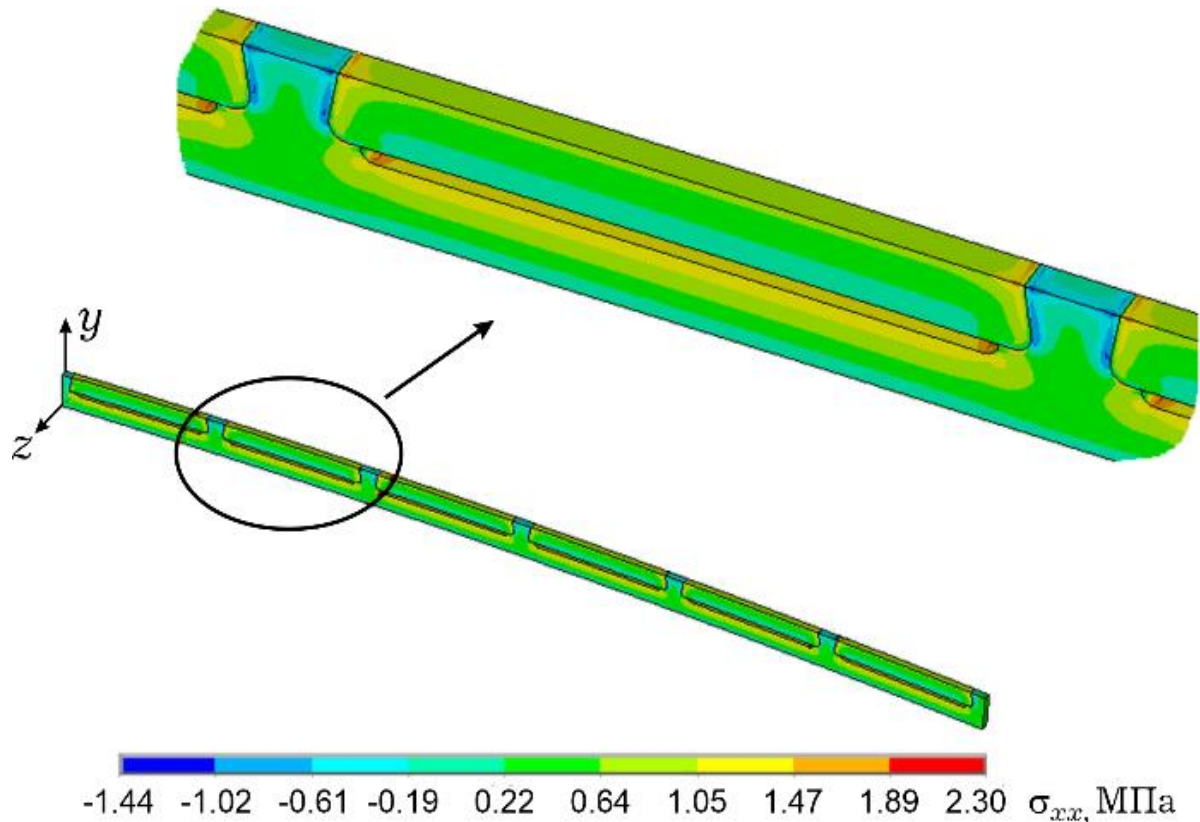


Рис. 4.13. Розподіл осьових напружень в термоперетворювачі за перебування в середовищі з температурою 5K

Максимальні розтягальні напруження виникають у сталевій пластині у вузьких областях біля буртів (рис. 4.14).

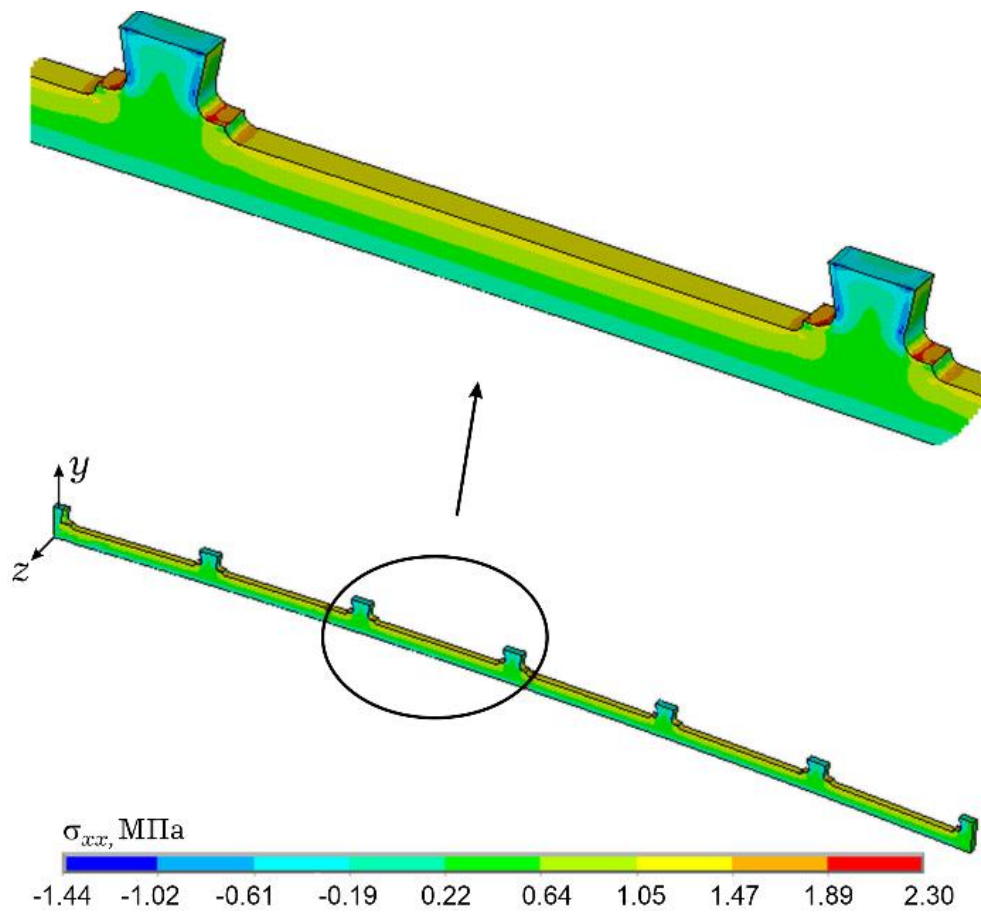


Рис. 4.14. Осеві напруження в сталевій пластині з буртами

У мідних секціях вони суттєво нижчі, що ілюструє рис. 4.15.

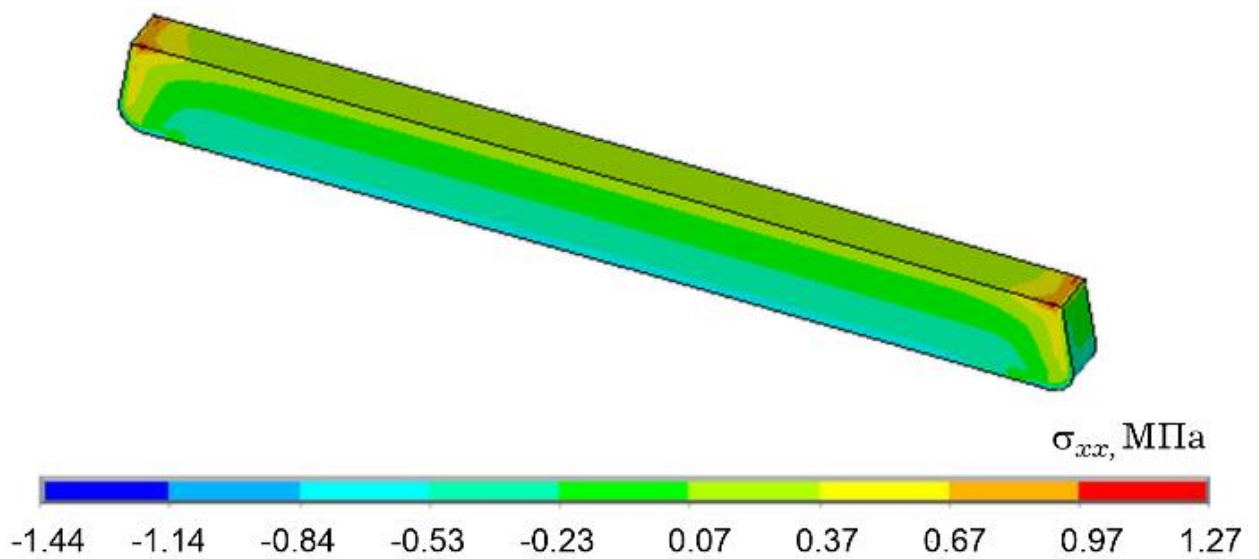


Рис. 4.15. Розподіл осевих напружень у мідній секції

Тут наведено розподіл осьових напружень у типовій мідній секції; напруження в інших секціях аналогічні, локальні їх максимуми в усіх секціях практично однакові.

Для зменшення напружень в кутових точках на верхній поверхні мідних секцій запропоновано виконати заокруглення при наближенні до буртів (див. рис. 4.16).

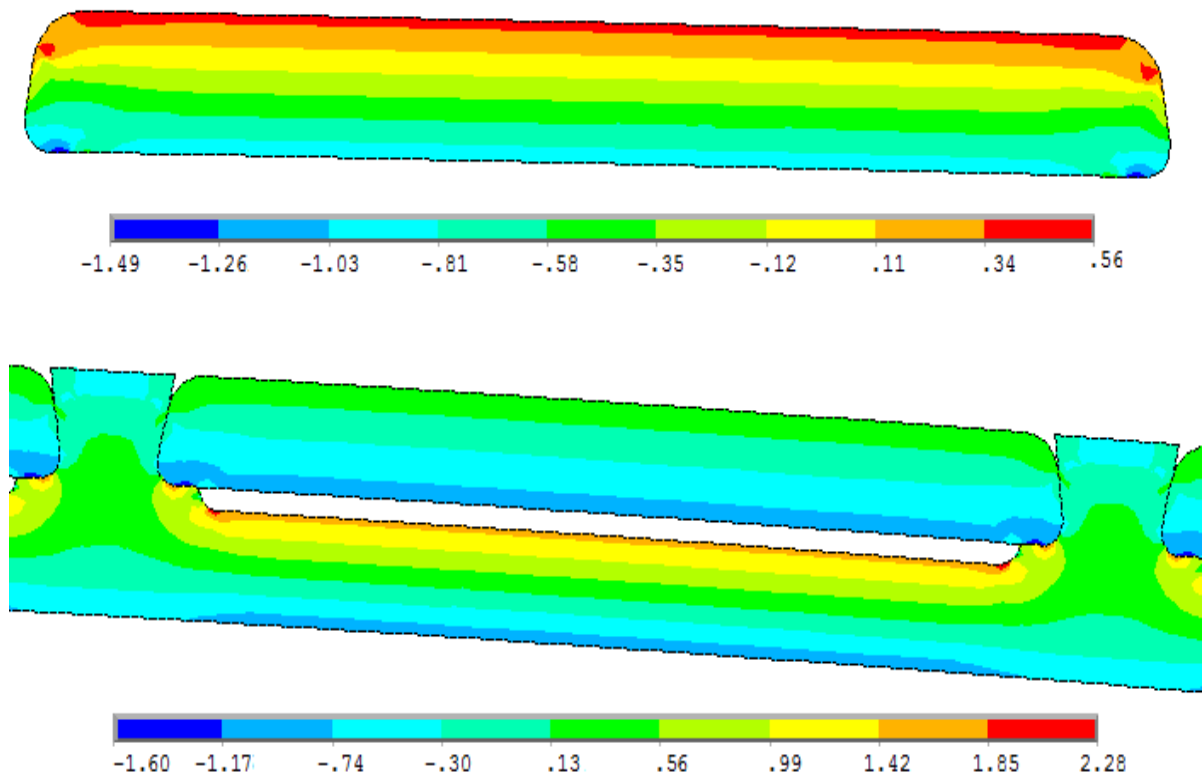


Рис. 4.16. Розподіл осьових напружень за наявності заокруглення на верхній поверхні мідної секції біля буртів

Як бачимо, напруження в мідних секціях в околі буртів зменшуються більше ніж удвічі (рис. 4.15 і 4.16). І навіть в сталевій пластині максимальні напруження дещо зменшуються.

В центральних частинах мідних сегментів і поза околами буртів пластини сталі напруження по товщині термоперетворювача в перерізі $z = 0$ подано на рис. 4.17. На нижніх поверхнях пластин маємо стиск, на верхніх – розтяг.

Внаслідок наявності проміжку між пластинами напруження на внутрішній поверхні мідних секцій і верхній поверхні сталевій пластини не

працюють на розрив, завдяки чого термоперетворювач довше зберігає цілісність за циклічного навантаження.

Зазначимо, що напружений стан у термоперетворювачі практично не залежить від кількості секцій.

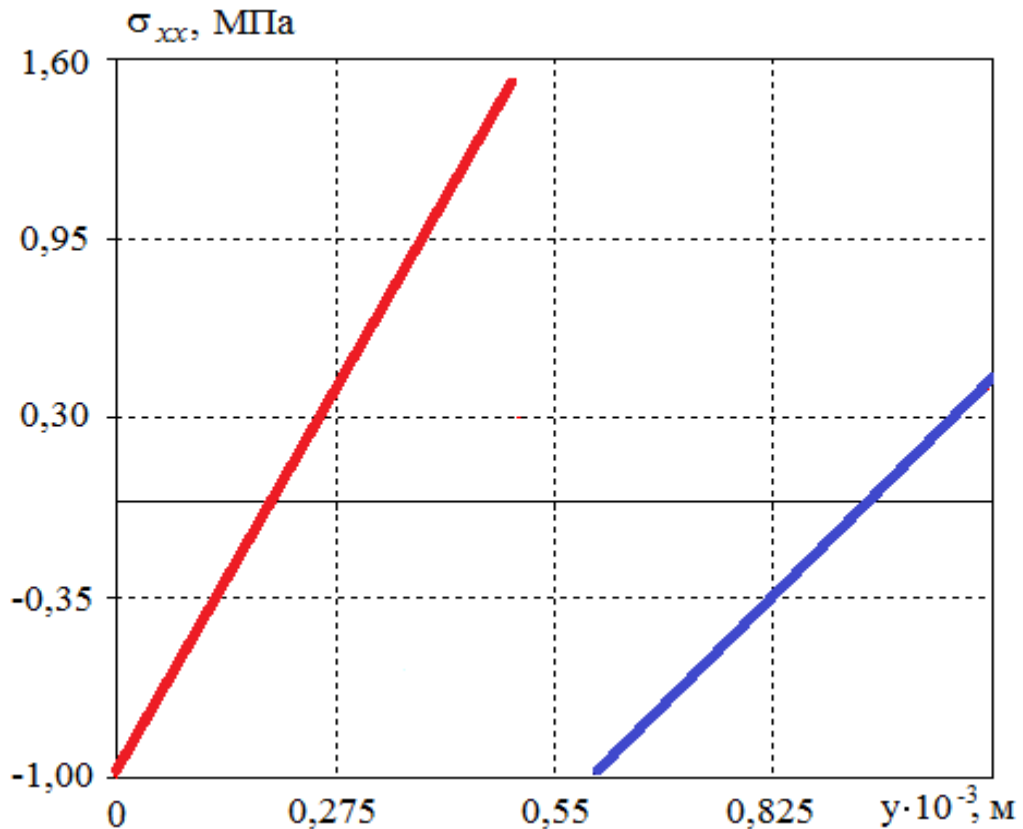


Рис. 4.17. Осеві напруження по товщині поза околами бортів

Підчас дослідження температурних полів встановили, що за швидкостей зростання температури зовнішнього середовища до $10^{\circ}\text{C}/\text{сек}$ розподіл температури в термоперетворювачі практично однорідний, наприклад, різниця між максимальною і мінімальною температурою на п'ятій секунді (за температури довкільля 50°C) не перевищує $0,2^{\circ}\text{C}$.

