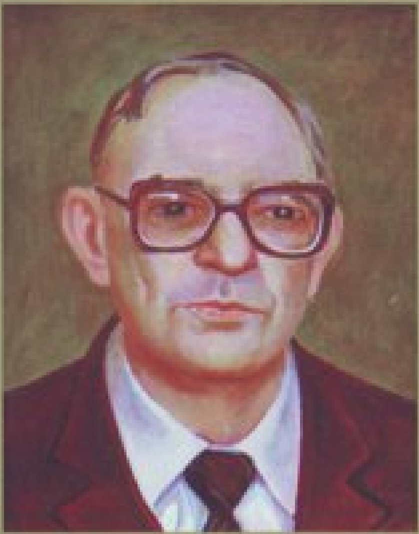


ICS–80

МІЖНАРОДНА МАТЕМАТИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ ім. В. Я. СКОРОБОГАТЬКА

(24–28 вересня 2007, Дрогобич, Україна)

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ
ІМ. Я.С. ПІДСТРИГАЧА
ІНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. ІВАНА ФРАНКА
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ „ЛЬВІВСЬКА ПОЛІТЕХНІКА“
ДРОГОБИЦЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМ. ІВАНА ФРАНКА

ЗАХІДНИЙ НАУКОВИЙ ЦЕНТР НАН УКРАЇНИ І МОН УКРАЇНИ

ICS–80

МІЖНАРОДНА МАТЕМАТИЧНА КОНФЕРЕНЦІЯ ІМ. В.Я. СКОРОБОГАТЬКА

(24 – 28 вересня 2007, Дрогобич, Україна)

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

Львів – 2007

У збірнику вміщено тези доповідей Міжнародної математичної конференції ім. В.Я. Скоробогатька.

Розглянуто питання побудови та дослідження розв'язків звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь з частинними похідними, інтегральних та абстрактних операторних рівнянь, вибрані питання теорії функцій дійсної та комплексної змінних, функціонального аналізу, метричної теорії чисел та обчислювальної математики, їх застосувань до задач математичної та теоретичної фізики і механіки.

Друкується за підтримки Міністерства освіти і науки України

Затверджено до друку вченою радою
Інституту прикладних проблем механіки
і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України
(протокол № 6 від 21.06.2007 р.)

ISBN 978-966-02-4421-4

UKRAINIAN NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES
PIDSTRYHACH INSTITUTE FOR APPLIED PROBLEMS OF MECHANICS AND MATHEMATICS
INSTITUTE OF MATHEMATICS

UKRAINIAN MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
TARAS SHEVCHENKO KYIV NATIONAL UNIVERSITY
IVAN FRANKO LVIV NATIONAL UNIVERSITY
LVIV POLYTECHNIC NATIONAL UNIVERSITY
IVAN FRANKO DROHOBYCH PEDAGOGICAL UNIVERSITY

WESTERN SCIENTIFIC CENTER OF NAS AND MES OF UKRAINE

ICS–80

INTERNATIONAL V.YA. SKOROBOHATKO MATHEMATICAL CONFERENCE

(September 24 – 28, 2007, Drohobych, Ukraine)

ABSTRACTS

Lviv – 2007

Abstracts of international Mathematical Conference dedicated to V.Ya.Skorobogatko are presented in the collection. Problems of construction and investigation of solutions of ordinary and partial differential equations, integral and abstract operator equations as well as selected problems of function theory, functional analysis, metric number theory, and computational mathematics are considered. Some applications to problems of mathematical and theoretical physics and mechanics are presented.

It is confirmed for the press by the academic
council of Pidstryhach Institute for Applied Problems
of Mechanics and Mathematics

ISBN 978-966-02-4421-4

Віталій Якович Скоробогатько
(18.07.1927 – 04.07.1996)

Ця конференція присвячується 80-річчю від дня народження доктора фізико-математичних наук, професора, Заслуженого діяча науки України Віталія Яковича Скоробогатька. Вона продовжує цикл семи попередніх конференцій, започаткованих 1987 р. професором Скоробогатьком В.Я. та академіком Дородніциним А.О.

Професорові В.Я. Скоробогатьку належать фундаментальні результати в багатьох галузях математичної науки (диференціальні рівняння, теорія функцій, теорія чисел, математична фізика). Зокрема, він встановив геометричні умови однозначної розв'язності еліптичних рівнянь, запровадив багатовимірні узагальнення неперервних дробів (гіллясті ланцюгові дроби), створив їх теорію та розробив її застосування до теорії наближення функцій багатьох змінних, теорії чисел та обчислювальної математики; побудував узагальнену евклідову геометрію, в якій „пряма" визначається n точками ($n > 2$).

Напружену наукову працю В.Я. Скоробогатько активно поєднував із науково-організаційною. Важливою складовою цієї роботи було керівництво чотирма відомими далеко за межами Львова науковими семінарами з різних напрямків математики, які об'єднували їх учасників в єдиний творчий колектив. На цих семінарах зростали науково багато українських математиків, у тому числі його учні, серед яких – 25 кандидатів і 9 докторів наук. Із 1969 року і до останніх днів життя В.Я. Скоробогатько очолював відділ теорії диференціальних рівнянь в Інституті прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, постійно піклуючись про розвиток математичної науки в регіоні та в Україні. Він також був організатором наукових конференцій з теорії гіллястих ланцюгових дробів та її застосувань (1975, 1994 рр.), загальної теорії відносності (1993 р.), конференції, присвяченої 90-річчю від дня народження С. Банаха.

За останні роки математичні ідеї В.Я. Скоробогатька виявилися особливо продуктивними й актуальними при побудові диференціально-символьного методу розв'язування крайових задач для рівнянь із частинними похідними, розробленні нових методів дослідження збіжності та стійкості гіллястих ланцюгових дробів, дослідженні умовно коректних задач для рівнянь із частинними похідними, пов'язаних із проблемами малих знаменників, вивченні математичних проблем загальної теорії відносності.

З бігом часу учні й послідовники В.Я. Скоробогатька глибше усвідомлюють його небуденність і неповторність. Виявом їх пам'яті і шани стало відкриття 5 квітня 2006 року меморіальної таблиці на будинку при вул. Дж. Дудаєва, 15 у Львові, де він працював в останні роки життя.

Весь сенс свого життя професор В.Я. Скоробогатько вбачав у вірному служінні науці та своєму народові. Він ніколи не керувався особистими інтересами, а лише інтересами науки і суспільства, яким він щиро віддав свої сили та вміння, і цьому постійно навчав своїх учнів.

Руслан Андрусяк

Львівський національний університет імені Івана Франка
r_andrusyak@yahoo.com

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

В області $G_T = \Big\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T,\ a_1(t) < x < a_2(t)\Big\}$ розглядається квазілінійна гіперболічна система рівнянь

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t,u)\frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(t)F_i(x,t,u), \quad i = \overline{1,n},$$

де невідомими є функції u_i та $f_i(t)$, $i = \overline{1,n}$. Рівняння доповнюються початковими та граничними умовами

$$u_i(x,0) = g_i(x), \quad i = \overline{1,n},\ \ a_1(0) \le x \le a_2(0),$$
$$u_i(a_k(t),t) = h_i^k(t), \quad k = 1,2,\ \ i \in I_k,\ \ 0 \le t \le T,$$
$$I_1 = \Big\{i : \lambda_i(a_1(0),0) > a_1'(0)\Big\}, \quad I_2 = \Big\{i : \lambda_i(a_2(0),0) < a_2'(0)\Big\},$$

а також умовами перевизначення

$$u_i(\gamma(t),t) = \omega_i(t), \quad i = \overline{1,n},\ \ a_1(t) < \gamma(t) < a_2(t),\ \ 0 \le t \le T.$$

Встановлено коректну розв'язність поставленої задачі при малих значеннях часової змінної t за допомогою методу характеристик і теореми Банаха про нерухому точку; при цьому припускається, що вихідні дані є гладкими та ліпшицевими, виконуються умови погодження 0-го і 1-го порядків та деякі додаткові нерівності. Отримано достатні умови глобальної розв'язності задачі.

1. Андрусяк Р.В., Кирилич В.М., Мышкис А.Д. Локальная и глобальная разрешимость квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой // Диф. уравнения. – 2006. – **42**, № 4. – С. 489–503.