Оскільки пластина тонка, задачу можна розв'язувати в межах моделі плоского напруженого стану.

Дуже важливо, аби термоперетворювач працював у пружній області, позаяк залишкові температурні деформації внаслідок його пластичного деформування можуть суттєво впливати на параметри роботи вимірювальної апаратури. Якщо він виготовлений з твердого сплаву міді, то за коливань температури зі швидкістю до $10^{\circ}\text{C}/\text{сек}$ він функціонуватиме в пружній

області до температур порядку 760°C (саме при такій температурі максимальні напруження в пластині досягають межі пластичності сталі).

4.4. Висновки по розділу.

На основі розроблених засобів математичного й числового моделювання в межах теорії пружності досліджено напружено-деформований стан біметалевого термоперетворювача зі суттєво вищою надійністю та роботоздатністю за довготривалого циклічного теплового навантаження. Через проміжок між пластинами і бурти закріплення напруження на внутрішній поверхні мідних секцій з більшим коефіцієнтом лінійного температурного розширення і верхній поверхні сталеві пластини з буртами не працюють на розрив, тому термоперетворювач зберігає цілісність до температур порядку $760^{\circ}\text{C} - 850^{\circ}\text{C}$.

Досліджуючи термомеханічні процеси у приладах контактної термометрії за умов, що відповідають експлуатаційним, можна знаходити нові рішення під час конструювання та вдосконалення існуючих приладів.

РОЗДІЛ 5

ЗАХИСНІ ОБОЛОНКИ ТЕРМОПЕРЕТВОРЮВАЧІВ ЗА ІНТЕНСИВНОГО ТЕРМОСИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Основною складовою надійності та ресурсу термоелектричних перетворювачів та термоперетворювачів опору є захисна оболонка термоперетворювача, яка захищає чутливий елемент від руйнівного впливу вимірювального середовища. В процесі експлуатації захисна оболонка термоперетворювача повинна забезпечувати міцність за інтенсивних силових навантажень при підвищених температурах.

Точність оцінки можливої безпечної експлуатації захисних оболонок істотно залежить від достовірності даних про максимальні напруження в них під час експлуатації. Ці напруження, як правило, визначають з простих інженерних співвідношень для тіл канонічної форми, здебільшого циліндричних оболонок, стрижнів та балок трубчастого поперечного перерізу, за відповідних крайових умов [84, 102]. При цьому загальний розв'язок отримують поетапно. Спочатку із співвідношень для циліндрів під тиском знаходять тангенціальні напруження. Далі, використовуючи модель стрижня постійного циліндричного перерізу, оцінюють осьові напруження. Згинні напруження, які виникають при обтіканні оболонки робочим середовищем, визначають на основі співвідношень опору матеріалів, розглядаючи оболонку як защемлену на одному кінці і вільну на іншому циліндричну балку, розташовану перпендикулярно до напрямку потоку робочого середовища. Після чого максимальні напруження, отримані для окремих категорій напружень, підсумовують, і отримані результуючі максимальні напруження порівнюють з допустимими. Можливі похибки такого підходу компенсують коефіцієнтами запасу [84, 102].

Загалом, захисні оболонки термоперетворювачів є просторовими тілами складної геометричної форми (див. рис. 5.1) і під час експлуатації перебувають в об'ємному просторово неоднорідному напружено-деформованому стані. Визначення експлуатаційних напружень в таких

оболонках з допомогою простих інженерних співвідношень може призводити до істотних похибок.

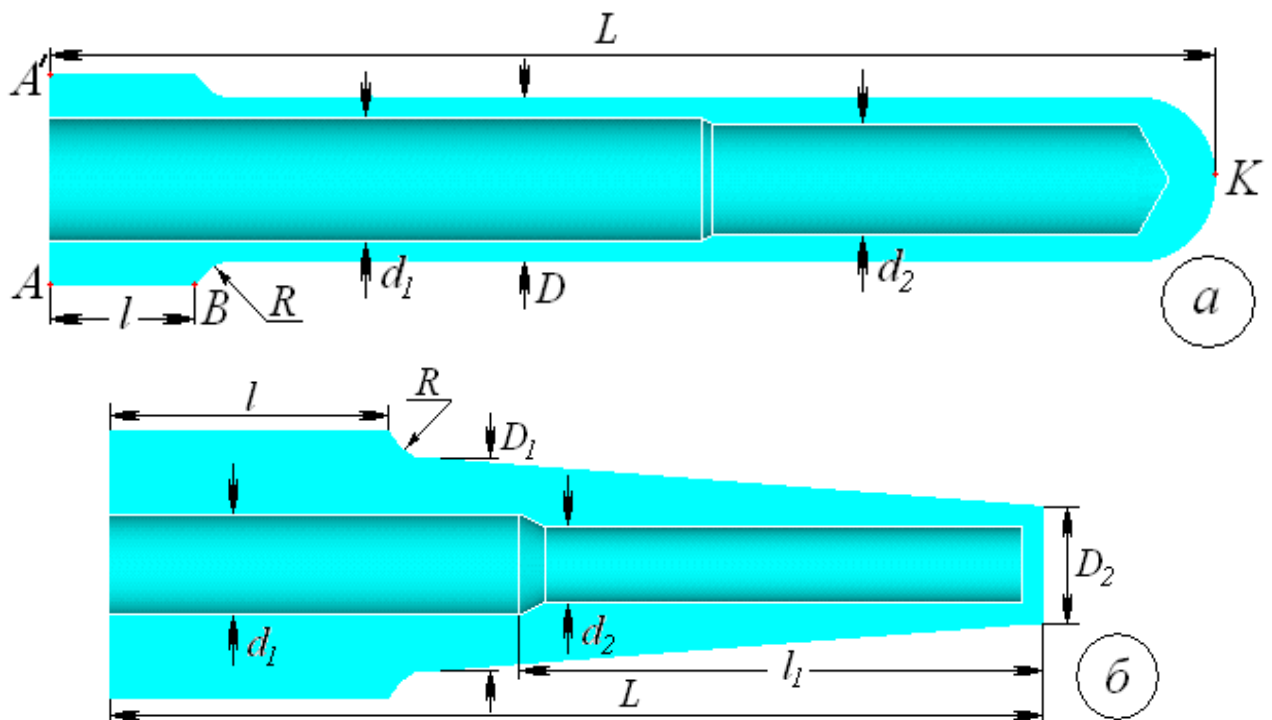


Рис. 5.1. Захисні оболонки типу 716533.001 (а) та 301116.004 (б)

Просторово тривимірний підхід дозволяє врахувати реальну геометричну форму захисних оболонок і, отже, з достатнім ступенем адекватності описати їх напружений стан в умовах, що відповідають експлуатаційним, в тому числі в областях різкої зміни їх геометричної форми, де, як правило, і виникають максимальні напруження. На цій основі можна точніше в порівнянні з існуючими інженерними методиками оцінити експлуатаційний ресурс захисних оболонок і виявити їх найнавантаженіші ділянки. Тривимірний підхід також дозволяє оцінити межі застосування і похибки простих інженерних співвідношень, отриманих для циліндричних оболонок або стрижнів.

У даному розділі подано результати виконаних на основі запропонованої в розділах 2 та 3 методики математичного й числового моделювання досліджень термомеханічної поведінки захисних оболонок термоперетворювачів різних типорозмірів за умов їх експлуатації та гідравлічних випробувань. Визначено коефіцієнти запасу оболонок. Наведено порівняльний аналіз результатів на основі запропонованого

підходу і нормативної методики з використанням простих інженерних співвідношень. На основі даних про напружено-деформований стан досліджено можливість руйнування захисних оболонок від малоциклової втоми.

5.1. Опис розрахункової області, властивостей матеріалів та навантаження

Задачу про визначення напруженого стану захисної оболонки термоперетворювача за умов, що відповідають експлуатаційним, розв'язано в тривимірній області, яку займає оболонка в просторі, з використанням розробленого скінченно-елементного забезпечення (див. розділ 3). Комп'ютерне моделювання процесів деформування захисних оболонок різних типів і розмірів виконано, враховуючи дані про умови їх експлуатації.

Розглянемо спочатку результати, отримані для циліндричної захисної оболонки (зі сталі 08X18H10T [84]) довжиною 80, 100, 120, 160, 200, 250 мм за гідравлічних випробувань під тиском $p_0 = 36$ МПа. Інші геометричні параметри оболонок: $d_1 = d_2 = 10$ мм; $D = 15$ мм; $l = 14$ мм; $R = 5$ мм (див рис. 5.1-а).

При визначенні напружено-деформованого стану оболонок використано осесиметричні біквадратичні скінченні елементи, які точно апроксимують поверхні другого порядку. Вузли скінченно-елементного поділу в циліндричній системі координат в цьому випадку схематично показані на рис. 5.2.

Враховуючи спосіб монтажу оболонки шляхом її вгвинчування у приварений до стінки труби чи ємності оцупок ($ABDE$ на рис. 5.2), процес деформування досліджено для механічної системи «оболонка-оцупок». При цьому, як бачимо, область закріплення механічної системи (див. рис. 5.2) достатньо віддалена від зони різьби в оболонці довжиною l (див. рис. 5.1). Спрощені інженерні підходи обмежуються задаванням умов жорсткого

закріплення оболонки в цій області (на лінії GB , див. рис. 5.2), що істотно завищує максимальні напруження.

Обчислювальний експеримент показав, що оболонка під час гідравлічних випробувань перебуває у стані всебічного стиску. Максимальні стискальні напруження виникають на її внутрішній поверхні (в околі точки H ; див. рис. 5.2). При цьому в більшій частині оболонки інтенсивність напружень σ_i перебуває на одному рівні, істотно зменшуючись (після незначного збурення в околі точки H) в області поєднання оболонки з оцупком (див. рис. 5.3).

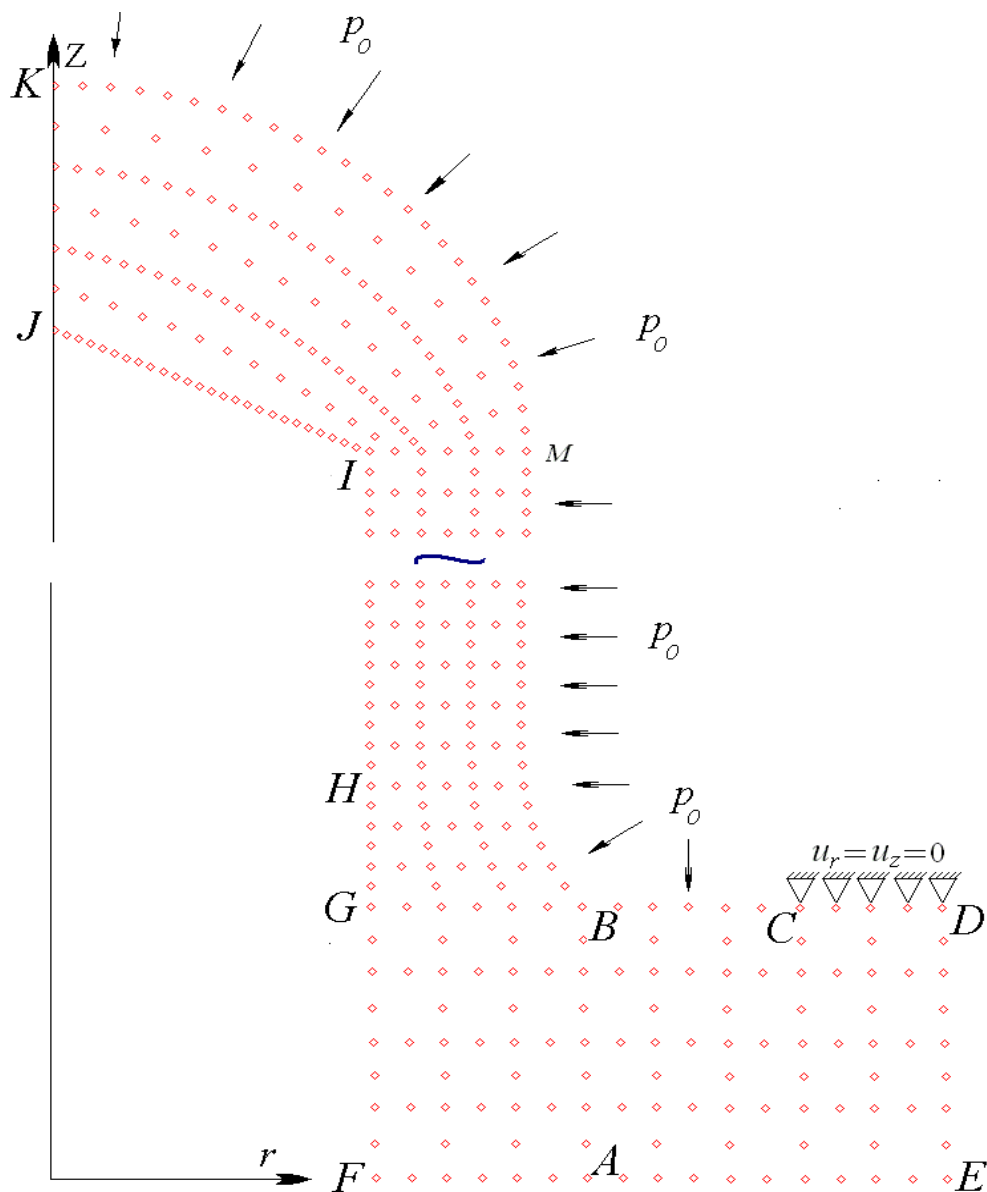


Рис. 5.2. Скінченно-елементна модель захисної оболонки типу 716533.001

Зауважимо, що розв'язування аналогічної задачі за умов защемлення оболонки на рівні початку зони різьби показує, що стискальні напруження в

цій зоні значно більші (за абсолютною величиною), ніж в решті оболонки (на внутрішній поверхні в зоні защемлення осьові напруження $\sigma_{zz} = -191,8$ МПа).

Умови експлуатації оболонки відрізняються від умов при гідравлічних випробуваннях наявністю додаткового динамічного напору, який виникає в результаті обтікання оболонки потоками робочого середовища (рідини чи пари), що рухається зі швидкістю v перпендикулярно до осі оболонки (див. рис. 5.4). Тиск рухомого середовища на поверхню оболонки визначали із закону Бернуллі для стаціонарної течії нестисливої рідини [54], відповідно до якого тиск p повного напору по циліндричному контуру тіла задавали у вигляді:

$$p = p_0 + \zeta(\rho v^2 / 2) \cos \varphi, \quad (5.1)$$

де ρ – густина робочого середовища; p_0 – статичний тиск; $\rho v^2 / 2$ – динамічний тиск; φ - кутова координата точки контуру (див. рис. 5.4); ζ – коефіцієнт опору [54, 102].

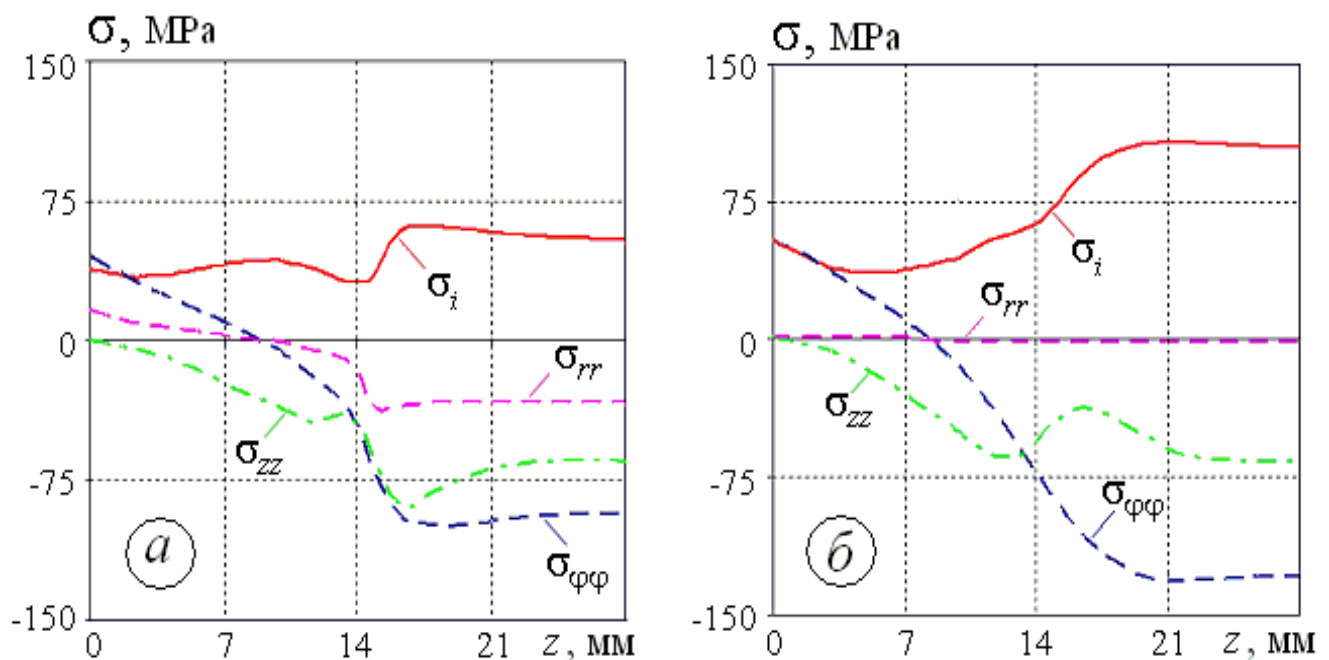


Рис. 5.3. Напруження на зовнішній (а) та внутрішній (б) поверхнях захисної оболонки термоперетворювача при гідравлічних випробуваннях

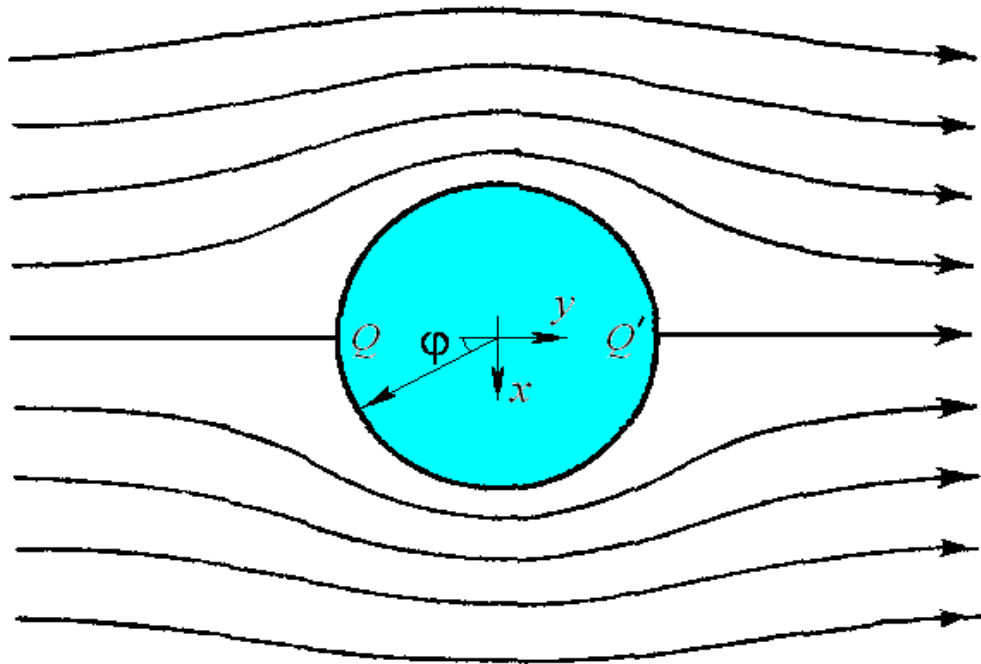


Рис. 5.4. Обтікання тіла циліндричного перерізу ідеальною нестисливою рідиною

5.2. 3D модель циліндричної захисної оболонки

Вузли скінченно-елементної моделі оболонки за умов експлуатації отримано шляхом обертання осесиметричної дискретної моделі за кутовою координатою із заданим дискретним кроком так, щоб тривимірні скінченні елементи були, по можливості, рівносторонніми шестигранниками (див. рис. 5.5).

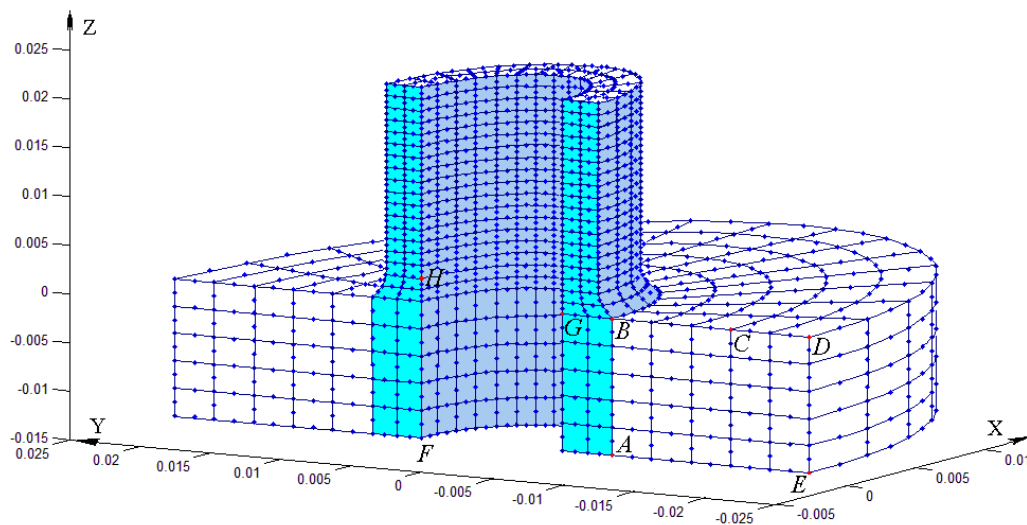


Рис. 5.5. Скінченно-елементна модель механічної системи в околі поєднання оболонки з оцупком (з умов симетрії розглянуто половину області).

При числовому моделюванні використовували біквадратичні скінченні елементи з двадцятьма вузлами (механічна система віднесена до правої декартової системи координат $Oxyz$, вісь Oz якої збігається з віссю оболонки; робоче середовище рухається в напрямі осі Oy). Умови закріплення аналогічні до умов у випадку гідровипробувань. Додатково для вузлів у площині $x = 0$ задано умову симетрії: $u_x = 0$ (відсутність переміщень цієї площини в напрямі осі Ox).

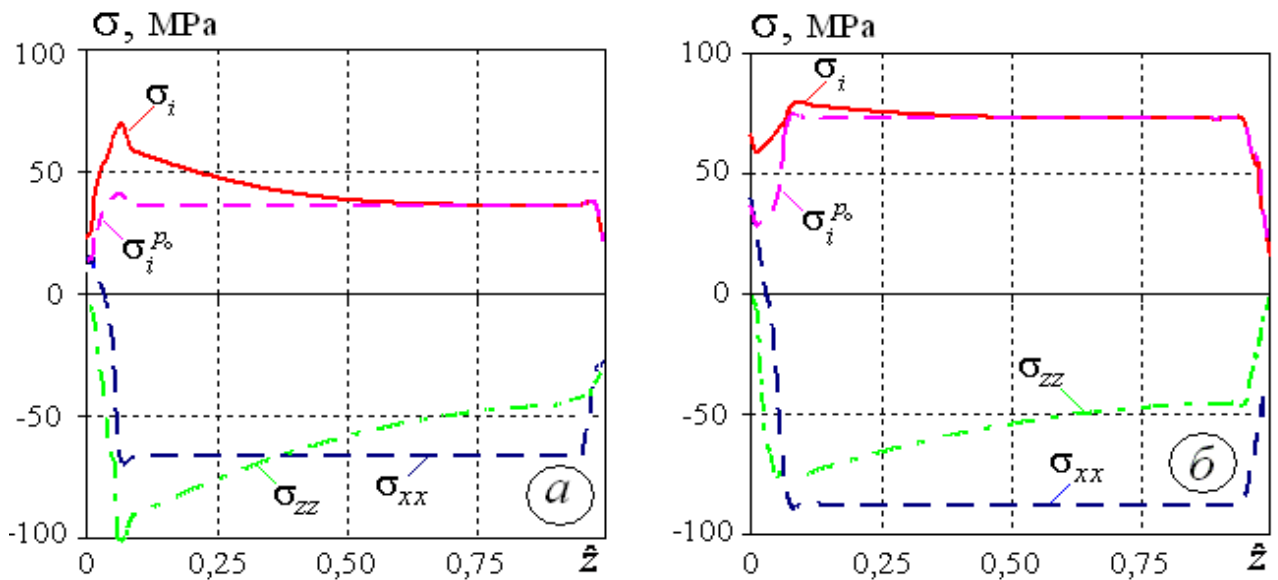


Рис. 5.6. Напруження на зовнішній (а) та внутрішній (б) поверхнях оболонки (при $\varphi = 0$) за умов експлуатації

Аналіз результатів моделювання процесів деформування розглянутих оболонок під час експлуатації ($p_0 = 25$ МПа при температурі води (пари) 365 °С; швидкість потоку води (пари) $v = 4$ (40) м/с для оболонок з $L \leq 160$ мм і $v = 2,5$ (25) м/с – для решти) показав, що найбільш навантаженою є оболонка з максимальною довжиною за швидкості потоку пари $v = 25$ м/с. Саме для такої оболонки показані розподіли напружень на рис. 5.6 (безрозмірна координата $\hat{z} = (z - l)/(L - l)$). Для ілюстрації впливу динамічного напору пари на напруження в оболонці на цьому ж рисунку подано також інтенсивність напружень $\sigma_i^{p_0}$ за впливу лише статичного тиску p_0 (при $v = 0$). Найбільші стискальні напруження виникають на внутрішній поверхні (у перерізі $\varphi = 0$) в околі точки Н ($\sigma_i^{\max} = 79,8$ МПа). При цьому вплив рухомого середовища істотно більший на

зовнішній поверхні; максимальні напруження виникають поблизу початку заокруглення в місці поєднання оболонки з оцупком (див. рис. 5.5).

Виконано дослідження збіжності отриманих числових розв'язків. Верифікацію скінченно-елементних моделей захисних оболонок провели з використанням критерію практичної збіжності, коли порівнюють розв'язки, отримані на різних за густиною скінченно-елементних поділах. Обчислювальний експеримент показав, що доволі точні розв'язки можна отримувати, використовуючи два шари біквадратичних елементів за товщиною оболонки (зокрема, на рис. 5.2 показана тришарова осесиметрична апроксимація, а на рис. 5.5 – двошарова тривимірна). Розв'язки, отримані на двошаровому за товщиною поділі і чотиришаровому відрізняються менш, ніж на 1%.

Отже, захисні циліндричні оболонки розглядуваного типу під час експлуатації працюють у пружній області з максимальною інтенсивністю напружень, яка не перевищує половини значення межі пластичності ($R_{p0,2} = 165$ МПа при $T = 365$ °С [102]). При цьому коефіцієнт запасу найбільш навантаженої оболонки становить, як мінімум 4,5 (межа міцності сталі $\sigma_m^T = 351$ МПа при температурі 365 °С [102]). Враховуючи, що сталь 08X18H10T може істотно зміцнюватись при пружно-пластичному деформуванні [102], фактичний коефіцієнт є більший. Точніше оцінити цей коефіцієнт можна за наявності реальних кривих деформування сталі при температурі експлуатації.

5.3. Конічні захисні оболонки

За великих швидкостей руху потоків робочого середовища використовують конічні захисні оболонки. Досліджено поведінку такого типу оболонок з довжиною 75, 120, 160, 200, 250, 320 мм за тих же параметрів гідровипробувань та експлуатації, що і для циліндричних оболонок при швидкості потоку води (пари) $v = 10$ (120) м/с для оболонок з $L \leq 160$ мм та $v = 7,5$ (100) м/с для решти. Інші параметри оболонок: $d_1 = 8$ мм; $d_2 = 11$ мм; $D_1 = 13$ мм; $D_2 = 29$ мм; $l = 32$ мм; $l_1 = 60$ мм; $R = 20$ мм (див рис. 5.1-б).