Тамара Антонова, Ольга Сусь

Національний університет „Львівська політехніка“
ІППММ ім.Я.С.Підстригача НАН України
sus'@lms.lviv.ua

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ДВОВИМІРНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ СПЕЦІАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ З ДІЙСНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ

Розглядаються двовимірні неперервні дроби (ДНД) вигляду

$$\Phi_0 + \mathop{\mathbf{D}}_{i=1}^{\infty} \frac{a_{ii}}{1+\Phi_i}, \quad \Phi_i = \mathop{\mathbf{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} a_{i+j,i}}{1} + \mathop{\mathbf{D}}_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1} a_{i,i+j}}{1}, \qquad (1)$$

$$a_{i,j} \geq 0, \;\; a_{j,i} \geq 0, \;\; a_{i,i} \geq 0,$$

$i = 0, 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots$, і для їх $n-$ их фігурних підхідних дробів

$$f_n = \Phi_0^{(n)} + \mathop{\mathbf{D}}_{i=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{a_{ii}}{1+\Phi_i^{(n-2i)}}, \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (2)$$

$$\Phi_i^{(k)} = \mathop{\mathbf{D}}_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j+1} a_{i+j,i}}{1} + \mathop{\mathbf{D}}_{j=1}^{k} \frac{(-1)^{j+1} a_{i,i+j}}{1}, \quad i = 0, 1, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

встановлено нерівності вигляду

$$f_{4p-3} \leq f_{4p+1} \leq f_{4q+3} \leq f_{4q+1}, \quad p, q = 1, 2, \ldots,$$

та

$$f_{4p} \leq f_{4p+1} \leq f_{4p+4} \leq f_{4q+3} \leq f_{4q+2}, \quad p, q = 0, 1, \ldots.$$

Доведено, що послідовності $\{f_p\},\ p = 0, 1, 4, 5, \ldots, 4s, 4s+1, \ldots$, та $\{f_q\},\ q = 2, 3, 6, 7, \ldots, 4k+2, 4k+3, \ldots,\ s, k = 0, 1, 2, \ldots$, є збіжними, а також встановлено достатні умови збіжності ДНД (1) та отримано оцінку для $|f_n - f_{4p+1}|$, $n > 4p+2$, де $f_n,\ n = 1, 2, \ldots$, визначаються формулою (2).

Alexander Antoniouk, Alexandra Antoniouk

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine
antoniouk@imath.kiev.ua

HIGH ORDER REGULARITY OF NON-LIPSHITZ HEAT DIFFERENTIAL EQUATIONS ON MANIFOLDS AND ANHARMONIC SPIN LATTICES

The classical Cauchy-Liouville-Picard scheme was initially designed for equations with Lipshitz coefficients. It allows to construct their solutions and study their behaviour with respect to different parameters. In the finite dimensional case this scheme may be also applied to the study of equations with locally Lipshitz coefficients.

On the contrary, in the infinite dimensional case nonlinear mappings are mostly non-Lipshitz even in bounded domains. This problem led, in particular, to the development of nonlinear analysis that applies monotone estimates for construction of solutions and study of their continuous dependence on initial data.

We demonstrate in this talk how further properties of solutions to globally non-Lipshitz differential equations, like their C^∞-regularity on initial data, can be investigated.

We consider a nonlinear heat differential equation on some base space $\mathbb{X}$. This equation may contain random terms. Two cases of the base space $\mathbb{X}$ are considered: $\mathbb{X}$ being a finite dimensional noncompact Riemannian manifold M or an infinite dimensional space $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d} = \prod_{k\in\mathbb{Z}^d}\mathbb{R}$ over the d-dimensional spin lattice $\mathbb{Z}^d$.

We find sufficient conditions on non-Lipshitz coefficients A_0, $A_\alpha$that lead to C^∞-regularity of solutions with respect to the initial data. These conditions account the structure of base space $\mathbb{X}$, like its curvature or structure of the corresponding lattice anharmonic spin system.

The proposed method of research is based on a class of nonlinear a priori estimates of solutions of corresponding variational equations. Such estimates develop standard monotone methods and apply a special symmetry of variational equations: **$\mathbf{N^{th}}$ order variation is proportional to $\mathbf{N^{th}}$ power of the $\mathbf{1^{st}}$ order variation**.

Applications to the second order heat equations are also discussed.

Володимир Асташкін[1], Тереза Козакевич[1],
Анна Равська-Скотнічни[2]

[1]ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України
[2]Політехніка Опольська, Польща

МЕТОДИКА ЧИСЛОВОГО РОЗРАХУНКУ ЗАЛИШКОВИХ СТРУКТУРНИХ НАПРУЖЕНЬ

На базі методу скінченних елементів розроблено варіант методики розрахунку фазового складу та обумовленого ним напруженого стану сталевих тіл за умов протікання у них нерівноважних поліморфних перетворень. Задачу розрахунку структурного і термонапруженого стану розв'язано поетапно. На першому етапі формулюється та обчислюється нелінійна крайова задача теплопровідності при заданих умовах теплообміну з навколишнім середовищем. На другому етапі на основі розв'язків задачі теплопровідності знаходиться фазовий склад тіла. На третьому - визначено напружений стан у тілі. Методика розрахунку термонапруженого стану використовує МСЕ на першому та третьому етапах: знаходимо числовий розв'язок задачі теплопровідності та задачі механіки про визначення напруженого стану тіла з заданим просторово неоднорідним розподілом фаз. З використанням розробленої методики досліджено процес формування фазового складу і розподіл залишкових напружень у тонкій пластині при нагріві системою рухомих розподілених джерел. При локальному нагріві нормально круговими рухомими джерелами області з максимальною градієнтністю новоутворених фаз є ділянками концентрації напружень і зміни властивостей матеріалу. Відсотковий вміст фаз та їх просторова градієнтність залежать від параметрів джерела нагріву. Розроблений варіант методики та його програмне забезпечення використані для визначення оптимальних за критерієм фазового складу технологічних параметрів режимів локального нагріву.

Владислав Бабенко, Галина Жиганова

Днепропетровский национальный университет
galina_zhyganova@bk.ru

О НАИЛУЧШИХ L_2-ПРИБЛИЖЕНИЯХ ФУНКЦИЙ ПРИ ПОМОЩИ ВЕЙВЛЕТ МЕЙЕРА

Пусть $0 < \varepsilon \le 1/3$ и пусть непрерывная функция $\theta(\xi) = \theta_\varepsilon(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$ удовлетворяет следующим условиям: $0 \le \theta(\xi) \le 1, \theta(\xi) = \theta(-\xi)$; $\theta(\xi) = 1$ при $|\xi| \le (1-\varepsilon)\pi$ и $\theta(\xi) = 0$ при $|\xi| \ge (1+\varepsilon)\pi$; $\theta^2(\pi-\xi)+\theta^2(\pi+\xi) = 1$ при $\xi \in [0,\pi]$. Вейвлетом Мейера называют функцию $\psi^\varepsilon(\xi) \in L_2(\mathbb{R})$, которая в образах Фурье определяется равенством $\widehat{\psi^\varepsilon}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}}\sqrt{\theta^2(\xi/2) - \theta^2(\xi)}$. Пусть также $\psi^\varepsilon_{kj}(\xi) = 2^{\frac{k}{2}}\psi^\varepsilon(2^k\xi - j)$. Для $n \in \mathbb{Z}$ и $f \in L_2(\mathbb{R})$ положим $E^\varepsilon_n(f)_2 = \left\| f(\cdot) - \sum_{k=-\infty}^{n-1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} (f, \psi^\varepsilon_{kj})\psi^\varepsilon_{kj}(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R})}$, $\omega(f,\delta)_2 = \sup\limits_{|u|\le\delta} \|f(\cdot+u) - f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$, $\delta \ge 0$. Нами доказана

Теорема. *Для любой функцииf $\in L_2(\mathbb{R})$, неэквивалентной нулю, и любого $n \in \mathbb{Z}$ справедливы неравенства*

$$E^\varepsilon_n(f)_2 < \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ 2^{n-1}(1-\varepsilon)\pi \int_0^{\frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}} \omega(f,u)_2^2 \sin\left(2^n\pi(1-\varepsilon)u\right) du \right\}^{1/2},$$

$$E^\varepsilon_n(f)_2 < \frac{1}{\sqrt{2}} \omega\left(f, \frac{1}{2^n(1-\varepsilon)}\right)_2.$$

При любом фиксированном $n \in \mathbb{Z}$ константу $\frac{1}{\sqrt{2}}$ в правых частях неравенств нельзя заменить меньшей.

Отметим, что устремляя ε к 0, получим результаты относящиеся к вейвлетам Шеннона-Котельникова. Полученные результаты дополняют известные результаты Н. И. Черных [1] и В. Ю.Попова [2].

1. Черных Н. И. О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. Заметки. — 1967. — **2**, № 5. — С. 513-522.
2. Попов В. Ю. О наилучших среднеквадратических приближениях целыми функциями экспоненциального типа // Изв ВУЗов. Матем. — 1972. — № 6. — С. 65-73.

Владислав Бабенко, Сергей Пичугов

Днепропетровский национальный университет

НОВЫЕ ТОЧНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ТИПА КОЛМОГОРОВА ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В докладе будет дан обзор известных результатов о точных неравенствах типа Колмогорова для функций многих переменных, а также представлен ряд новых точных неравенств такого типа. В частности будут приведены точные неравенства, оценивающие C-норму смешанной производной (вообще говоря дробного порядка) через C-норму функции и гельдеровы нормы самой функции или ее частных производных по каждой переменной; неравенства для дробных степеней оператора $-\Delta$, где Δ – оператор Лапласа, и другие. В качестве примера полученных результатов приведем следующую теорему, которая интерполирует известные результаты Коновалова и Тимошина.

Пусть $C(\mathbb{R}^2)$ – пространство ограниченных непрерывных функций $x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ с нормой $\|x\|_\infty := \sup\{|x(u)| \ : \ u \in \mathbb{R}^2\}$. Положим $x^{(2,0)} := \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}$, $x^{(0,2)} := \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2}$ и $x^{(1,1)} := \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2}$. Обозначим через $C^2(\mathbb{R}^2)$ пространство всех функций $x \in C(\mathbb{R}^2)$ таких, что производные $x^{(2,0)}$, $x^{(0,2)}$ непрерывны.

Для $t \in \mathbb{R}$ обозначим через $\Delta_{te_j} x(u)$ разность функции $x(u)$ по переменной u_j с шагом t, т.е. $\Delta_{te_j} x(u) := x(u+te_j) - x(u)$, где $\{e_1, e_2\}$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^2$.

Для заданных $\beta_j \in (0,1]$, $j = 1,2$, положим

$$H_j^{\beta_j} := \left\{ x \in C(\mathbb{R}^2) \ : \ \|x\|_{H_j^{\beta_j}} = \sup_{t \neq 0} \frac{\|\Delta_{te_j} x(\cdot)\|_\infty}{|t|^{\beta_j}} < \infty \right\}.$$

Теорема. *Пусть $\beta_1, \beta_2 \in (0,1]$ и функция $x \in C^2(\mathbb{R}^2)$ такова, что $x^{(2,0)} \in H_1^{\beta_1}$, $x^{(0,2)} \in H_2^{\beta_2}$. Тогда*

$$\|x^{(1,1)}\|_\infty \le 2^{3\gamma_0 - 1} \frac{\gamma_1^{\gamma_1} \gamma_2^{\gamma_2}}{\gamma_0} \|x\|_\infty^{\gamma_0} \left\| x^{(2,0)} \right\|_{H_1^{\beta_1}}^{\gamma_1} \left\| x^{(0,2)} \right\|_{H_2^{\beta_2}}^{\gamma_2},$$

где

$$\gamma_0 = 1 - \gamma_1 - \gamma_2, \ \gamma_1 = \frac{1}{\beta_1 + 2}, \ \gamma_2 = \frac{1}{\beta_2 + 2}.$$

Vladyslav Babenko[1,2], Dmytro Skorokhodov[1]

[1] Dnepropetrovsk National University
[2] Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine

ON THE BEST WEIGHTED INTERVAL QUADRATURE FORMULAE ON CERTAIN CLASSES OF PERIODIC FUNCTIONS

Let L_1 be the space of 2π-periodic functions $f : \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ with usual norm $\|\cdot\|_1$. Let $n \in \mathcal{N}$ and $0 < h < \pi/n$. Let us call the function $p = p(t)$ defined on an interval $[-h, h]$ as *weighted function* if it is non-negative and $\|p\|_1 = 1$. Denote by $K_n(p)$ the set of all possible quadrature formulae of the form

$$\kappa^p(f) = \sum_{j=1}^{n} a_j \int\limits_{x_j-h}^{x_j+h} f(t)p(t - x_k)\,dt,$$

where $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_1 + 2\pi$ and $a_j \in \mathcal{R}$. Let

$$\kappa_n^p(f) = \sum_{j=1}^{n} \frac{2\pi}{n} \int\limits_{2\pi j/n-h}^{2\pi j/n+h} f(t)p\left(t - \frac{2\pi j}{n}\right)\,dt.$$

For $r \in \mathcal{N}$ denote by W_1^r the class of functions f that have locally absolutely continuous derivative $f^{(r-1)}$ and such that $\|f^{(r)}\|_1 \le 1$.

For $f \in W_1^r$ and $\kappa^p \in K_n^p$ set $R(f, \kappa^p) = \int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dt - \kappa^p(f)$. Let

$$R(W_1^r, \kappa^p) = \sup_{f \in W_1^r} |R(f, \kappa^p)| \quad \text{and} \quad \mathcal{E}(W_1^r, K_n^p) = \inf_{\kappa^p \in K_n^p} R(W_1^r, \kappa^p).$$

Let $m \in \mathcal{N}$ and let N_m be the B-spline of the order m. Set

$$p_m(t) = \frac{N_m\left(\frac{2h}{m+1}\left(t - \frac{m+1}{2}\right)\right)}{\|N_m\left(\frac{2h}{m+1}\left(\cdot - \frac{m+1}{2}\right)\right)\|_1}.$$

We have proved the following

Theorem. *Let $n, r, m \in \mathcal{N}$, $0 < h < \pi/n$. Then*

$$\mathcal{E}(W_1^r, K_n^{p_m}) = R(W_1^r, \kappa_n^{p_m}).$$

Владислав Бабенко, Сусанна Спектор

Днепропетровский национальный университет
sanaspek@yandex.ru

ОБ ОЦЕНКАХ ВЕЙВЛЕТ-КОЭФИЦИЕНТОВ НА НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ

Пусть $m \in \mathbb{N}$ и $P_{m-1}(x) = \sum\limits_{k=0}^{m-1} \binom{m-1+k}{k} x^k$. Фильтрами Добеши называют тригонометрические полиномы $d_m(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum\limits_{l=0}^{2m-1} h_m(l) e^{il\omega}$, $h_m(l) \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие равенствам $|d_m(\omega)|^2 = \left(\cos^2 \frac{\omega}{2}\right)^m \times P_{m-1}\left(\sin^2 \frac{\omega}{2}\right)$. Функция $\varphi^{D_m}(\omega)$, которая определяется в образах Фурье соотношением $\widehat{\varphi^{D_m}}(\omega) = \prod\limits_{l=1}^{\infty} d_m(\omega 2^{-l})$, является ортогональной масштабирующей функцией. Соответствующий вейвлет $\psi^{D_m}(\omega)$, который определяется формулой $\widehat{\psi^{D_m}}(\omega) = e^{-\frac{i\omega}{2}} \overline{d_m\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)} \widehat{\varphi^{D_m}}\left(\frac{\omega}{2}\right)$, порождает ортонормированный базис в $L_2(\mathbb{R})$ (см [1]).

Для $k \in \mathbb{N}$ и $p, q \in (1, \infty)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, положим

$$W_{2,p}^k = \left\{ f \in L_2(R) : \|f\|_{H_p^k} = \|(i\omega)^k \hat{f}(\omega)\|_p \le 1 \right\}$$

и

$$C_{k;p,q}(\psi^{D_m}) = \sup_{f \in W_{2,p'}^k} \frac{|(\psi^{D_m}, f)|}{\|\widehat{\psi^{D_m}}\|_q}.$$

Нами доказана следующая

Теорема. *Пусть* $1 < p < \infty$, k *– неотрицательное целое. Тогда*

$$\lim_{m \to \infty} C_{k;p,q}(\psi^{D_m}) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}}{\pi^k} \left(\frac{1 - 2^{1-pk}}{pk - 1} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

При $p = q = 2$ эта теорема доказана в [2].

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. — 463 с.
2. Ehrich S., On the estimation of wavelet coefficients// Advances in Computational Mathematics.— 2000.— 13. — P. 105-129.

Наталія Бабич, Юрій Головатий

University of Bath, United Kingdom
Львівський національний університет імені Івана Франка

ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛІУВІЛЯ ІЗ КОНТРАСТНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

У доповіді розповідатиметься про асимптотичні властивості спектра та характер біфуркації власних підпросторів крайової задачі

$$(k_\varepsilon(x)\, y_\varepsilon')' + \lambda^\varepsilon \rho_\varepsilon(\gamma, x)\, y_\varepsilon = 0, \quad x \in (a, b),$$
$$\alpha_1\, y_\varepsilon'(a) + \alpha_0\, y_\varepsilon(a) = 0, \quad \beta_1\, y_\varepsilon'(b) + \beta_0\, y_\varepsilon(b) = 0,$$

де коефіцієнти диференціального оператора, у припущенні, що початок координат належить інтервалу (a, b), мають вигляд

$$k_\varepsilon(x) = \begin{cases} k_0(x), & x \in (a, 0) \\ \varepsilon\, k_1(x), & x \in (0, b), \end{cases} \qquad \rho_\varepsilon(\gamma, x) = \begin{cases} \varepsilon^{-\gamma} \rho_0(x), & x \in (a, 0) \\ \rho_1(x), & x \in (0, b). \end{cases}$$

Тут ε – малий додатній параметр, γ – дійсний параметр, функції k_j та ρ_j є гладкими та додатними на своїх інтервалах визначення.

Дослідження показали, що асимптотика спектра при $\varepsilon \to 0$ залежить від величини γ, а саме, варто розрізняти випадки $\gamma < -1$, $\gamma = -1$, $|\gamma| < 1$, $\gamma = 1$ та $\gamma > 1$. Випадок $\gamma = 1$ вивчений в [1], де показано, що граничний оператор є несамоспряжений, володіє 2-кратними власними значеннями з геометричною кратністю 1. Випадок $|\gamma| < 1$ відповідає так званій жорсткій задачі, і для оператора 4-го порядку та $\gamma = 0$ описаний в [2]. У виступі йтиметься про решту випадків збурення. Буде показано, що у жодному з них класичної "пономерної" асимптотики власних значень недостатньо для повного опису задачі. А саме, треба вивчати ще поведінку власних підпросторів для власних значень $\lambda^\varepsilon_{j(\varepsilon)}$, де $j(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$.