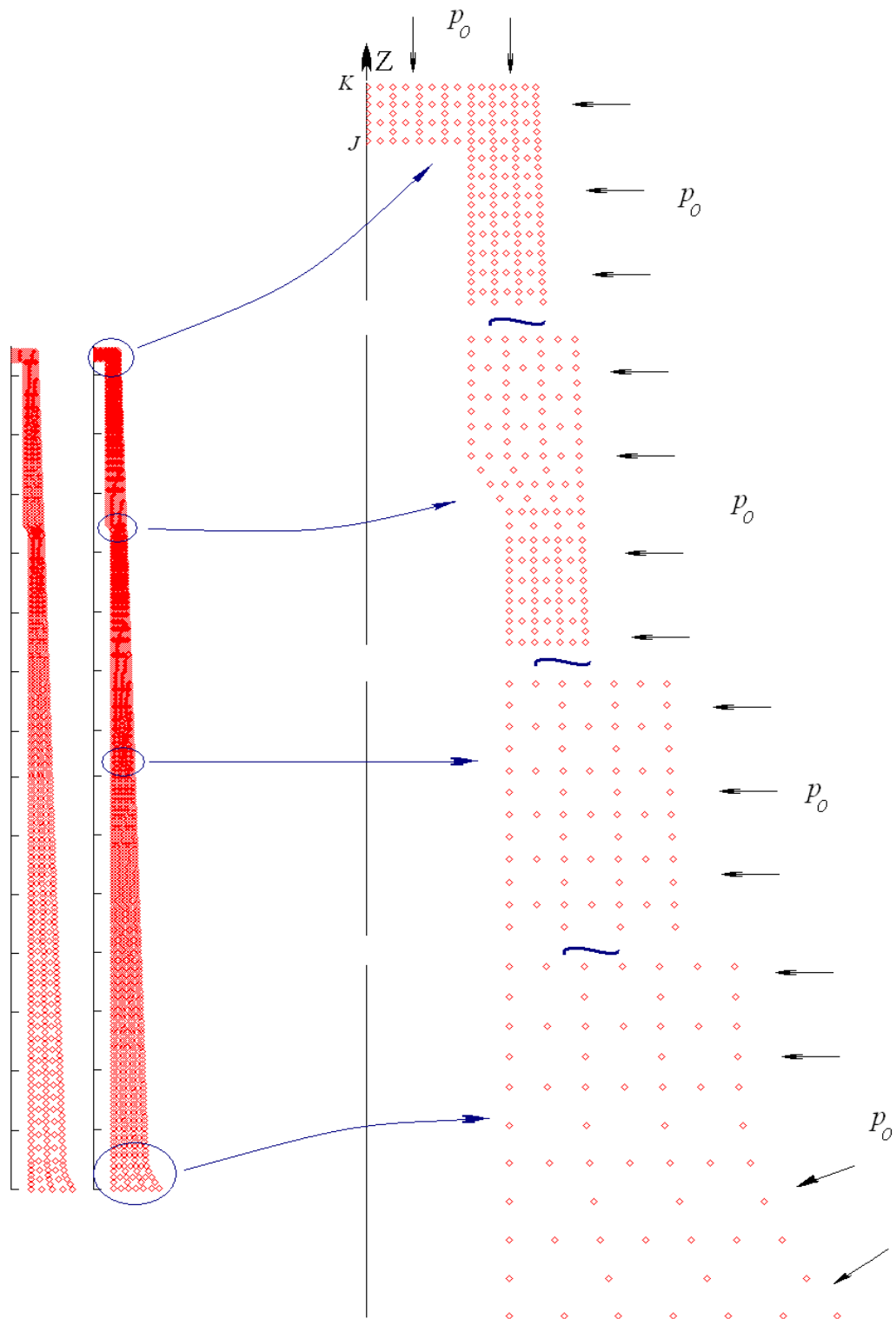


Рис. 5.7. Скінченно-елементна модель конічної оболонки типу 301116.004 у випадку гідровипробувань.

Максимальні стискальні напруження за гідровипробувань виникають на внутрішній поверхні оболонки (відповідна скінченно-елементна модель приведена на рис. 5.7), що ілюструє рис. 5.8. При цьому напруження на зовнішній поверхні істотно менші, ніж на внутрішній. Максимальні стискальні напруження ($\sigma_i^{\max} = 105,8$ МПа)

виникають на внутрішній поверхні приблизно 10 мм нижче ділянки різкої зміни внутрішнього діаметру.

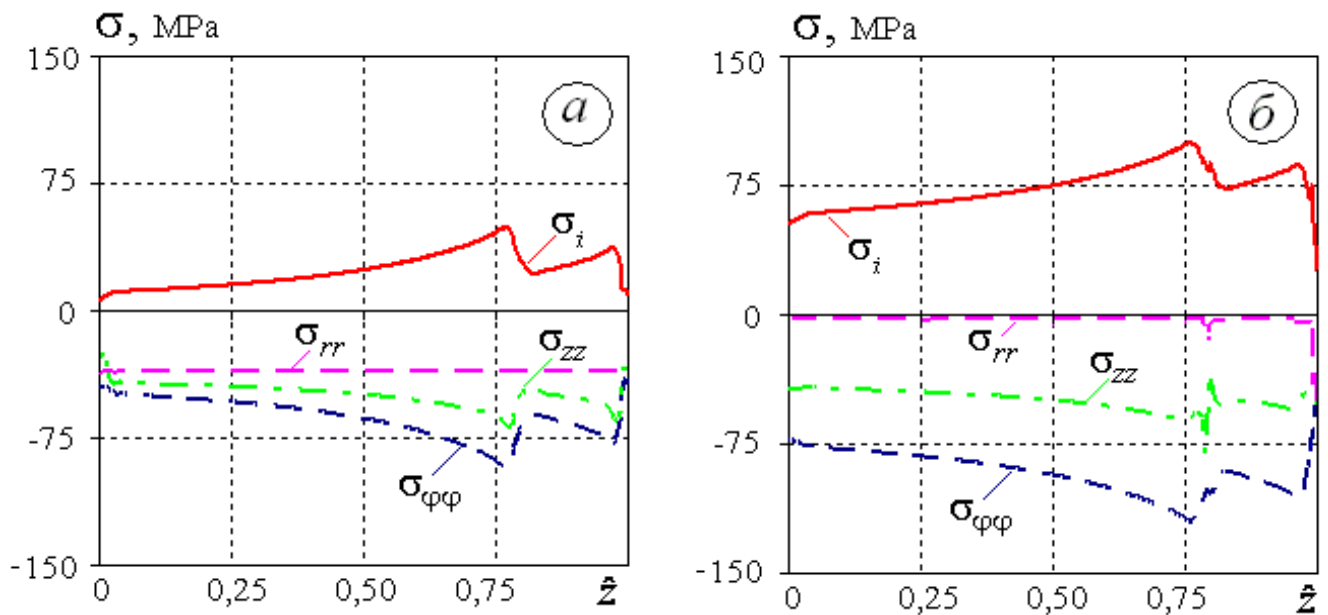


Рис. 5.8. Напруження на зовнішній (а) та внутрішній (б) поверхнях оболонки (при $\varphi = 0$) за гідровипробувань.

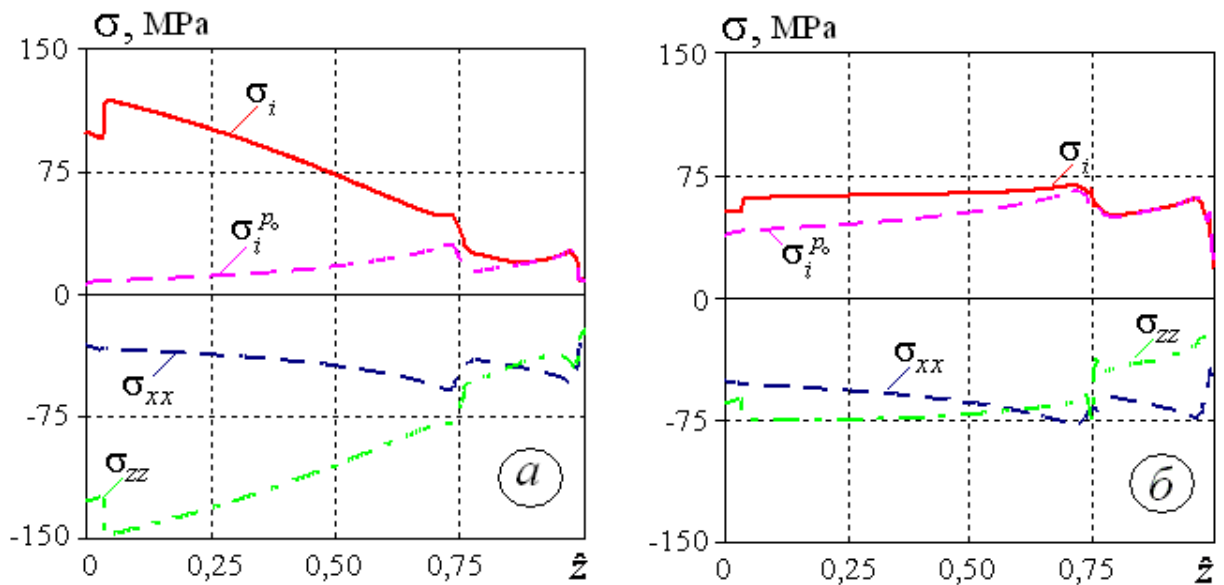


Рис. 5.9. Напруження на зовнішній (а) та внутрішній (б) поверхнях кінчної оболонки довжиною 320 мм в площині ($\varphi = 0$) виникнення максимальних напружень за умов експлуатації.

На рис. 5.9 подано графіки напружень у найбільш навантаженій оболонці кінчного типу ($L=320$ мм) за швидкості потоку пари $v = 100$ м/с (для ілюстрації впливу динамічного напору на напруження в оболонках під час експлуатації на

рисунку показана також інтенсивність напружень $\sigma_i^{p_0}$ за впливу лише статичного тиску p_0).

Як бачимо, за таких швидкостей пари максимальні стискальні напруження у найбільш навантаженій з розглядуваного класу конічних захисних оболонок виникають вже на зовнішній поверхні в околі початку заокруглення в місці поєднання оболонки з оцупком. При цьому коефіцієнт запасу для цієї оболонки за умов експлуатації становить приблизно 1,4 (якщо порівнювати максимальну інтенсивність напружень в оболонці з межею пластичності сталі при температурі експлуатації) і 3 (при співвіднесенні з межею міцності).

Зауважимо, що за простою інженерною методикою [102], яку, як правило, використовують у практиці проектування захисних оболонок, для розглядуваної конічної оболонки довжиною 320 мм за найжорсткіших умов її експлуатації (в потоці пари, яка рухається зі швидкістю 100 м/с при тиску 25 МПа) отримано $\sigma_i^{\max} = 176$ МПа, що більше в півтори рази, ніж напруження, отримані за запропонованою уточненою методикою, і більше, ніж межа пластичності сталі ($R_{p0,2} = 165$ МПа при температурі експлуатації [102]). Такі похибки можуть приводити до якісно невірних результатів при оцінці експлуатаційного ресурсу, що вказує на важливість якнайточнішого визначення максимальних напружень.

Аналогічні дослідження виконанні і для інших типів та розмірів захисних оболонок термоперетворювачів, скінченно-елементні моделі яких показано на рис. 5.10, 5.11.

5.4. Експлуатаційний ресурс захисних оболонок термоперетворювачів

Оцінку ресурсу елементів енергетичного обладнання виконують шляхом визначення їх стану за рівнем накопиченої пошкоджуваності металу (див. напр., [102]). Рівень накопиченої пошкоджуваності при цьому істотно залежить від значень максимальних напружень та амплітуди їх зміни за різних режимів експлуатації обладнання.