1. N. Babych, Yu. Golovaty, On spectrum of a string with singular perturbed stiff-ness and density: a nonself-adjoint limit operator // Int. Conf. “Differential Equations” dedicated to 100th anniv. of Ya. Lopatynsky, Lviv, September 12-17, 2006. – P.64-65.
2. N. Babych, Yu. Golovaty Complete WKB asymptotics of high frequency vibrations in a stiff problem // Математичні студії. – 2000. – 14, № 1. – C.59-72.

Любов Баб'як-Білецька, Омелян Горбачук

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
Львівський національний університет імені Івана Франка

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ, КОЛИ ОПЕРАТОР Є ГЕНЕРАТОРОМ ПІВГРУПИ КЛАСУ C_0

Розглядається рівняння

$$\frac{dy(t)}{dt} = Ay(t) + f(t), \qquad t \in [\,0, T\,)\,, \tag{1}$$

з лінійним замкненим оператором A зі щільною областю визначення $D(A)$ в банаховому просторі $\mathcal{B}$, де $f(t) = a_k$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, ..., n$ і $a_k \in \mathcal{B}$ будуть невідомі параметри. Розглядається така задача: знайти вектор-функцію $y(t)$ та елементи $a_k \in \mathcal{B}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ такі, щоб $y(t)$ була слабким розв'язком (див. [1]) рівняння (1) і в заданих точках t_k з проміжку $[\,0, T\,)$ $y(t_k) = y_k$ (y_k відомі з $D(A)$). В праці [2] розв'язувалась двоточкова задача.

Теорема 1. *Нехай A – генератор півгрупи $U(t)$ класу C_0 і $0 \notin \sigma_p(A)$ (точковий спектр). Для набору елементів $(y_0, y_1, \ldots, y_n)$, де $y_k \in D(A)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, задача (1) має розв'язок $(y(t), a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $a_k \in \mathcal{B}$ і $y(t_k) = y_k$ і вектор-функція $y(t)$ є слабким розв'язком рівняння (1) ($f(t) = a_k$, $t_k \leqslant t < t_{k+1}$) тоді і тільки тоді, коли виконується умова $A(y_k - y_{k-1}) \in R(U(t_k - t_{k-1}) - I)$, де $R(\cdot)$ – образ оператора $(\cdot)$, I – одиничний оператор.*

Застосовуючи теорему про зв'язок між спектром генератора і півгрупи, отримуємо відповідь про розв'язність n-точкової задачі на мові спектру генератора.

Теорема 2. *За умови теореми 1 задача (1) має єдиний розв'язок $(y(t), a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $y(t_k) = y_k$ тоді і тільки тоді, коли серед власних значень генератора A немає точок вигляду $\mu_m = \frac{2\pi i m}{t_k - t_{k-1}}$, $k = 1, \ldots, n$, $m \in \mathbb{Z}$.*

1. Lions J. L. Equations differentialles operationnelles et problemes aux limites. – Springer, 1961. – 254 p.
2. Ейдельман Ю. Двоточкова крайова задача для диф. рівняння з параметром // ДАН УРСР. Сер.А. – 1983. № 4. – С. 16-19.

Тоня Балабушенко, Володимир Лавренчук, Лілія Мельничук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ХАРАКТЕРИЗАЦІЮ ДЕЯКИХ КЛАСІВ РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ВИРОДЖЕННЯМИ

Розглядаються рівняння зі зростаючими за змінною $x \in \mathbb{R}^n$ при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами та оператором Бесселя $B_y := \partial_y^2 + ((2\nu+ +1)/y)\partial_y,\ \nu \geq 0$, за змінною $y > 0$ вигляду

$$\left(\partial_t - \sum_{j,\ l=1}^{n} a_{jl}\partial_{x_j}\partial_{x_l} - B_y\right) u(t,x,y) - \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(x_j u(t,x,y)) = 0, \quad (1)$$

$$\left(\partial_t - \sum_{j=1}^{n}\left(\partial_{x_j}^2 + 2b_j(x_j)\partial_{x_j} + b_j^2(x_j) + \partial_{x_j} b_j(x_j) - \frac{x_j^2}{4} + \frac{1}{2} + B_y\right)\right) \times$$
$$\times v(t,x,y) = 0, \quad (2)$$

де матриця з коефіцієнтів a_{jl} симетрична й додатно визначена, $b_j \in C^1(\mathbb{R})$.

Побудовані та охарактеризовані спеціальні класи просторів U_p^1 і U_p^2, $1 \leq p \leq \infty$, класичних розв'язків відповідно рівнянь (1) і (2). Описані множини Φ_p^1 і Φ_p^2 початкових значень розв'язків із цих класів. Доведено, що простори U_p^1 і U_p^2 є множинами значень відповідних операторів Пуассона P^1 і P^2, визначених на просторах Φ_p^1 і Φ_p^2.

При доведеннях використовуються результати праць [1, 2].

1. Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип.288. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С.5 – 11.
2. Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д., Лавренчук В.П., Мельничук Л.М. Задача Коші для деяких параболічних рівнянь з оператором Бесселя і зростаючими коефіцієнтами // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 314 – 315. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – С.7 – 16.

Наталія Баландіна

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова
krapiva@farlep.net

ПРО РОЗПОДІЛ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ $r(d(n))$

Нехай $d(n)$ и $r(n)$ є позначеннями відповідно функції дільників числа n та функції кількості зображень n сумою двох квадратів. Ряд авторів (наприклад, [1]-[4]) вивчали розподіл значень $d_k(n)$, де $d_k(n) = d(d_{k-1}(n))$. В роботі, що пропонується, ми вивчаємо функцію $r(d_k(n))$, $k = 1, 2, ...$ Нами доведені наступні твердження.

Теорема 1. *Нехай $\alpha \in R$ та $N(x, \alpha)$ позначає кількість розв'язків нерівності $r(d(n)) < \alpha \log\log x$, $n \leq x$. Тоді*

$$N(x,\alpha) = \left\{ c_0(\alpha) + c_1(\alpha)\Phi\left(\tfrac{\{\alpha\}}{[\alpha]}\sqrt{\log\log x}\right) + \right.$$
$$\left. + c_2(\alpha)\Phi\left(\tfrac{\{\alpha\}-1}{[\alpha]+1}\sqrt{\log\log x}\right)\right\} x + O\left(\tfrac{x}{(\log\log x)^{1/2}}\right), \tag{1}$$

де $c_0(\alpha), c_1(\alpha), c_2(\alpha)$ – обчислювальні функції, причому $c_1(\alpha) = 0$ при $0 < \alpha < 1$, $\Phi(u) = \int\limits_{-\infty}^{u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt$.

Теорема 2. *Нехай f_k – k-ий елемент послідовності Фібоначчі, тобто $f_{-1} = 0$,$f_0 = 1$, $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$ для $k \geq 1$. Тоді існує нескінчена послідовність натуральних чисел таких, що*

$$r(d_k(n)) \gg \exp\left((\log n)^{\frac{1}{f_{k+1}} - \varepsilon}\right)$$

для будь-якого $\varepsilon > 0$.

1. J. Katai, A $d(d(n))$ fuggeny eloszlasarol // MTA. – 1967. – **17**. – P. 447-454.
2. P. Erdos and J. Katai, On the growth of $d_k(n)$ // Fibonacci Quarterly. – 1969. – **7**. – P. 267-274.
3. J. Katai and M.Subbarao, On the local distribution of the iterated division function // Mathematics Parwonica. – 2004. – **15**. – P. 127-140.
4. J. Katai, On the iteration of the division function // Publ. Math. Debrecan. – **16**. – P. 3-15.

Богдан Бандирський, Ігор Лазурчак

Національний університет „Львівська політехніка"
Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
lazurchak@mail.ru

МАТРИЧНА ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛІУВІЛЯ З НЕРОЗДІЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Розглядається задача на власні значення для системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку

$$u''(x) + [\lambda R - Q(x)]u(x) = 0, \quad x \in (0,1), \tag{1}$$

$$C_0 \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} u(1) \\ u'(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

де $R = R^T > 0$, C_0, C_1-сталі матриці, $Q(x) = Q^T(x)-$матриця з кусково-неперервними елементами, $\{u(x),\ \lambda\}-$шукані власна вектор-функція та власне значення.

Для знаходження наближеного розв'язку задачі (1),(2) застосовується FD-метод, який вперше був запропонований в [1] для скалярного рівняння (1) з умовами Діріхле. Доводиться збіжність методу зі швидкістю геометричної прогресії та досліджується залежність знаменника прогресії від порядкового номера власного значення. Алгоритмічну і програмну реалізацію методу здійснено з використанням систем символьної математики (Maple 10.0, Mathematica 5.1). Подано результати чисельного експерименту, які свідчать, що запропонований підхід до розв'язування задачі (1),(2) є більш ефективним, ніж відомий підхід з [2] при знаходженні власних значень з порядковими номерами, які перевищують деяке натуральне число N_0 .

1. Макаров В.Л. О функционально-разностном методе произвольного порядка точности решения задачи Штурма-Лиувилля с кусочно-гладкими коэффииентами. // ДАН СССР. – 1991. – **Т.320**. – С. 31 – 39.
2. H.I.Dwyer, A.Zettl. Computing Eigenvalues of Regular Sturm-Liouville Problems // Electronic Journal of Diff. Equations. – 1994. – **№ 6**. – P. 1 – 10.

Андрій Бандура

Львівський національний університет імені Івана Франка
bandoora24kopan@rambler.ru

ОБМЕЖЕНІСТЬ L-ІНДЕКСУ ЗА НАПРЯМКОМ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ВИГЛЯДУ $F(z_1 \cdot z_2)$

Нехай $L(z)$ — додатна неперервна функція, $z \in \mathbb{C}^n$, і для кожного $\eta > 0$ справджується нерівність

$$0 < \inf\{\inf\{\lambda(z,t,t_0) : |t-t_0| \le \eta/L(z+t_0\mathbf{b})\} : z \in \mathbb{C}^n, t_0 \in \mathbb{C}\} \le$$

$$\sup\{\sup\{\lambda(z,t,t_0) : |t-t_0| \le \eta/L(z+t_0\mathbf{b})\} : z \in \mathbb{C}^n, t_0 \in \mathbb{C}\} < +\infty,$$

де $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, $\lambda(z,t,t_0) = L(z+t\mathbf{b})/L(z+t_0\mathbf{b})$.

Ціла функція $F(z), z \in \mathbb{C}^n$, називається *функцією обмеженого L-індексу за напрямком* $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$, якщо існує $m \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $p \in \mathbb{Z}_+$ та всіх $z \in \mathbb{C}^n$ виконується нерівність

$$\frac{1}{p!L^p(z)} \left| \frac{\partial^p F(z)}{\partial \mathbf{b}^p} \right| \le \max\left\{ \frac{1}{k!L^k(z)} \left| \frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k} \right| : 0 \le k \le m \right\},$$

де $\frac{\partial^0 F(z)}{\partial \mathbf{b}^0} = F(z)$, $\frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \left(\frac{\partial^{k-1} F(z)}{\partial \mathbf{b}^{k-1}} \right)$, $k \ge 2$, $\frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}} = \sum\limits_{i=1}^{p} \frac{\partial F(z)}{\partial z_i} b_i$. Найменше з таких m називається L-індексом за напрямком $\mathbf{b}$ функції F і позначається $N_{\mathbf{b}}(F, L)$.

Сформулюємо основний результат.

Теорема. *Якщо $f(t)$ — ціла функція обмеженого l-індексу, $t \in \mathbb{C}$, і $N(f,l) = \widetilde{N}$, $t \in \mathbb{C}$, $l \in Q$, то $F(t,z) \equiv f(tz)$ — ціла функція: обмеженого $L_1(t,z) \equiv (|z|+1)l(tz)$-індексу за напрямком $\mathbf{b}_1 = (1,0)$ і $N_{\mathbf{b}}(F, L_1) = \widetilde{N}$; обмеженого $L_2(t,z) = (|t|+1)l(tz)$-індексу за напрямком $\mathbf{b}_2 = (0,1)$ і $N_{\mathbf{b}_2}(F, L_2) = \widetilde{N}$, та обмеженого $(|t|+|z|+1)l(tz)$-індексу за довільним напрямком $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^2$.*

Галина Барабаш

Львівський національний університет імені Івана Франка
gbarabash@yahoo.com

ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНІЄЇ НЕЛІНІЙНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

Нехай Ω – обмежена область у просторі $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$.

В області Q_T розглянуто систему

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} (a_i(x,t)|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i})_{x_i} + b_{11}(x,t)|u|^{q-2}u + b_{12}(x,t)|v|^{q-2}v = f(x,t), \tag{1}$$

$$v_t - \sum_{i=1}^{n} (c_i(x,t)|v_{x_i}|^{p-2}v_{x_i})_{x_i} + b_{21}(x,t)|u|^{q-2}u + b_{22}(x,t)|v|^{q-2}v = g(x,t),$$

де $p > 1,\ q > 1$, з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x), \quad v(x,0) = v_0(x) \tag{2}$$

і крайовими умовами

$$u\big|_{S_T} = 0, \quad v\big|_{S_T} = 0. \tag{3}$$

Одержано умови існування узагальненого розв'язку задачі (1)-(3) та деякі його властивості. При цьому припускаємо певну гладкість коефіцієнтів системи, а також додатність і відокремленість від нуля функцій $a_i,\ c_i,\ b_{11},\ b_{22}$.

Оксана Баран, Наталя Гоєнко, Леся Манзій

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України,
Національний університет „Львівська політехніка“
boe13@ukr.net, hoyenko@ukr.net, lesly@ukr.net

ПРО ПАРНІ КРУГОВІ ОБЛАСТІ ЗБІЖНОСТІ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З НЕРІВНОЗНАЧНИМИ ЗМІННИМИ

Об'єктом дослідження є гіллястий ланцюговий дріб (ГЛД) з нерівнозначними змінними вигляду

$$\mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{i_{k-1}} \frac{a_{i(k)}}{1}, \tag{1}$$

де $a_{i(k)}$ — комплексні числа, $i(k) = i_1 i_2 \dots i_k$ — мультиіндекс, $1 \leq i_p \leq i_{p-1}$, $p = \overline{1,k}$, $k = 1, 2, \dots$, $i_0 = N$, N – кількість гілок розгалужень, $N \geq 2$.

Теорема. *Нехай елементи ГЛД (1) $a_{i(k)}$ є комплексними числами, які задовольняють умови*

$$|a_{i(k)}| \leq \begin{cases} \dfrac{r_1}{i_{k-1} - 1}, & \text{якщо} \quad l = 1, \\ r, \quad \text{якщо} \quad l - \text{непарне}, & l > 1, \end{cases}$$

$$|a_{i(k)}| \geq (2 + r_1)(1 + r_1 + r), \quad \text{якщо} \quad l - \text{парне},$$

де $l = \sum_{s=1}^{k} \delta_{i_k}^{i_s}$, δ_j^i– *символ Кронекера,* $0 < r_1 < \dfrac{1 - 3r}{1 + r}$, $0 < r < \dfrac{1}{3}$.

Тоді ГЛД (1) збігається і справджується оцінка швидкості збіжності

$$|f - f_m| < M C_{N+m}^{N-1} q^m,$$

де f — значення ГЛД (1), f_m – його m – ий підхідний дріб,

$$M = (2 + r_1) \max_{1 \leqslant p_1 \leqslant p \leqslant N} \left\{ \left(\frac{r_1}{\alpha} \right)^p \beta^{p_1} \right\}, \quad q = \frac{\alpha}{\beta},$$

$\alpha = \sqrt{(2 + r_1) r}$, $\beta = \sqrt{1 - r_1 - r}$.

Ярослав Баранецький[1], Андрій Копчук-Кашецький[2]

[1]Національний університет „Львівська політехніка“,
[2]Івано-Франківський медичний університет

ПЕРІОДИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Вивчаються спектральні властивості та умови коректної розв'язності періодичної крайової задачі для диференціально-операторних рівнянь другого порядку.

Нехай $H-$ сепарабельний гільбертовий простір, $A : H \to H$ – додатний, необмежений, щільно визначений оператор з дискретним спектром, $H^1 = L_2((0,1); H)$, D_t – сильна похідна в H^1, $W = \left\{v \in H^1 : A^2 v \in H^1, D_t^2 \in H^1\right\}$, B – обмежений оператор $H \to H$, $\ B = B(A)$.

Нехай $L_B : H^1 \to H^1-$ оператор періодичної задачі

$$-D_t^2 u(t) + A^2 u(t) + B\left(D_t u(t) + D_t u(1-t)\right) = f(t), \tag{1}$$

$$l_j u(t) \equiv D_t^j u(0) - D_t^j u(1) = 0, \quad j = 0, 1, \tag{2}$$

L_0- оператор задачі

$$-D_t^2 u(t) + A^2 u(t) = f(t), \quad l_j u(t) = 0, \quad j = 0, 1,$$

$$D(L_0) \equiv D(L_B) = \left\{v \in W : l_j v = 0, j = 0, 1\right\}.$$

Теорема. *1. Спектр оператора L_B не залежить від оператора B, тобто $\sigma(L_B) = \sigma(L_0)$.*

2. Система кореневих векторів L_B утворює базу Ріса в H^1.