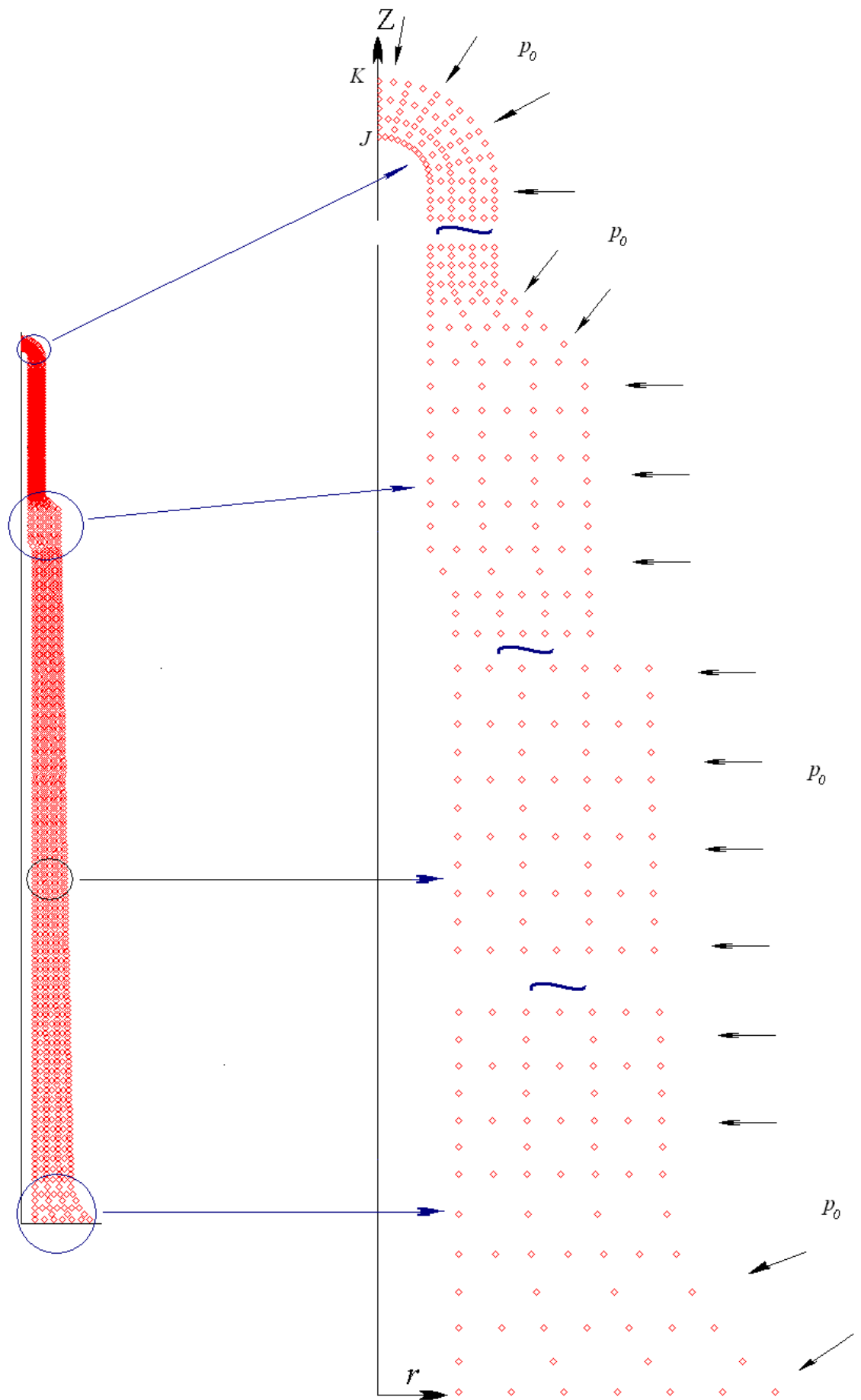


Рис. 5.10. Скінченно-елементна модель захисної оболонки типу 716533.002

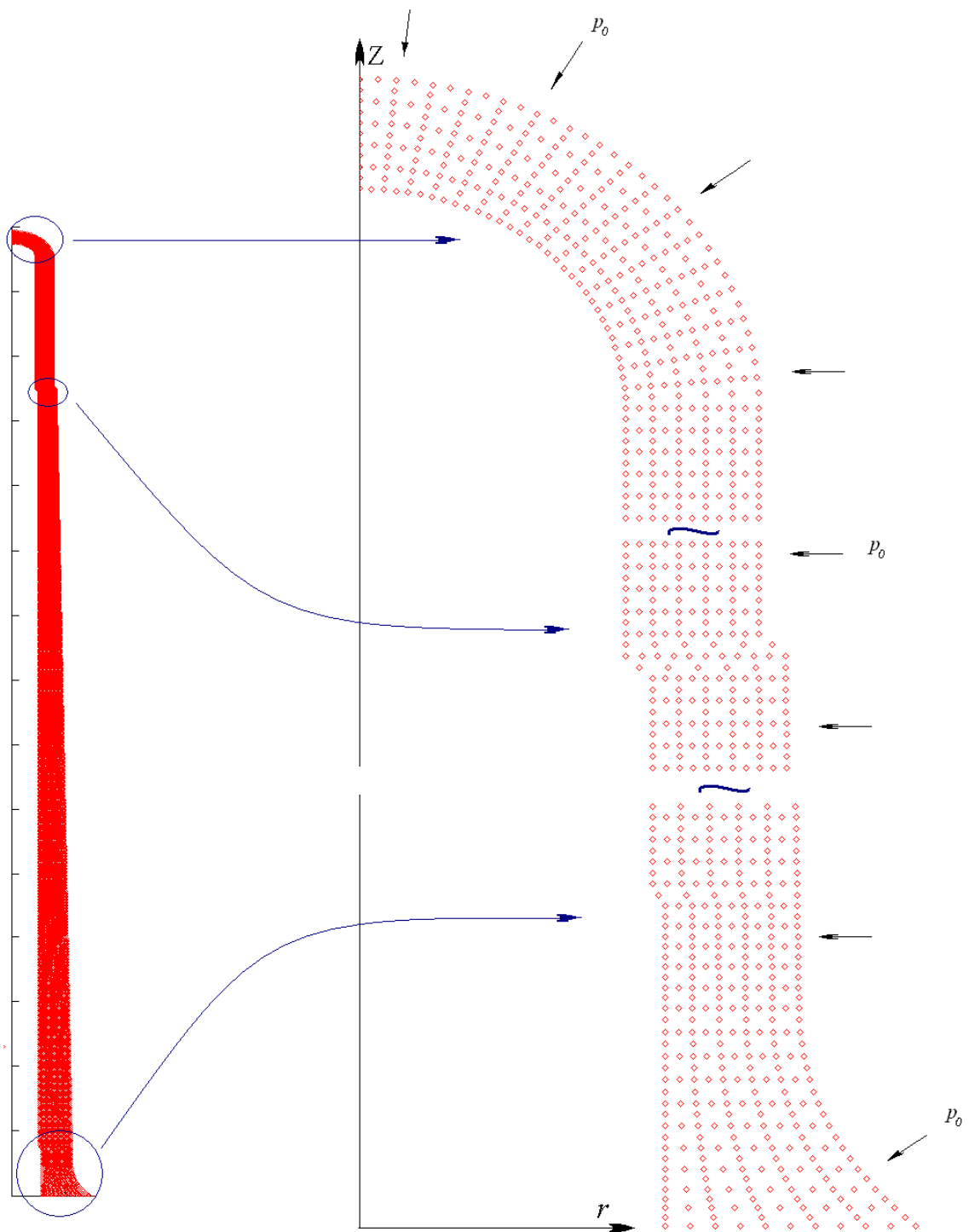


Рис. 5.11. Скінченно-елементна модель захисної оболонки типу 301116.003

Під час експлуатації часто бувають зупинки обладнання (планові чи вимушені), після чого робота знову продовжується на номінальних режимах. За таких повторно-змінних навантажень відбувається поступове накопичення пошкоджень в оболонках. Визначити граничне значення кількості таких циклів навантаження-розвантаження до руйнування за наявності інформації про зміни напруженого стану за один цикл можна, використовуючи

емпіричні формули, які пов'язують амплітуду $[\sigma_a]$ змін максимальних напружень в оболонці за цикл і допустиму кількість таких циклів $[N_0]$.

Зокрема, для сталі 08X18H10T при $[N_0] \leq 10^6$ цей зв'язок має вигляд [102]

$$[\sigma_{aF}] = \frac{E^T e_c^T}{n_\sigma (4[N_0])^m} + \frac{R_{-1}^T}{n_\sigma \left[1 + \frac{R_{-1}^T (1+r)}{R_m^T (1-r)} \right]}; \quad (5.2)$$

де n_σ – коефіцієнт запасу міцності за напруженнями; r – коефіцієнт асиметрії циклу навантаження; m , E^T , e_c^T , R_{-1}^T , R_m^T – характеристики матеріалу.

Аналіз результатів виконаного дослідження міцності оболонок різних типів та розмірів за умов експлуатації показав, що найбільш навантаженими за цих умов є розглянута вище конічна оболонка довжиною 320 мм при швидкості пари 100 м/с. Приймаючи максимальні напруження в цій оболонці ($\sigma_i^{\max} = 118,5$ МПа; див. рис. 5.9-а) за амплітуду $[\sigma_a]$ зміни напружень за один цикл навантаження-розвантаження, зі співвідношення (5.2), визначено граничне значення кількості циклів $[N_0]$ для цієї найбільш навантаженої оболонки термоперетворювача. Для характеристик [102] $m = 0,5$, $E^T = 176,5$ ГПа, $e_c^T = 0,19966$, $R_m^T = 351$ МПа, $R_{-1}^T = 0,4R_m^T$, при $n_\sigma = 2$ та $r = -1$ отримали $[N_0] = 33269$. В результаті аналогічних досліджень для розглянутої вище циліндричної захисної оболонки $[N_0] = 843151$.

Таким чином, для найбільш навантаженої захисної оболонки термоперетворювача максимальна допустима кількість циклів "навантаження-розвантаження" – 33269.

5.5. Висновки до розділу

Виконано розрахунок міцності захисних оболонок термоперетворювачів різних типорозмірів за умов гідравлічних випробувань та стаціонарної експлуатації та встановлено коефіцієнти їх запасу. Зокрема, коефіцієнт запасу для найнавантаженої за умов експлуатації оболонки

становить приблизно 3 (при співвіднесенні з межею міцності). Враховуючи, що сталь 08X18H10T може істотно зміцнюватись при пружно-пластичному деформуванні, фактичні коефіцієнти запасу є більшими, ніж отримані оцінки.

Порівняльний аналіз результатів на основі запропонованого підходу і нормативної методики з використанням простих інженерних співвідношень показав, що для найбільш навантаженої оболонки отримані на основі цих двох методик максимальні напруження за умов експлуатації відрізняються у півтора рази.

Аналіз результатів розрахунків на циклічну міцність показав, що можливість руйнування розглянутих оболонок від малоциклової втоми під час експлуатації малоімовірна (для найнавантаженої під час експлуатації оболонки отримуємо понад 33000 допустимих циклів "навантаження-розвантаження").

Запропонована методика може бути використана як для визначення геометричної форми захисних оболонок при їх проектуванні за чітко окреслених умов експлуатації, так і для визначення параметрів режимів експлуатації (тиску робочого середовища, швидкості його руху тощо) при конкретних зафіксованих параметрах геометричної форми оболонок.

ВИСНОВКИ

Дисертаційна робота містить вирішення важливого науково-прикладного завдання – розроблення методики дослідження міцності біметалевих термоперетворювачів на основі рівнянь тривимірної теплопровідності та неізотермічної термопружності.

У дисертаційній роботі:

1. Сформульовано тривимірну математичну модель для кількісного опису нестационарних теплових і деформаційних процесів у кусково-неоднорідних засобах контактної термометрії складної форми за термосилових навантажень. Модель базується на загальній теорії теплопровідності та неізотермічної термопружності.

2. Розроблено методику числового моделювання процесів теплопровідності й деформування у кусково-неоднорідних тілах складної форми за термосилових навантажень з використанням методу скінченних елементів і сім'ї однокрокових багатопараметричних різницевих алгоритмів.

3. Створено відповідне проблемно-орієнтоване програмне забезпечення для розв'язування розглядуваного класу задач, апробоване на розв'язуванні тестових задач, для яких відомі аналітичні розв'язки.

4. Отримано розв'язки важливих класів задач про визначення та дослідження термомеханічної поведінки конкретних біметалевих термоперетворювачів і захисних оболонок термоперетворювачів різних типорозмірів за умов, що відповідають експлуатаційним, та під час гідравлічних випробувань. Встановлено коефіцієнти запасу захисних оболонок. Виконано порівняльний аналіз результатів, отриманих в межах запропонованої розрахункової схеми і за нормативною методикою, побудованою на основі спрощених моделей, зокрема з використанням теорії балок. Порівняльний аналіз показав, що для найбільш навантаженої захисної оболонки отримані на основі цих двох методик максимальні напруження за умов експлуатації відрізняються у півтора рази.

5. Запропоновано нову версію біметалевого термоперетворювача зі суттєво вищою надійністю та роботоздатністю за довготривалого циклічного теплового навантаження. Завдяки запропонованому конструкційному рішенню (через проміжок між складниками і бурти закріплення) напруження на внутрішній поверхні секцій з більшим коефіцієнтом лінійного температурного розширення і верхній поверхні пластини з буртами з меншим коефіцієнтом не працюють на розрив, тому термоперетворювач зберігає цілісність до температур порядку 760°C - 850°C .

6. Отримано оцінки експлуатаційного ресурсу захисних оболонок на основі запропонованої розрахункової схеми шляхом визначення їх стану за рівнем накопиченої пошкоджуваності металу. Визначено граничне значення кількості циклів навантаження-розвантаження до руйнування.

7. Методика математичного моделювання термомеханічних процесів у конструкціях складної форми і структури за термосилового навантаження використана Державним підприємством "Львівський державний завод "ЛОРТА" та Національною академією сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного (див. Додатки).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Амербаев В.М. Операционное исчисление и обобщенные ряды Лагерра. Алма-Ата : Изд-во "Наука" Казахской ССР, 1974. 182 с.
2. Анатычук Л. Н. Термоэлементы и термоэлектрические устройства К. : Наук. думка, 1979. 256 с.
3. Антосик П., Микусинский Я, Сикорский Р. Теория обобщенных функций: Секвенциальный подход. М. : Мир, 1976. 311 с.
4. Бардин Т., Дробенко Б. Комп'ютерне моделювання процесів деформування біметалевих контактних термоперетворювачів. *Математичні проблеми механіки неоднорідних структур*: зб. наук. праць 11-ї Міжн. наук. конф. / за заг. ред. Р.М. Кушніра і Ю.В. Токового. Львів: Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2024. Вип. 6. 37-38.
5. Бардин Т.П., Дробенко Б.Д. Вимоги до математичної моделі нестационарної задачі теплопровідності конструктивного вузла термометричного пристрою систем озброєння та військової техніки. *Застосування Сухопутних військ Збройних Сил України у конфліктах сучасності*: збірка тез доповідей науково-практичної конф., м. Львів, 31 листопада 2023 р. Львів : НАСВ, 2023. С. 119.
6. Бардин Т.П., Дробенко Б.Д. Напружено-деформований стан контактних біметалевих термоперетворювачів. *Застосування Сухопутних військ Збройних Сил України у конфліктах сучасності*: зб. тез доп. науково-практичної конференції 17 листопада 2022 року. Львів: НАСВ, 2022. С. 286.
7. Бардин Т.П., Дробенко Б.Д. Обґрунтування вибору конструктивної схеми вузла площинного термоперетворювача та постановка задачі розрахунку його термометричних параметрів. *Сучасні проблеми термомеханіки–2021*: зб. наук. праць Міжн. наук. конф. та міні-симпозіумів / за заг. ред. Р.М. Кушніра і Ю.В. Токового. Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України,

2021. С. 39-40.
8. Бардин Т.П., Дробенко Б.Д. Обґрунтування вибору матеріалів для конструктивних елементів механічних контактних термометрів систем озброєння та військової техніки. *Перспективи розвитку озброєння та військової техніки Сухопутних військ*: зб. тез доп. Міжн. наук.-техн. конф. (м. Львів, 17-18 травня 2023 р.). Львів : НАСВ, 2023. С. 15-16.
 9. Бардин Т.П., Дробенко Б.Д. Оптимізація зварного з'єднання штуцера і колектора. *Сучасні проблеми механіки та математики – 2023*: зб. наук. праць / за заг. ред. акад. НАН України Р.М. Кушніра та чл.-кор. НАН України В.О. Пелиха. Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2023. С. 109.
 10. Бардин Т.П., Дробенко Б.Д. Розрахунок термопружних характеристик біметалевого термочутливого елемента систем озброєння та військової техніки. *Застосування Сухопутних військ Збройних Сил України у конфліктах сучасності*: зб. тез доп. наук.-практ. конф. 28-29 листопада 2024 року. Львів : НАСВ, 2024. С. 331.
 11. Бардин Т.П., Дробенко Б.Д. Рівняння нестационарної задачі теплопровідності конструктивного вузла термометричного пристрою систем озброєння та військової техніки. *Збірник наукових праць Військової академії*. Одеса : Військова академія, 2023. № 2 (20). С. 101–107. <https://doi.org/10.37129/2313-7509.2023.20.101-107>.
 12. Бардин Т.П., Дробенко Б.Д. Температурні напруження в біметалевих контактних термоперетворювачах під час їхньої експлуатації. *Прикл. проблеми мех. і мат.*, 2023. Вип. 21. С. 30-42. <https://doi.org/10.15407/armm2023.21.30-42>.
 13. Бардин Т.П., Настишин Ю.А., Ванкевич П.І., Дробенко Б.Д. Термочутливий елемент: *патент на корисну модель* № 119339. Зареєстровано в Державному реєстрі патентів України на корисні моделі 25.09.2017, Бюл. № 18. Заявка № u2017 02496 від 17.03.2017.
 14. Бардин Т.П., Яковлев М.Ю., Ванкевич П.І., Дробенко Б.Д. Термочутливий елемент: *патент на корисну модель* № 119343. Зареєстровано в