3. Для довільного $f \in H^1$ існує єдиний розв'язок $u(t)$ задачі (1), (2) *та виконується нерівність*

$$C_2 \|f\|_{H^1} \le \|u(t)\|_W \le C_1 \|f\|_{H^1}.$$

Олександр Барановський

Інститут математики НАН України
Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова
ombaranovskyi@ukr.net

ТОПОЛОГО-МЕТРИЧНІ ТА ФРАКТАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ МНОЖИНИ НЕПОВНИХ СУМ РЯДУ ОСТРОГРАДСЬКОГО 1-ГО ВИДУ

Рядом Остроградського 1*-го виду* називається вираз вигляду

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \cdots + \frac{(-1)^{k-1}}{q_1 q_2 \cdots q_k} + \cdots , \tag{1}$$

де q_k — натуральні числа і $q_{k+1} > q_k$ для будь-якого $k \in \mathbb{N}$ [1]. На зв'язок алгоритмів розвинення чисел в ряди Остроградського з ланцюговими дробами вказано в книзі [2]. Для довільного фіксованого ряду Остроградського 1-го виду з сумою r розглянемо вираз

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_1 q_2 \cdots q_k}, \quad \text{де } a_k \in \{0, 1\}. \tag{2}$$

Сума $s = s(\{a_k\})$ ряду (2) називається *неповною сумою ряду* (1).

Множина C_r всіх неповних сум ряду (1) є ніде не щільною досконалою множиною нульової міри Лебега. Її розмірність Хаусдорфа–Безиковича дорівнює нулю [3].

Ця робота частково підтримана грантом DFG 436 UKR 113/80.

1. Ремез Е.Я. О знакопеременных рядах, которые могут быть связаны с двумя алгорифмами М. В. Остроградского для приближения иррациональных чисел // Успехи мат. наук. — 1951. — **6**, № 5 (45). — С. 33–42.
2. Боднарчук П.І., Скоробогатько В.Я. Гіллясті ланцюгові дроби та їх застосування. — Київ: Наукова думка, 1974. — 272 с.
3. Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G. The set of incomplete sums of the first Ostrogradsky series and anomalously fractal probability distributions on it. — Bonn, 2007. — (SFB-611 Preprint, Bonn University; 315). — `http://sfb611.iam.uni-bonn.de/publikationen.php?No=315`.

Ірина Баранська

Львівський національний університет імені Івана Франка
BIE2006@ukr.net

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ ДЛЯ ДВОВИМІРНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Досліджується обернена задача визначення невідомого коефіцієнта $a(t)$ рівняння

$$u_t = a(t)\,(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) + b\,(x_1, x_2, t)\,u_{x_1} + c\,(x_1, x_2, t)\,u_{x_2} + \\ +d\,(x_1, x_2, t)\,u + f(x_1, x_2, t)$$

в області $\Omega_T \equiv \{(x_1, x_2, t)\,:\,0 < x_1 < l(t)\,,\,0 < x_2 < h(t)\,,\,0 < t < T < \infty\}$, де $x_1 = l(t)$, $x_2 = h(t)$ – невідомі функції.

Задаються початкова умова

$$u(x_1, x_2, 0) \,=\, \varphi\,(x_1, x_2)\,, \qquad (x_1, x_2) \in [0, l_0] \times [0, h_0]\,,$$

крайові умови

$$\begin{aligned} u_{x_1}(0, x_2, t) \,&=\, \mu_1(x_2, t)\,, \qquad u_{x_1}(l(t), x_2, t) \,=\, \mu_2(x_2, t)\,, \\ u_{x_2}(x_1, 0, t) \,&=\, \mu_3(x_1, t)\,, \qquad u_{x_2}(x_1, h(t), t) \,=\, \mu_4(x_1, t)\,, \\ x_1 &\in [0, l(t)]\,, \qquad x_2 \in [0, h(t)]\,, \qquad t \in [0, T], \end{aligned}$$

та умови перевизначення

$$\int\limits_0^{l(t)}\int\limits_0^{h(t)} x_2^i u(x_1, x_2, t)\,dx_2dx_1 \,=\, \mu_{5+i}(t), \quad i = 0, 1, \quad t \in [0, T]\,,$$

$$u(0, 0, t) = \,\mu_7(t)\,, \qquad t \in [0, T]\,.$$

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі.

Василий Берник

Институт математики НАН Беларуси
bernik@im.bas-net.by

О ПРИЛОЖЕНИЯХ МЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Пусть $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{Z}^m$, $\mathcal{G}(\bar{x}, \bar{a})$ – некоторая функция, $\mathcal{G} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^m \to \mathbb{R}$. Поведение $\mathcal{G}(\bar{x}, \bar{a})$ при растущей норме $\|\bar{a}\| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j|$ и фиксированном векторе $\bar{x}$ весьма экзотично и зависит от арифметической природы вектора $\bar{x}$. Так, например, при $\bar{x} = x_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-5}$ неясно равно ли нулю при каких-нибудь целых a_2, a_1, выражение $a_2 x_1 + a_1$ или нет. В то же время для множеств полной меры Лебега в $\mathbb{R}^n$ поведение $\mathcal{G}(\bar{x}, \bar{a})$ для широкого класса функций $\mathcal{G}$ описывается в метрической теории диофантовых приближений.

В докладе будут приведены приложения метрической теории в задачах теории вероятностей, математической физики.

Ярослав Бігун

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

АСИМПТОТИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ КВАЗІЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ІЗ ПОВІЛЬНО ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ І ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

Розглядається диференціальне рівняння із запізненням вигляду

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2(\tau)x(t) = \varepsilon f(\tau,\theta,x(t),x(\Delta(t)\lambda t),\frac{dx(t)}{dt},\frac{dx(\Delta(t))}{dt}), \qquad (1)$$

де ε – малий додатний параметр, $\tau = \varepsilon t \geq 0$, $\Delta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$,

$$f(\tau,\theta,x,z,u,v) = \sum_{|r|\leq N} e^{ir\theta} f_r(\tau,x,z,u,v), \quad \frac{d\theta}{dt} = \nu(\tau),$$

де $f_r(\tau,x,z,u,v)$ – алгебраїчний поліном за змінними x, z, u, v.

Побудові методом Крилова-Боголюбова асимптотичного розв'язку квазілінійного диференціально-різницевого рівняння присвячена робота [1] та ін. У даній роботі для розв'язку рівняння (1) побудовано асимптотичне наближення порядку n вигляду

$$x_n(t,\varepsilon) = a\cos\varphi + \varepsilon u_1(\tau,a^{(1)},\varphi^{(1)},\theta) + \cdots + \varepsilon^n u_n(\tau,a^{(n)},\varphi^{(n)},\theta),$$

де $a^{(r)}(t) = (a(t),a(\lambda t),\ldots,a(\lambda^r t))$, $\varphi^{(r)}(t) = (\varphi(t),\varphi(\lambda t),\ldots,\varphi(\lambda^r t))$, $r \leq 1$. Функції $a(t)$ і $\varphi(t)$ знаходяться із системи рівнянь

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(\tau,a^{(1)},\psi^{(1)},\theta) + \cdots + \varepsilon^n A_n(\tau,a^{(n)},\psi^{(n)}),$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega(\tau) + \frac{r\lambda}{q}\omega(\lambda\tau) - \frac{p}{q}\nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau,a^{(1)},\psi^{(1)}) + \cdots + \varepsilon^n B_n(\tau,a^{(n)},\psi^{(n)}),$$

де $\psi = \varphi - \frac{p}{q}\nu(\tau), p$ і q — взаємно прості цілі числа, r — ціле число.

Виписані формули для першого і другого асимптотичних наближень та проілюстровано їх застосування для рівнянь типу Дуффінга і Ван-дер-Поля.

1. Mitropolskyi Yu.A., Samoylenko V.G., Matarazzo G. On asymptotic solution to delay differential equations with slowly varying coefficients // Nonlinear Analysis.— 2003, N 52.— P.971—988.

Марія Білозерова

Одеський Національний університет ім. І. І. Мечникова
Marbel@ukr.net

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ СУТТЄВО НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглядається нелінійне диференціальне рівняння

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)\varphi_1(y'), \tag{1}$$

у якому $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\to]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$ – неперервна функція, $\varphi_i : \Delta_{Y_i} \to]0, +\infty[$ ($i = 0, 1$) – строго монотонні, двічі неперервно-диференційовні функції, які задовольняють умови

$$\lim_{\substack{z\to Y_i \\ z\in\Delta_{Y_i}}} \frac{z\varphi_i'(z)}{\varphi_i(z)} = \sigma_i, \quad \limsup_{\substack{z\to Y_i \\ z\in\Delta_{Y_i}}} \left|\frac{z\varphi_i''(z)}{\varphi_i'(z)}\right| < +\infty \quad (i = 0, 1),$$

де

$$Y_i = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm\infty, \end{cases} \qquad \Delta_{Y_i} = \begin{cases} \text{або } [y_i^0, Y_i[, \\ \text{або }]Y_i, y_i^0], \end{cases} \quad \sigma_i \in \mathbb{R},\ \sigma_0 + \sigma_1 \neq 1$$

(при $Y_i = +\infty (Y_i = -\infty)$ вважаємо $y_i^0 > 0$ $(y_i^0 < 0)$ відповідно).

Розв'язок y рівняння (1) будемо називати $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язком, якщо

$$y^{(i)} : [t_0, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_i}, \quad \lim_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i \ \ (i = 0, 1), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

Розв'язки такого типу раніше досліджувалися (див., наприклад, [1]) лише для рівнянь, у яких $\varphi_1(y') \equiv 1$.

Встановлено небхідні та достатні умови існування $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$-розв'язків, а також їх асимптотичні зображення.

1. Евтухов В.М., Кириллова Л.А Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, № 8. – С. 1053-1061.

Степан Блажевський

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В ТРИШАРОВОМУ ПОРОЖНИСТОМУ СИМЕТРИЧНОМУ ТІЛІ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ

Розглянемо задачу про побудову в області $D_1 = \{(t, r) : t \in (0, \infty), r \in I_2 = (R_0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3), R_0 > 0, R_3 < \infty\}$ обмеженого розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності другого порядку параболічного типу

$$\begin{gathered} \tfrac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_1 - a_1^2 B_{\nu_1,\alpha_1}[u_1] = 0, \quad r \in (R_0, R_1), \\ \tfrac{\partial u_j}{\partial t} + \gamma_j^2 u_j - a_j^2 B_{\alpha_j}[u_j] = 0, \quad r \in (R_{j-1}, R_j), \quad j = 2, 3, \end{gathered} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_1(0, r) = g_1(r), r \in (R_0, R_1), u_j(0, r) = g_j(r), \;\; r \in (R_{j-1}, R_j), \;\; j = 2, 3, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$L_{11}^0[u_1]\Big|_{r=R_0} = 0, \quad L_{22}^3[u_3]\Big|_{r=R_3} = 0 \tag{3}$$

та умовами спряження

$$(L_{j1}^k[u_1] - L_{j2}^k[u_2])\Big|_{r=R_j} = 0; \quad j = 1, 2, \quad k = 1, 2, \tag{4}$$

$$L_{jk}^m = \left(\alpha_{jk}^m + \delta_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \beta_{jk}^m + \gamma_{jk}^m \frac{\partial}{\partial t}; c_{11}c_{21} > 0, c_{j1} = \alpha_{2j}^1\beta_{1j}^1 - \alpha_{1j}^1\beta_{2j}^1.$$

У системі (1) використано диференціальні оператори Бесселя

$$B_\nu, \alpha = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha+1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\nu^2 - \alpha^2}{r^2}, \quad \nu \ge \alpha \ge -\frac{1}{2};$$

$$B_\alpha = r^2\frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha+1)r\frac{d}{dr} + \alpha^2 - \lambda^2 r^2, \quad \lambda \in (0, \infty), \quad \alpha \ge -\frac{1}{2}.$$

Побудовано точний аналітичний розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності (1)–(4).

Ігор Бобик[1], Михайло Симотюк[1,2,3]

[1]Національний університет „Львівська політехніка“
[2]ІППММ ім.Я.С.Підстригача НАН України
[3]Львівський національний університет імені Івана Франка
symotyuk@lms.lviv.ua

ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ФАКТОРИЗОВАНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Розглядаємо таку задачу з двома кратними вузлами:

$$\prod_{j=1}^{n} (\partial_t - \lambda_j A(D_x))\, u(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q_p^T, \tag{1}$$

$$\partial_t^{j-1} u\,|_{t=0} = \varphi_j(x),\ \ j=\overline{1,r},\ \ \partial_t^{j-1} u\,|_{t=T} = \varphi_{r+j}(x),\ \ j=\overline{1,l}, \tag{2}$$

де $Q_p^T = (0,T) \times \Omega_p$, $\Omega_p = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $T > 0$, $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \Omega_p$, $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$, $1 \le r < n$, $l = n - r$, $D_x = (-i\partial_{x_1}, \ldots, -i\partial_{x_p})$, $A(D_x)$ — такий диференціальний вираз порядку N, що

$$\exists\, a_1, a_2 > 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}^p \quad a_1|k|^N \le |A(k)| \le a_2(1+|k|)^N.$$

Розв'язність задачі (1), (2) пов'язана з проблемою малих знаменників, для оцінки знизу яких використано метричний підхід і результати роботи [1]. На основі цього підходу встановлено однозначну розв'язність задачі (1), (2) у шкалі просторів функцій експоненційного типу на торі a) для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $T > 0$ і для довільних $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$ або b) для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^n$) векторів $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ та довільних чисел $T > 0$. Інакше кажучи a) для кожного факторизованого рівняння (1) задача з умовами (2) розв'язна у шкалі просторів експоненційного типу у „переважній“ більшості областей Q_p^T; b) у кожній області Q_p^T, $T > 0$, задача з умовами (2) розв'язна у шкалі просторів експоненційного типу для „переважної“ більшості факторизованих рівнянь (1).

Дослідження частково підтримані Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект № 14.1/017).

1. Бобик І.О., Симотюк М.М. Оцінки характеристичних визначників задач з двома кратними вузлами для лінійних факторизованих рівнянь із частинними похідними // Наук. Вісн. Чернів. нац. ун-ту. Серія Математика. – 2007.

Омелян Бобик

Львівський інститут банківської справи УБС НБУ

В.Я. СКОРОБОГАТЬКО – НАУКОВЕЦЬ, ПЕДАГОГ, НАСТАВНИК МОЛОДІ ТА ОРГАНІЗАТОР НАУКИ

В.Я. Скоробогатько – доктор фізико-математичних наук, професор, Заслужений діяч науки України був яскравою постаттю серед математиків-науковців. Напрямок його наукової діяльності сформувався ще в студентські роки під впливом Я.Б. Лопатинського. Під його керівництвом він підготував кандидатську дисертацію "Єдиність та існування розв'язків деяких крайових задач для диференціального рівняння еліптичного типу другого порядку"(1954 р.), результати якої були розвинуті в докторській дисертації "Дослідження з якісної теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними"(1963 р.).

В.Я. Скоробогатько був ученим із широким діапазоном математичних ідей. Його наукові інтереси охоплювали такі напрямки: 1) якісна теорія рівнянь із частинними похідними; 2) багатоточкові задачі для диференціальних рівнянь і систем; 3)$n-$ точкова геометрія та загальна теорія відносності; 4) узагальнення методу відокремлення змінних; 5) гіллясті ланцюгові дроби; 6) філософські питання математики.

Протягом багатьох років В.Я. Скоробогатько працював професором Львівського національного університету імені Івана Франка та Національного університету "Львівська політехніка", читав спецкурси зі сучасних проблем математики, активно залучав обдарованих студентів і молодих учених до наукової роботи. Під його керівництвом виконано 25 кандидатських і 8 докторських дисертацій.

Надзвичайно плідною була діяльність В.Я. Скоробогатька як організатора науки в Україні. Зокрема, разом з академіком А.О. Дородніциним він започаткував у 1987 році проведення періодично діючої конференції "Нові підходи до розв'язання диференціальних рівнянь", яка тепер носить його ім'я.

В.Я. Скоробогатько був безкомпромісною людиною. Він не визнавав авторитетів у науці, а цінив авторитет наукових результатів, ніколи не йшов на компроміси, які шкодили б інтересам науки, порушували принципи людської справедливості та гідності.

Наталя Богай

Інститут математики НАН України

АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З НЕПЕРЕРВНИМ АРГУМЕНТОМ

Розглядається система лінійних різницевих рівнянь вигляду:

$$x(t+1) = x(t) + A(t)x(t) + B(t)x(t-1), \tag{1}$$

де $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, $A(t)$, $B(t)$ – неперервні матричні функції розмірності $n \times n$, і досліджується структура множини її неперервних розв'язків.

Доведені, зокрема, такі теореми.

Теорема 1. *Нехай $x(t)$ – деякий неперервний і обмежений при $t \geq -1$ розв'язок системи рівнянь* (1) *і виконуються умови:*

1) *існують додатні функц ії $a(t)$, $b(t)$ такі, що*

$$| A(t) | \leq a(t), \quad | B(t) | \leq b(t), \qquad t \geq 0,$$

де $| A | = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} | a_{ij} |, \qquad | B | = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} | b_{ij} |;$

2) *ряди* $\tilde{a}(t) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a(t+i), \quad \tilde{b}(t) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} b(t+i)$ *рівномірно збігаються при $t \geq 0$ і $\tilde{a}(t) + \tilde{b}(t) \leq \Theta < 1$.*

Тоді існує неперервна, 1-періодична вектор-функція $\omega(t)$ така, що при $t \to +\infty$ виконується співвідношення

$$x(t) = \omega(t) + o(1) \quad \textit{при } t \to +\infty. \tag{2}$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1. *Тоді система рівнянь* (1) *має сім'ю неперервних і обмежених при $t \geq -1$ розв'язків $x(t)$, які задовольняють умову* (2).

Аналогічні результати одержані також для систем лінійних різницевих рівнянь вигляду $x(t+1) = x(t) + \sum\limits_{i=0}^{k} A_i(t)x(t-i)$, де матриці $A_i(t)$, $i = 0, 1, ..., k$, є неперервними при $t \in \mathbb{R}^+$ і задовольняють відповідні умови.