- Державному реєстрі патентів України на корисні моделі 25.09.2017, Бюл. № 18. Заявка № u2017 0567 від 20.03.2017.
15. Беляев Н.М., Рядно А.А. Математические методы теплопроводности. К. : Вища школа, 1993. 415 с.
 16. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы теории теплопроводности. В 2-х частях. М. : Высш. шк., 1982. 630 с.
 17. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках. М. : Мир, 1984. 494 с.
 18. Березовская Л.М., Деуль О.И., Юртин И.И. Математические модели тепловых процессов в многослойных цилиндрических стенках. К. : ИМ, 1989. 29 с.
 19. Березовский А.А. Нелинейные задачи теплоизлучающих тел с термически тонким покрытием. *Задачи нестационарной теплопроводности*. К.: Институт математики НАН Украины, 1983. С. 6–11.
 20. Бурак Я.Й., Гачкевич О.Р., Терлецький Р.Ф. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних тіл / під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: в 5-ти т. Т.1: Термомеханіка багатоконпонентних тіл низької електропровідності. Львів : СПОЛОМ, 2006. 300 с.
 21. Вайсфельд Н.Д. Нестационарные задачи пружности для тел с границями и дефектами у цилиндричній та сферичній системах координат: Автореф. дис... д-ра фіз.-мат. наук. Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2005. 32 с.
 22. Вайсфельд Н.Д. Соударение конечного упругого цилиндра с жесткой преградой. *Прикл. механика*, 2007. 43, № 9. С. 74–82.
 23. Варвак П.М., Бузун И.М., Городецкий А.С. Метод конечных элементов: учебное пособие. К.: Вища школа, 1981. 176 с.
 24. Вигак В.М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. К.: Наук. думка, 1988. 312 с.
 25. Вігак В.М., Калиняк Б.М. Термонапружений стан неоднорідного термочутливого циліндра у випадку одновимірного температурного поля. *Нелинейные краевые задачи мат. физики и их применения*. К.: Інститут

- Математики НАН України, 1996. С. 63–64.
26. Воробей В.В., Морозов Е.В., ТатаринOV О.В. Расчет термонапряженных конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1992. 240 с.
 27. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. М.: Мир, 1984. 428 с.
 28. Гарматій Г. Конвективно-променеий нагрів термочутливого безмежного тіла з циліндричною порожниною. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*, 2010. Вип. 11. С. 66–72.
 29. Гачкевич А.Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квазиустановившихся электромагнитных полей. К. : Наук. думка, 1992. 192 с.
 30. Гачкевич О.Р., Дробенко Б.Д. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра: в 5-ти т. Т. 4: Термомеханіка намагнечуваних електропровідних термочутливих тіл. Львів : СПОЛОМ, 2010. 256 с.
 31. Гачкевич О.Р., Мусій Р.С., Мельник Н.Б. Термонапружений стан біметалевої пластини за імпульсної електромагнітної дії в режимі з імпульсним модульним сигналом. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*, 2008. № 6. С. 30–40.
 32. Гачкевич О.Р., Мусій Р.С., Тарлаковський Д.В. Термомеханіка ферромагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди. Львів : СПОЛОМ, 2011. 216 с.
 33. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Визначення напружено-деформованого стану анізотропних термочутливих циліндрів. *Мат. методи і фіз.-мех. поля*, 1998. **41**, №1. С. 73-77.
 34. Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д. Задача теории упругости неоднородных тел. К. : Наукова думка, 1991. 216 с.
 35. Грилицький Д.В., Кизима Я.М. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. Львов: Изд-во Львовского ун-та, 1981. 136 с.
 36. Грилицький Д.В., Євтушенко О.О. Контактні задачі термопружності з

- врахуванням теплоутворення. *Мат. методи і фіз.-мех. поля*, 1992. **35**. С. 93–100.
37. Гринченко В.Т. Задача термоупругости для полуполосы. *Тепловые напряжения в элементах конструкций*, 1973. Вып. 13. С. 86–91.
38. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. Задачи термоупругости для областей, ограниченных перпендикулярными граничными поверхностями. *Тепловые напряжения в элементах конструкций*, 1969. Вып.8. С. 110–125.
39. Гринченко В.Т., Шевченко А.Ю. Об одном подходе к исследованию температурных напряжений в составном цилиндре. *Тепловые напряжения в элементах конструкций*. 1978. Вып. 18. С. 60–65.
40. Демидов С.П. Теория упругости. М. : Высшая школа, 1979. 432 с.
41. Дияк І.І., Чернуха А.Ю. Чисельне дослідження задачі теорії пружності на основі комбінації методів граничних та скінченних елементів. *Вісник ЛДУ. Сер. мех.-мат.*, 1993. Вип. 39. С. 41–46.
42. Дробенко Б.Д., Бардин Т.П. Міцність зварного з'єднання штуцера з колектором первинного пароперегрівника котла. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*, 2023. **59**, № 3. С. 81–85. <http://pcmm.ipm.lviv.ua/pcmm-2023-3u.pdf>. Те ж саме Drobenko B.D., Bardyn T.P. Strength of the Welded Joint of the Connecting Pipe and the Collector of the Boiler Primary Steam Superheater. *Mater Sci* **59**, 335–339 (2023). <https://doi.org/10.1007/s11003-024-00782-x>.
43. Дробенко Б.Д., Бардин Т.П. Міцність та експлуатаційна надійність біметалевих контактних термоперетворювачів. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*, 2023. Вип. 38. С. 99-112. DOI 10.15407/fmmit2023.38.099. <http://www.fmmit.lviv.ua/index.php/fmmit/article/view/342/302>.
44. Дробенко Б.Д., Будз С.Ф. Оцінка міцності та експлуатаційного ресурсу елементів енергообладнання з урахуванням деградації матеріалу, пошкоджень та технології ремонту. Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2021. 368 с.
45. ДСТУ 1.0-93 Державна система стандартизації України. Основні положення. К. : Держстандарт України, 1993. 10 с.

46. ДСТУ 2595-94 Прилади вимірювальні та апаратура функціональної діагностики. Терміни та визначення. К. : Держстандарт України, 1995. 16 с.
47. ДСТУ 2681-94 Метрологія. Терміни та визначення. К. : Держстандарт України, 1994. 14 с.
48. Дубенець В.Г., Хільчевський В.В., Савченко О.В. Основи методу скінченних елементів: навчально-методичний посібник. Чернігів : ЧДТУ, 2003. 346 с.
49. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 384 с.
50. Енциклопедія термометрії / Я.Т. Луцик, Л.К. Буняк, Ю.К. Рудавський, Б.І. Стадник. Львів: НУ "Львівська політехніка", 2003. 428 с.
51. Євтушенко А.А., Уханська О.М. Розподіл температури і переміщень у півпросторі під дією рухомого теплового потоку і конвективного охолодження. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*, 1992. **28**, № 3. С. 18–25.
52. Жук Я.А., Сенченков И.К. Связанное термомеханическое поведение трехслойной вязкопластической балки при гармоническом нагружении. *Прикл. механика*, 2000. **36**, № 2. С. 135–143.
53. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. М. : Мир, 1986. 319 с.
54. Идельчик И.Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М. : Машиностроение, 1992.
55. Канарчук В.Е., Деркачев О.Б., Чигринец А.Д. Термометрическая диагностика машин. К. : Высшая школа, 1985. 168 с.
56. Канарчук В.Е., Дмитриев Н.Н., Деркачев О.Б., Левковец П.Р. Термометрическая диагностика материалов. К. : НТУ, 2001. 236 с.
57. Карнаухов В.Г. Связанные задачи термовязкоупругости. К. : Наук. думка, 1982. 258 с.
58. Карнаухов В.Г., Киричок И.Ф. Связанные задачи теории вязкоупругих пластин и оболочек. К. : Наук. думка, 1986. 224 с.
59. Карслоу Г., Д. Егер. Теплопроводность твердых тел. М. : Наука, 1964. 488 с.

60. Кит Г.С., Кривцун М.Г. Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. К. : Наук. думка, 1983. 278 с.
61. Кит Г.С., Хай М.В. Метод потенциалов в трехмерных задачах термоупругости тел с трещинами. К.: Наук. думка, 1989. 288 с.
62. Кит Г.С., Побережный О.В. Нестационарные процессы в телах с дефектами типа трещин. К. : Наук. думка, 1992. 216 с.
63. Кит Г.С., Мартиняк Р.М. Термопружність кусково-однорідного тіла із закритою міжфазною тріщиною при наявності контактного термоопору між її берегами. *Доп. НАН України*, 1996. № 10. С. 84–88.
64. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. К. : Наук. думка, 1970. 307 с.
65. Коздоба Л.А. Решение нелинейных задач теплопроводности. К. : Наук. думка, 1976. 136 с.
66. Коляно Ю.М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. К. : Наук. думка, 1992. 280 с.
67. Коляно Ю.М. Применение обобщенных функций в термомеханике кусочно-однородных тел. *Мат. методы и физ.-мех. поля*. К.: Наук. думка, 1978. Вып. 7. С. 7-11.
68. Коляно Ю.М., Кулик А.Н. Температурные напряжения от объемных источников. К. : Наук. думка, 1983. 288 с.
69. Коляно Ю.М., Махоркин И.Н. Температурные напряжения в термочувствительном шаре. *Инж.-физ. журн.*, 1984. **47**, №5. С. 848–854.
70. Коляно Ю.М., Попович В.С. Термопружність багатосферних тіл. *ДАН УРСР Сер. А.*, 1975. № 12. С. 1109–1114.
71. Коляно Ю.М., Процюк Б.В., Синюта В.М. Статическая осесимметрическая задача термоупругости для многослойного цилиндра. *Прикл. математика и механика*, 1991. **55**, вып. 6. С. 1035–1040.
72. Коляно Ю.М., Кушнир Р.М. Температурные напряжения в нагреваемых источниками тепла пластинках с двусторонними покрытиями. *Мат. методы и физ.-мех. поля*, 1980. **11**. С. 72–75.
73. Конет І.М., Ленюк М.П. Нестационарні задачі теплопровідності в необмежених тришарових просторових областях. *Крайові задачі для диферен-*

- ціальних рівнянь*: зб. наук. пр. Чернівці : Прут, 2008. Вип. 16. С. 118–134.
74. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 832 с.
75. Кочубей А.А., Рядно А.А. Метод конечных элементов в задачах тепло-массопереноса. Днепропетровск : Изд. Днепропетр. ун-та, 1986. 87 с.
76. Крауч С., Старфильд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М.: Мир, 1987. 328 с.
77. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. М. : Наука, 1967. 500 с.
78. Кушнір Р.М., Николишин М.М., Осадчук В.А. Пружний і пружнопластичний граничний стан оболонок з дефектами. Львів : СПОЛОМ, 2003. 320 с.
79. Кушнір Р., Процюк Б. Температурні поля в шаруватих тілах канонічної форми за лінійної температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності. *Машинознавство*, 2009. № 1 (139). С. 13-18.
80. Кушнір Р.М., Попович В.С., Ясінський А.В. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра: в 5-ти т. Т5: Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. Львів : СПОЛОМ, 2011. 256 с.
81. Кушнір Р.М., Попович В.С. Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / під заг. ред. Я.Й. Бурака, Р.М. Кушніра: в 5-ти т. Т. 3: Термопружність термочутливих тіл. Львів : СПОЛОМ, 2009. 412 с.
82. Кушнір Р.М., Процюк Б.В., Синюта В.М. Квазістатичні температурні напруження в багат шаровому термочутливому циліндрі. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*, 2004. № 4. С. 7–16.
83. Кушнір Р.М., Процюк Б.В., Синюта В.М. Температурні напруження та переміщення в багат шаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*, 2002. № 6. С. 31–38.
84. Линеверг Ф. Измерение температур в технике: справочник. М. : Металлургия, 1980. 544 с.
85. Марчук М.В., Хом'як М.М. Змішана схема методу скінченних елементів

- для розрахунку шаруватих композитних оболонок і пластин. Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2003. 216 с.
86. Метод конечных элементов в механике твердых тел: под ред. А.С. Сахарова, И. Альтенбаха. К. : Вища школа, 1982. 480 с.
87. Метод конечных элементов: теория, алгоритмы, реализация / Толок В.А., Киричевский В.В, Гоменюк С.И., Гребенюк С.Н., Бувайло Д.П. К. : Наук. думка, 2003. 316 с.
88. Метрологія, стандартизація, управління якістю і сертифікація: підручник / Р.В. Бичківський, П.Г. Столярчук, П.Р. Гамула. 2-ге вид. Львів : Видавництво НУ "Львівська політехніка", 2004. 560 с.
89. Метрологія та вимірювальна техніка: підручник / за ред. проф. Є.С. Поліщука. Львів : Бескид Біт, 2003. 544 с.
90. Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М. : Мир, 1981. 216 с.
91. Можаровський М.С. Теорія пружності, пластичності і повзучості. К. : Вища школа, 2002. 308 с.
92. Моссаковский В.И., Макаренко А.Г., Никитин П.И. и др. Прочность ракетных конструкций: учебное пособие для машиностроительных вузов. М. : Высш. шк., 1990. 359 с.
93. Мотовиловец И.А., Козлов В.И. Термоупругость. Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5-ти т. Т. 1. К.: Наук. думка, 1987. 264 с.
94. Мусій Р.С. Динамічні задачі термомеханіки електропровідних тіл канонічної форми. Львів : Растр-7, 2010. 216 с.
95. Мусій Р.С. Рівняння в напруженнях три- дво- та одновимірних динамічних задач термомеханіки. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*. 2000. **36**, №2. С. 20–26.
96. Найфэ А. Введение в методы возмущений. М. : Мир, 1984. 535 с.
97. Новацкий В. Теория упругости. М. : Мир, 1975. 364 с.
98. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. М. : Мир, 1981. 304 с.

99. Оден Дж.Т. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М. : Мир, 1976. 464 с.
100. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справочное пособие. К. : Наук. думка, 1981. 496 с.
101. Підстригач Я.С., Ярема С.Я. Температурні напруження в оболонках. К. : Вид-во АН УРСР, 1961. 212 с.
102. ПНАЭ Г-7-002-87. Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. М. : Энергоатомиздат, 1989. 528 с.
103. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М. : Наука, 1984. 368 с.
104. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках. К. : Наук. думка, 1972. 308 с.
105. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщенная термомеханика. К. : Наук. думка, 1976. 312 с.
106. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М., Семерак М.М. Температурные поля и напряжения в элементах электро-вакуумных приборов. К. : Наук. думка, 1981. 342 с.
107. Подстригач Я.С., Швец Р.Н. Термоупругость тонких оболочек. К.: Наук. думка, 1978. 344 с.
108. Подстригач Я.С., Шевчук П.Р. Температурные поля и напряжения в телах с тонкими покрытиями. *Тепловые напряжения в элементах конструкций*, 1967. Вып. 7. С. 227–233.
109. Постольник Ю.С., Огурцов А.П. Металургійна термомеханіка. Дніпропетровськ : Системні технології, 2002. 633 с.
110. Постольник Ю.С., Огурцов А.П. Нелінійна прикладна термомеханіка. К. : НМЦ ВО МОНЦ, 2000. 280 с.
111. Попов Г.Я., Абдыманапов С.А., Ефимов В.В. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач. Алматы: Руан, 1999. 113 с.
112. Попович В.С., Вовк О.М. Дослідження статичного термопружного

- стану термочутливого нескінченного шару за конвективно-променевого теплообміну з довкіллям. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*, 2013. Вип. 17. С. 146–155.
113. Попович В.С., Вовк О.М., Гарматій Г.Ю. Дослідження статичного термомпружного стану термочутливого порожнистого циліндра за конвективно-променевого теплообміну. *Мат. методи і фіз.-мех. поля*, 2011. **54**, №4. С. 151-158.
114. Попович В.С., Сулим Г.Т. Центральнo-симетрична квазістатична задача термомпружності термочутливого тіла. *Фіз.-хім. механіка матеріалів*, 2004. № 3. С. 62–68.
115. Приборы для измерения температуры контактным способом / под ред. Р.В. Бычковского. Львов : Высшая школа, 1978. 208 с.
116. Процюк Б.В. Статичні задачі термомпружності для шаруватих термочутливих плит за кубічної залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 2010. **53**, № 4. С. 151–161.
117. Процюк Б.В. Квазістатические температурные напряжения в многослойной термочувствительной пластине при нагреве тепловым потоком. *Теоретическая и прикл. механика*, 2003. Вып. 38. С. 63– 69.
118. Процюк Б.В. Моделювання та визначення з використанням побудованих функцій Гріна термомпружного стану шаруватих тіл. Автореф. дис...док. фіз.-мат. наук. Львів : ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України, 2006. 40 с.
119. Процюк Б.В. Функції переміщень Гріна осесиметричних задач пружності для кусково-однорідного півпростору. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.*, 2000. Вип. 57. С.146-153.
120. Процюк Б.В., Верба І.І. Нестационарне одновимірне температурне поле тришарових тіл з плоско-паралельними межами поділу. *Вісник Львів. ун.-ту. Сер. прикл. матем. та інформ.*, 1999. Вип. 1. С. 200-205.
121. Процюк Б.В., Синюта В.М. Застосування функцій Гріна до визначення осесиметричного термомпружного стану багатошарового циліндра. *Прикл. пробл. механіки і математики*, 2009. Вип. 7. С. 121-132.

122. Процюк Б.В., Синюта В.М. Метод функцій Гріна в одновимірних нестационарних задачах теплопровідності багат шарових пластин. *Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.- мат.*, 1998. Вип. 51. С. 76-84.
123. П'янило Я.Д. Адаптивна схема обернення перетворення Лапласа за допомогою ортогональних рядів. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 1999. **45**, № 1. С. 33-38.
124. Розин Л.А. Вариационные постановки задач для упругих систем. Л. : Изд-во Ленинград. ун-та, 1978. 224 с.
125. Савула Я.Г., Шинкаренко Г.А. Метод конечных элементов. Львов : Вища школа, 1976. 80 с.
126. Седов Л.И. Механика сплошной среды: в 2-х т. М. : Наука, 1976. Т. 1. 536 с.
127. Стадник Б.І., Семерак М.М., Дмитраш І.П. Автоматизоване проектування контактних термоперетворювачів. К. : Наук. думка, 1991. 152 с.
128. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. М.: Мир, 1977. 349 с.
129. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007. 716 с.
130. Таблицы физических величин. Справочник / под ред. акад. И. К. Кикоина. М. : Атомиздат, 1976. 1008 с.
131. Терлецький Р.Ф., Турій О.П. Моделювання і дослідження теплопереносу в пластинах з тонкими покриттями за врахування впливу випромінювання. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 2012. **55**, № 2. С. 186–201.
132. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М. : Наука, 1979. 560 с.
133. Турій О. Нелінійна контактнo-крайова задача термомеханіки для опромінюваної двошарової пластини, з'єднаної проміжковим шаром. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*, 2009. Вип. 9. С. 118-132
134. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. М. : Мир, 1977. 189 с.
135. Уилкинсон Дж., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М. : Машиностроение, 1976. 389 с.

136. Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М. : Гостехиздат, 1950. 240 с.
137. Фильштинский Л.А. Моделирование физических полей в кусочно-однородных деформируемых телах: учеб. пособие для студ. и асп. по спец. 01.02.04 – механика деформируемого твердого тела и 08.02.02 – приклад. математика. Сумы : Сум. гос. ун-т., 2001. 450 с.
138. Цыбенко А.С., Крищук Н.Г. Модифицированный метод Краута для решения системы линейных алгебраических уравнений высокого порядка. *Проблемы прочности*, 1983. № 6. С. 62–65.
139. Чекурин В.Ф., Носалик Б. Я. К описанию термомеханических процессов в полупроводниках с учетом переноса энергии излучением. *Мат. методы и физ.-мех. поля*, 1989. **29**. С. 37–41.
140. Шевчук В., Гавриш О. Дослідження температурного поля півпростору з багат шаровим покриттям за променево-конвективного теплообміну. *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології*, 2014. Вип. 20. С. 229–240.
141. Шевчук В.А. Нестационарна одновимірна задача теплопровідності для циліндра з тонким багат шаровим покриттям. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*, 2011. 54, № 2. С. 179–185.
142. Шинкаренко Г.А. Проекційно-сіткові методи розв'язування початково-крайових задач. К. : НМКВО, 1991. 88 с.
143. Aleck J. Thermal stresses in a rectangular plate clamped along an edge. *J. Appl. Mech.*, 1949. 16:118.
144. Allen D.H. Computational aspects of the non-isothermal classical plasticity. *Computers & Structures*, 1982. **15**, № 5. P. 589–599.
145. Allen D.H., Heisler W.E. A theory for analysis of thermoplastic materials. *Computers & Structures*, 1981. **13**. P. 129–135.
146. Almansi E. Use of the stress function in thermoelasticity. *Mem. Reale. Acad. Sci. Torino Ser.*, 1897. 2: 47.
147. Argyris J.H. Die Methode der Finiten Elemente. Band 2. Kraft- und gemichte Methoden, Nichtlinearitäten. Braunschweig: F. Vieweg Sohn, 1987. 614 p.

148. Aziz A.K., Babuska I. Survey lectures on mathematical foundations of finite element method. The mathematical foundations of finite element method with applications to partial differential equations. New York: Academic Press, 1972. P. 3-359.
149. Babuska I., Copps K., Gangaraj S.K., Strouboulis T., Upadhyay C.S. Validation of a posteriori error estimators by numerical approach. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1994. **37**. P. 1073-1123.
150. Babuska I., Rheinbolt W.C. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM J. Num. Anal.*, 1978. **15**. P. 736-754.
151. Babuska I., Szabo B. Finite element analysis. New York: John Wiley & Sons, INC., 1991. 368 p.
152. Banerjee P.K., Deb A. A comparison between isoparametric lagrangian elements in 2d BEM. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1989. Vol. 28. P. 1539–1555.
153. Bathe K.J. Finite Element Procedures Analysis. Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1995. 1037 p.
154. Belytschko T., Chang H.S., Lu Y.Y. A variationally coupled finite element – boundary element method. *Computers & Structures*, 1989. Vol. 33, № 1. P. 17–20.
155. Biot M.A. A general property of two-dimensional thermal stress distribution. *Philos. Mag.*, 1935. VII. P. 540–549.
156. Biot M.A. Thermoelasticity and irreversible thermodynamics. *J. Appl. Phys.*, 1956. **27**(3). P. 240–253.
157. Boley B.A., Weiner J.H. Theory of thermal stresses. New York : Wiley, 1960.
158. Borchardt C.W. Untersuchungen uber die elasticitat fester isotropen korper unter berucksichtigung der Warme. Berlin : Mber Akad Der Wissenschaften, 1873. Vol 9.
159. Brebbia C.A. Boundary Elements X. Vol. 2. Mathematical and computational aspects. Southampton : Springer, 1988. 692 p.
160. Brebbia C.A., Dominguez J. Boundary elements. An introductory course. Southampton: WIT Press, 1994. 322 p.

161. Brebbia C.A., Dominguez J. Boundary element methods for potential problems. *Appl. Math. Modelling*, 1977. Vol. 1, No 7. P. 372–378.
162. Brebbia C.A., Georgiou P. Combination of boundary and finite elements for elastostatics. *Appl. Math. Modelling*, 1979. № 3. P. 212-220.
163. Brebbia C.A., Telles J.C., Wrobel L.C. Boundary element techniques. Theory and applications in engineering. Berlin: Springer, 1984. 466.
164. Chadwick P., Sneddon I.N. Plane waves in an elastic solid conducting heat. *J. Mech. Phys. Solids*, 1958. 6:223.
165. Chaudouet A. Three-dimensional transient thermo-elastic analyses by BIE method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 1987. Vol. 24, № 1. P. 25–45.
166. Changyong Cao, Qing-Hua Qin, Aibing Yu. A Novel Boundary-Integral Based Finite Element Method for 2D and 3D Thermo-Elasticity. *J. of Therm. Stress.*, 2012. V. 35, Issue 10. P. 849-876.
167. Ciarlet P.G., Dret H.Je, Nzengwa R. Junctions between tree-dimensional and two-dimensional linearly elastic structures. *J. Math. pures et appl.*, 1989. № 3. P. 261- 295.
168. Computational Methods for Nonlinear Problems / Ed. by C. Taylor, D.R.J. Owen, E. Hinton. Swansea : Pineridge Press, 1987. 384 p.
169. Computational Plasticity / Ed. by D.R.J. Owen, E. Hinton, E. Onate. *Models, Software and Applications*. Swansea : Pineridge Press, 1989. 1500 p.
170. Davies B. Integral transforms and their applications. Springer, 2002. 367 p.
171. Deresiewicz H. Solutions of the equations of thermoelasticity. *Proceedings of the 3rd U.S. National Congress application mechanics*. Providence : Brown Univ, RI. 1958.
172. Duhamel J.M.C. Second memoire sur les phenomenes thermomecaniques. *J. de l'Ecole Polytechnique*, 1837. **15**. P. 1–57.
173. Dyyak I., Savula Ya. D-adaptive mathematical model of solid body with thin coating. *Математичні студії*, 1997. Т.7, № 1. С. 103-110.
174. Dyyak I.I., Savula Ya., Styahar A. Numerical investigation of plain strain state for a body with thin cover using domain decomposition. *J. of Num. & App. Math.*, 2012. № 3 (109). P. 23–33.

175. Gaul L., Kogl M., Wagner M. Boundary element methods for engineers and scientists. Berlin : Springer, 2003. 488 p.
176. Goto T., Suzuki M. A boundary integral equation method for nonlinear heat conduction problems with temperature-dependent material properties. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 1996. **39**, № 4. P. 823–830.
177. F. de Monte. Transient heat conduction in one-dimensional composite slab. A 'natural' analytic approach. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 2000. V.43. P. 3607 – 3619.
178. Finite Element Methods for Nonlinear Problems / Ed. by P.G. Bergan, K.J. Bathe, W. Wunderlich. Berlin : Springer-Verlag, 1986. 817 p.
179. Finite Element Systems – A Handbook / Ed. by Brebbia C.A. New York : Springer-Verlag, 1985. 767 p.
180. Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis / Ed. by K.J. Bathe, J.T. Oden, W. Wunderlich. Cambridge : MIT, 1977. 1091 p.
181. Fourier J.B.J. Therorie analytique De La Chaleur. *Chez Firmin Didot*. Paris, 1822.
182. Fredriksson B., Mackerle J. Structural Mechanics Finite Element Computer Programs. Linkoping : Advanced Engineering Corp., 1983. 1112 p.
183. Gatewood B.E. Thermal stresses. New York : McGraw-Hill, 1957.
184. Goodier J.N. On the integration of the thermoelastic equations. *Philos. Mag.*, 1937. VII(23):1017.
185. Grigorenko Ya.M., Vasilenko A.T. Determination of the stress-strain state of anisotropic thermosensitive cylinders. *J. of Math. Sci.*, 1999. **97**. P. 3826–3829.
186. Gurtin M.E. The linear theory of elasticity / Ed. by Truesdell C. *Handbuch der Physik* VI a/2. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1972. 1–296.
187. Harmatij G.Y., Kalynyak B.M., Kutniv M.V. Uncoupled quasistatic problem of thermoelasticity for a two-layer hollow thermally sensitive cylinder under the conditions of convective heat exchange. *J. of Math. Sci.*, 2021. V. 256. P. 439–454.
188. Harmatij Halyna, Krol Marta, Popovych Vasyl. Quasi-Static Problem of

- Thermoelasticity for Thermosensitive Infinite Circular Cylinder of Complex Heat Exchange. *Advances in Pure Mathematics*, 2013. Vol.3. No.4. P. 430-437.
189. Hetnarski R. Coupled one-dimensional thermal shock problem for smalltimes. *Arch. Mech.*, 1961. **13**. P. 295–306.
 190. Hetnarski R.B. Solution of the coupled problem of thermoelasticity in the form of series of functions. *Arch. Mech. Stosow.*, 1964. **4**. P. 919–941.
 191. Hetnarski R.B., Ignaczak J. Generalized thermoelasticity: closed-form solutions. *J. Therm. Stress.*, 1993. **16**. P. 473–498.
 192. Hetnarski R.B., Ignaczak J. Mathematical theory of elasticity. London : Taylor & Francis, 2004.
 193. Hetnarski R.B., Ignaczak J. The mathematical theory of elasticity. Boca Raton : CRC Press, 2011.
 194. Hetnarski R.B., Eslami M.R. Thermal stresses. Advanced theory and applications. New York : Springer, 2009.
 195. Hopkinson J. Thermal stresses in a sphere, whose temperature is a function of r only. *Messenger Math.*, 1879. 8:168.
 196. Hsu T.R. The Finite Element Method in Thermodynamics. Boston: Allen & Undwin, 1986. 391 p.
 197. Ignaczak J. Tensorial equations of motion for elastic materials with microstructure. *Trends in elasticity and thermoelasticity*. Groningen: Wolters–Noordh Publ, 1971. 89–111.
 198. Ignaczak J.A. Dynamic nucleus of thermoelastic strains in an elastic infinite space and semi-space. *Bull. Acad. Polon. Ser. Techn.*, 1959. 5:305.
 199. Jeffreys H. The thermodynamics of an elastic solid. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 1930. 26:101.
 200. Kalynyak B.M., Tokovy Yu.V., Yasinsky A.V. Direct and inverse problems of thermomechanics concerning the optimization and identification of the thermal stressed state of deformed solids. *J. of Math. Sci.*, 2019. Vol. 236. No. 1. P. 21–34.
 201. Kim K.S., Noda N. Green's function approach to unsteady thermal stresses in

- an infinite hollow cylinder of functionally graded material. *Acta Mechanica*, 2002. V. 156. P. 145-161.
202. Kleiber M. *Incremental Finite Element Modelling in Non-Linear Solid Mechanics*. John Wiley & Sons, 1989. 187 p.
203. Kushnir R.M., Popovych V.S., Harmatiy H.Yu. Analytic-numerical solution of contact problems of thermoelasticity for thermal sensitive bodies. *Mater. Sci.*, 2001. **37**, No. 6. P. 893-901.
204. Leind M., Oberaigner E., Antretter T. Solution of a time-dependent heat conduction problem by an integral-equation approach. *Comput. Mater. Sci.*, 2012. 52(1). P. 178–181.
205. Leon A. On thermal stresses. *Der Bautechniker*, 1904. 2(6):968.
206. Lesnic D., Elliott L., Ingham D.B. Identification of the thermal conductivity and heat capacity in unsteady nonlinear heat conduction problems using the boundary element method. *J. of Comput. Phys.*, 1996. **126**, № 2. 410–420.
207. Lessen M. Thermoelasticity and thermal shock. *J. Mech. Phys. Solids*, 1956. 5:57.
208. Lighthill J., Bradshaw J. Thermal stresses in turbine blades. *Phil. Mag.*, 1949. 4:770.
209. Liu G.R. *Smoothed Finite Element Methods*. London, New-York : CRC Press, 2010. 672 p.
210. Lockett F.J. Effect of thermal properties of a solid on the velocity of Rayleigh waves. *J. Mech. Phys. Solids*, 1958. 7:71.
211. Lockett F.J. Longitudinal elastic waves in cylinders and tubes - including thermoelastic effects. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 1959. 11:3.
212. Lord H.W., Shulman Y. A generalized dynamical theory of themoelasticity. *J. Mech. Phys. Solid*, 1967. **15**. P. 299–309.
213. Manson S.S. Determination of elastic stresses in gas turbine discs. *NACA-Rep.*, 1947. 871 p.
214. Melan E., Parkus H. *Warmespannungen infolge stationarer temperaturfelder*. Wien : Springer, 1953. 27.
215. Meleshko V.V. Selected topics in the history of the two-dimensional bihar-

- monic problem. *Appl. Mech. Rev.*, 2003. 56(1). P. 33–85.
216. Meleshko V.V. Superposition method in thermal-stress problems for rectangular plates. *Int. Appl. Mech.*, 2005. 41(9). P. 1043–1058.
217. Mindlin R.D., Cheng D.H. Thermoelastic stress in the semi-infinite solid. *J. Appl. Phys.*, 1950. 21:931
218. Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Mech. Anal.*, 1962. 11. P. 415-448.
219. Mykhas'kiv V.V., Khay O.M., Zhang Ch., Boström A. Effective dynamic properties of 3D composite materials containing rigid penny-shaped inclusions. *Waves in Random and Complex Media*, 2010. **20**, No 3. 491–510.
220. Mykhas'kiv V.V., Martin P.A., Kalynyak O.I. Time-domain BEM for 3-D transient elastodynamic problems with interacting rigid movable disc-shaped inclusions. *Comput. Mech.*, 2014. **53**, No. 6. P. 1311-1325.
221. Myklestad N.O. Two problems of thermal stress in the infinite solid. *J. Appl. Mech.*, 1942. 9:136.
222. Neumann F.E. Die gesetze der doppelbrechung des lichts in comprimierten oder ungleichformig erwarmten unkrystallinischen korpern. *Abhandlk Akad Wiss zu Berlin*, 1841. **2**. P. 1–254.
223. Noda N. Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties / Ed. by Hetnarski R.B. *Thermal stresses I*. North-Holland/Amsterdam : Elsevier Science, 1986. P. 391–438.
224. Noda N., Hetnarski RB, Tanigawa Y. Thermal stresses. New York : Taylor & Francis, 2003.
225. Nowacki W. Dynamic problems of thermoelasticity. New York : Springer, 1975.
226. Nowacki W. Thermoelasticity. Oxford-London-New York-Paris : Pergamon Press, 1962.
227. Numerical Methods for Coupled Problems / Ed. by Hinton E., Bettess P., Lewis R.W. Swansea : Pineridge Press, 1981. 1040 p.
228. Numerical Methods for Transient and Coupled Problems / Ed. by Lewis R.W. Swansea : Pineridge Press, 1984. 1006 p.

229. Numerical Methods in Coupled Systems / Ed. by Lewis R.W., Bettess P., Hinton E. Chichester : John Wiley, 1984. 632 p.
230. Owen D.R.J., Hinton E. Finite Element in Plasticity – Theory and Practice. Swansea: Pineridge Press, 1980. 594 p.
231. Parkus H. Instationare warmespannungen. Wien : Springer, 1959.
232. Piessens R. Computing integral transforms and solving integral equations using Chebyshev polynomial approximations. *J. of Comput. and Appl. Math.*, 2000. V. 121, Issue 1-2.
233. Popovych V.S., Harmatii H.Yu., Vovk O.M. Thermoelastic State of Thermo-sensitive Hollow Sphere during Convective-Radiant Heat-Transfer with Environment. *Mater. Sci.*, 2006. Vol. 42, No. 6. P. 724-734.
234. Popovych V.S., Sulym G.T. Centrally-symmetric quasi-static thermoelasticity problem for thermosensitive body. *Mater Sci*, 2004. 40(3). P. 365–375.
235. Prager W. Non-isothermal plastic deformation. *Proc Kong Nederl Akad van Wetenschappen Ser B*, 1958. 61(3). P. 176–182.
236. Rychahivskyy A.V., Tokovy Y.V. Correct analytical solutions to the thermoelasticity problems in a semi-plane. *J. Therm. Stress*, 2008. 31(11). P. 1125–1145.
237. Sabbonandiere J.S., Coulomb J.L. Finite Element Methods in CAD. Co-publ. by Kogan Page and Springer-Verlag, 1972. 220 p.
238. Schaeffer H.G. MSC/NASTRAN Primer, Static and Normal Modes Analysis. Mont Vernon : Schaeffer Analysis, 1979. 365 p.
239. Segerlind L.J. Applied Finite Element Analysis. New York: John Wiley & Sons, 1984. 427 p.
240. Sen B. Note on the stresses produced by nuclei of thermoelastic strain in a semi-infinite solid. *Quart. Appl. Math.*, 1957. 8:365.
241. Sewell G. Analysis of a Finite Element Method: PDE/PROTRAN. Berlin: Springer-Verlag, 1985. 154 p.
242. Signorini A. Finite thermoelastic deformations. *Ann. Mat. Pura. Appl.*, 2002. 30:1.
243. Sladek V., Sladek J. Boundary integral equation method in thermoelasticity.

- Part I: general analysis. *Appl. Math. Model.*, 1983. **7**. P. 241–253.
244. Sladek V., Sladek J., Tanaka M., Zhang C. Transient heat conduction in anisotropic and functionally graded media by local integral equations. *Eng. Anal. Bound Elem.*, 2005. **29**. P. 1047–1065.
245. Smith T.M., Griffith D.V. *Programming the Finite Element Method*. Chichester : John Wiley, 1988. 624 p.
246. Sneddon I.N. *The linear theory of thermoelasticity*. New York : Springer, 1974.
247. State-of-the-art. *Surveys on Computational Mechanics*/ Ed. by Noor A.K., Oden J.T. New York : ASME, SME, 1989. 566 p.
248. State-of-the-art. *Surveys on Finite Element Technology*/ Ed. by Noor A.K., Pilkey W.D. New York : ASME, 1983. 546 p.
249. *Structural Analysis System – Software, Hardware, Capability, Compatibility, Applications*. Vol. 1 / Ed. by Niku-Lari A. Oxford : Pergamon Press, 1986. 300 p.
250. *Structural Mechanics Computer Programs – Surveys, Assessments and Availability* / Ed. by V. Pilkey, K. Sachalski, H. Shaeffer. Charlottesville : University Press of Virginia, 1974. 1106 p.
251. *Structural Mechanics Pre- and Postprocessor Programs – Survey and Availability* / Ed. by Fredriksson B. Mackerle J. Linkoping: Linkoping Institute of Technology, 1977. 872 p.
252. *Structural Mechanics Software Series. Volume 4* / Ed. by Perrone N., Pilkey W. Charlottesville : University Press of Virginia, 1982. 468 p.
253. Tanigawa Y., Kawamura R., Ishida S. Derivation of fundamental equations system of plane isothermal and thermoelastic problems for inhomogeneous solids and its applications to semi-infinite body and slab. *Theor. Appl. Mech.*, 2002. **51**. P. 267–279.
254. Tanigawa Y., Morishita H., Ogaki S. Derivation of systems of fundamental equations for a three-dimensional thermoelastic field with nonhomogeneous material properties and its application to a semi-infinite body. *J. Therm. Stress.*, 1999. **22**. P. 689–711.

255. Tedone O. The general theorems of the mathematical theory of elasticity. *Encyklopedie der matem.* Teilband : Wissenschaften, 1907, vol IV(4), 68.
256. Three-Dimensional Continuum Computer Programs for Structural Analysis/ Ed. by Cruse T.A., Griffin D.S. New York : ASME, 1972. 52 p.
257. Timoshenko S.P. Analysis of bi-metal thermo-stats. *J. Opt. Soc. Am.*, 1925. **11**. P. 233–255.
258. Timoshenko S.P. History of strength of materials: with a brief account of the history of theory of elasticity and theory of structures. New York : McGraw-Hill, 1953.
259. Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of elasticity, 3rd ed. New York : McGraw-Hill International Editions, 1982.
260. Tokovyy Y., Ma C.C. Analytical solutions to the 2D elasticity and thermo-elasticity problems for inhomogeneous planes and half-planes. *Arch. Appl. Mech.*, 2009. 79(5). P. 441–456.
261. Tong P. Rossettos J.N. Finite Element Method – Basic Technique and Implementation. Cambridge: MIT Press, 1977. 332 p.
262. Toupin R. Theories of Elasticity with Couple Stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964. **17**, P. 85-112.
263. Truesdell C. Rational thermodynamics, 2nd edn. New York : Springer, 1984.
264. Truesdell C., Noll W. The non-linear field theories of mechanics / Ed. by Flugge S. *Handbuch der physik III/3*. Berlin-Gottingen-Heidelberg : Springer, 1965.
265. Vigak V.M. Solution of one-dimensional problems of elasticity and thermoelasticity in stresses for a cylinder. *J. Math. Sci.*, 1999. **96**(1). P. 2887–2891.
266. Vihak V, Tokovyi Y, Rychahivskyy A. Exact solution of the plane problem of elasticity in a rectangular region. *J. Comput. Appl. Mech.*, 2002. **3**(2). P. 193–206.
267. Voigt W. Lehrbuch der kristallphysik. Berlin : Teubner, 1910.
268. Wang H., Han M., Yuan F., Xiao Z. Fundamental-Solution-Based Hybrid Element Model for Nonlinear Heat Conduction Problems with

- Temperature-Dependent Material Properties. *Math. Problems in Eng.*, 2013. Article ID 695457. 8 pages.
269. Weiner J.H. A uniqueness problem for coupled thermoelastic problems. *Quart. Appl. Math.*, 1957. 15(1). P. 102–105.
270. Xu Yangjian, Tu Daihui, Du Haiyang. Convective Heat Transfer Steady Heat Conduction and Thermal Stress in a Ceramic /FGM/ Metal Composite EFBF Plate. *J. of Soft.*, 2011. V.6, No 2. P. 201–208.
271. Yasinskyy A.V. Identification of the thermal and thermostressed states of a two-layer cylinder from surface displacements. *Int. Appl. Mech.*, 2008. **44**. P. 34–40.
272. Zamani A., Gracie R., Eslami M.R. Higher order tip enrichment of eXtended Finite Element Method in thermoelasticity. *Comput. Mech.*, 2010. **46**, no. 6. P. 851-866.
273. Zhao X. An efficient approach for the numerical inversion of Laplace transform and its application in dynamic fracture analysis of a piezoelectric laminate. *Solids & Structures*, 2004. V. 41. P. 3653-3674.
274. Zienkiewicz O.C. Finite element method. London: McGraw-Hill, 1977. 788p.
275. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. Finite Element Method: Vol. 1. The Basis. London : Butterworth Heinemann, 2000. 689 p
276. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. Vol. 2. Solid Mechanics. London : Butterworth-Heinemann, 2000. 459 p.
277. Zienkiewicz O.C., Wood W.L., Nine N.W. A unified set of single step algorithm. Part 1: general formulation and applications. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 1984. **20**. P. 1529–1552.

ДОДАТКИ

ЗАТВЕРДЖУЮ

Директор Державного підприємства
Львівський державний завод "ЛОРТА"

Максим ПОЛЯКОВ



20 25 р.

АКТ

впровадження результатів дисертаційного дослідження
БАРДИН Тетяни Петрівни

Комісія в складі:

голови – Головного конструктора, доктора технічних наук, професора
ОЛІАРНИКА Богдана Олексійович;членів – начальника відділу систем управління, кандидата технічних
наук, ЄВТУШЕНКА Костянтина Станіславовича;начальника конструкторсько-технологічного відділу СМУЛКИ Ігоря
Степановича, склала дійсний акт про те, що Державним підприємством
"Львівський державний завод "ЛОРТА" при експлуатації гідравлічного
стенду перевірки затворів 30-мм гармати опробувані наукові результати
дисертаційного дослідження БАРДИН Т.П., а саме методика математичного
моделювання термомеханічних процесів у конструкціях складної форми і
структури за термосилового навантаження. Проведено визначення та
перевірку необхідних допусків деталей в елементах затвору.

Цей акт не являється основою для фінансових розрахунків.

Голова комісії:

Члени комісії:

Б.О. ОЛІАРНИК

К.С. ЄВТУШЕНКО

І.С. СМУЛКА

Затверджую
 тимчасово виконуючий обов'язки
 заступника начальника Національної
 академії сухопутних військ імені гетьмана
 Петра Сагайдачного з наукової роботи,
 полковник

Я. Весельський

„23” вересня 2024 р.

Акт

про використання результатів наукових досліджень представлених в
 дисертаційній роботі аспірантки Інституту прикладних проблем механіки
 і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України
 Бардин Тетяни Петрівни
 в Національній академії сухопутних військ
 імені гетьмана Петра Сагайдачного

Комісія у складі голови тимчасово виконуючого обов'язки начальника
 Наукового центру Сухопутних військ, кандидата військових наук А. Черненко
 та членів провідного наукового співробітника Наукового центру Сухопутних
 військ доктора технічних наук А. Зубкова та старшого наукового співробітника
 доктора філософії зі спеціальності «озброєння та військова техніка» П. Болкота
 склала цей акт про використання результатів одержаних в Інституті прикладних
 проблем механіки і математики (ІППММ) ім. Я.С. Підстригача НАН України.

Цим актом підтверджуємо, що запропонована Т.П. Бардин методика
 математичного й чисельного моделювання термомеханічних процесів в
 складних конструкціях за термосилового навантаження і розроблене на цій
 основі програмне забезпечення використані у 2024 р. в Національній академії
 сухопутних військ імені гетьмана Петра Сагайдачного при оцінці міцності
 термоперетворювачів та захисних гільз різних типорозмірів за умов експлуатації та гідравлічних випробувань. В результаті впроваджена методика використана при побудові комплексу систем технічного діагностування і відновлення озброєнь та військової техніки, які застосовують зведені ремонтно-евакуаційні групи при оперативному відновленні пошкодженої та несправної техніки в інтересах різних угруповань Збройних Сил України і Національної Гвардії України.

Голова комісії



А. Черненко

Члени комісії



А. Зубков



П. Болкот