Дмитро Боднар, Христина Кучмінська

Тернопільський національний економічний університет
Національний університет „Львівська політехніка“
dmytro_bodnar@hotmail.com, kuchminska_khrys@hotmail.com

БАГАТОВИМІРНІ УЗАГАЛЬНЕННЯ НЕПЕРЕРВНИХ ДРОБІВ: ІСТОРІЯ, ГОЛОВНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА НОВІ ЗАДАЧІ

Перші узагальнення неперервних дробів зроблені в теорії чисел, зокрема при розв'язуванні діофантових нерівностей. В 1961 році В.Я. Скоробогатько [2] запропонував багатовимірне узагальнення неперервних дробів, так звані гіллясті неперервні дроби, які є аналогами неперервних дробів для функцій багатьох змінних. Ми розглянемо як гіллясті неперервні дроби, так і інші узагальнення неперервних дробів [1], як апарат раціонального наближення функцій, зробимо огляд головних результатів, відзначимо задачі, які досліджуються, а також сформулюємо задачі, які, на наш погляд, варто розглянути.

1. Боднар Д.І., Кучмінська Х.Й. Гіллясті ланцюгові дроби (до 30-річчя першої публікації) // Матем. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **30**, № 2. – С. 9-19.
2. Скоробогатько В.Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. -– М.: Наука, 1983. -– 312 с.

Виктория Бодрая

Славянский государственный педагогический университет

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С ВЫСОКОЙ ГЛАДКОСТЬЮ

Следуя [1] и используя терминологию из [2], классы $\overline{\psi}$-интегралов функций многих переменных введем следующим образом.

Пусть $\psi_{ij}(k)$, $\Psi_{ij}(k)$, $i = 1, 2$; $j = 1, 2$, – два набора систем чисел. Пусть, далее, ряд $\sum_{\vec{k}\in N_i^2} \frac{1}{2^{q(\vec{k})}\overline{\psi}_i^2(k_i)}[\psi_{i1}(k_i)A_{\vec{k}}(f;\vec{x}) - \psi_{i2}(k_i)A_{\vec{k}}^{\vec{e_i}}(f;\vec{x})]$ является рядом Фурье некоторой функции из $L(T^2)$. Назовем ее $\overline{\psi}_i$-производной функции f по переменной $x_i, i = 1, 2$, и обозначим $f^{\overline{\psi}_i}$. Смешанную $\overline{\Psi}$-производную введем как результат последовательного дифференцирования. Множество непрерывных функций, имеющих почти везде ограниченные $\overline{\psi}_i$- и $\overline{\Psi}$-производные обозначим $C_\infty^{2\overline{\psi}}$. Если функции, задающие класс, определяются соотношениями $\psi_{ij}(x) = e^{-\alpha_{ij}x}$, $\Psi_{ij}(x) = e^{-\alpha^*_{ij}x}$, $\alpha_{ij} > 0$, $\alpha^*_{ij} > 0$, $i = 1, 2$; $j = 1, 2$, то такие классы обозначим $C_\infty^{2\overline{\alpha}}$. Для отклонений прямоугольных сумм Фурье получена асимптотическая формула

$$\mathcal{E}(C_\infty^{2\overline{\alpha}}; S_{\vec{n}}) = \frac{8e^{-\overline{\alpha}n_1}}{\pi^2}\mathbf{K}(e^{-\overline{\alpha}_1}) + \frac{8e^{-\overline{\alpha}_2 n_2}}{\pi^2}\mathbf{K}(e^{-\overline{\alpha}_2}) +$$
$$+O(1)\left(\frac{e^{-\overline{\alpha}_1 n_1}}{n_1} + \frac{e^{-\overline{\alpha}_2 n_2}}{n_2} + e^{-(\overline{\alpha}_1^* n_1 + \overline{\alpha}_2^* n_2)}\right),$$

где

$$\mathbf{K}(q) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - q^2 \sin^2 u}}$$

— элиптический интеграл I-го рода.

1. Степанец А.И., Пачулиа Н.Л. Кратные суммы Фурье на множествах (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 4. – С. 545 – 555.

2. Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И. Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 564 – 570.

Лилия Бойцун, Тамара Рыбникова

Днепропетровский национальный университет
matf-mmf@ff.dsu.dp.ua

АБСОЛЮТНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ ФАКТОРИЗОВАННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ МЕТОДОМ ВОРОНОГО

Функциональный метод Вороного определяется следующим образом. Пусть $p(t)$– функция, интегрируемая на $[0,y]$, $y>0$, $P(y)=\int\limits_0^y p(t)\,dt$. Говорят, что $\int\limits_0^\infty f(u)\,du$ суммируется методом Вороного к I, или $(W,p(y))$ суммируется к I, если $\lim\limits_{y\to\infty}\tau(y)=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{P(y)}\int\limits_0^y P(y-u)f(u)\,du=I$, и абсолютно суммируется методом Вороного, $|W,p(y)|$-суммируем, если $\int\limits_0^\infty|\tau'(y)|\,dy<\infty$. Интегралом Фурье функции $f(t)\in L(-\infty,\infty)$ называется

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(x-t)\,dt=\int_0^\infty A(x,u)\,du.$$

Проводятся исследования относительно абсолютной суммируемости методом Вороного интегралов Фурье с множителем. Приведем одну из таких теорем.

Теорема. *Пусть $\lambda(y)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция такая, что $\lambda'(y)>0$, $\lambda''(y)>0$, $\int\limits_0^\infty\frac{\lambda(y)\,dy}{(y+1)(\log(y+2))^{1/2}}<\infty$. Если*

$$\int_0^t|f(x+u)+f(x-u)-2f(x)|\,du=O\left(t\left(\log\frac{1}{t}\right)^k\right),k>0,$$

когда $t\to 0$, тогда интеграл Фурье со множителем

$$\int_0^\infty\frac{\lambda(y)P(y)A(t,y)}{(y+1)(\log(y+2))^{k-1/2}}\,dy$$

суммируем $|W,p(y)|$ в $t=x$, где $p(y)$– непрерывно дифференцируемая, неотрицательная, невозрастающая функция и $-p'(y)$– невозрастающая функция.

Лилия Бойцун, Анна Халюзова

Днепропетровский национальный университет
matf-mmf@ff.dsu.dp.ua

АБСОЛЮТНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ МЕТОДОМ ВОРОНОГО ФАКТОРИЗОВАННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть функция $f(u)$ интегрируема на каждом конечном промежутке $[0, A]$, $A > 0$, и $S(t) = \int\limits_0^t f(u)\,du$. Функциональный метод суммирования Вороного определяется следующим образом. Пусть функция $p(t)$ интегрируема на $[0, y]$, $y > 0$, и $P(y) = \int\limits_0^y p(t)\,dt$. Говорят, что $\int\limits_0^\infty f(u)\,du$ суммируется методом Вороного к I, $(W, p(y))$-суммируем к I, если

$\lim\limits_{y\to\infty} \tau(y) = \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{1}{P(y)} \int\limits_0^y P(y-u) f(u)\,du = I$, и абсолютно суммируется методом Вороного, $|W, p(y)|$-суммируем, если $\int\limits_0^\infty |\tau'(y)|\,dy < \infty$.

Установлены достаточные условия, накладываемые на функцию, порождающую метод Вороного, и на функцию-множитель интеграла, при которых интеграл с множителем абсолютно суммируется методом Вороного. Приведем одну из таких теорем.

Теорема. *Пусть $\lambda(y)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция такая, что $\lambda'(y) > 0$, $\lambda''(y) > 0$, $\int\limits_0^\infty \frac{\lambda(y)\,dy}{(y+1)(\log(y+2))^{1/2}} < \infty$ и $\int\limits_0^y \frac{S(u)}{u+1}\,du = O\left((\log(y+2))^{k+1}\right)$, $k > 0$ тогда интеграл*

$$\int\limits_0^\infty \frac{P(y)\lambda(y)f(y)\,dy}{(y+1)(\log(y+2))^{k-1/2}}$$

$|W, p(y)|$-суммируем, где $p(y)$ – непрерывно дифференцируемая, неотрицательная, невозрастающая функция и $-p'(y)$ – невозрастающая функция.

Микола Бокало

Львівський національний університет імені Івана Франка
mm_bokalo@franko.lviv.ua

КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ЕВОЛЮЦІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нехай Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $Q = \Omega \times (0, T]$, $S = \partial\Omega \times (0, T]$. Розглядаємо задачу

$$p_i(x,t)\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial t} + L_i u_i(x,t) =$$

$$= f_i(x,t,w(x,t), \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} w(x,s)\,d\,s), \qquad (x,t) \in Q,\ i = \overline{1,M},$$

$$q_i(x,t)\frac{\partial v_j(x,t)}{\partial t} = g_j(x,t,w(x,t), \int\limits_{t-\tau(t)}^{t} w(x,s)\,d\,s), \quad (x,t) \in \overline{Q},\ i = \overline{1,L},$$

$$B_i u_i(x,t) = h_i(x,t), \quad (x,t) \in S, \quad i = \overline{1,M},$$

де $M, L \in \mathbb{N}$; $w = (u_1, \ldots, u_M, v_1, \ldots, v_L)$; $L_1, \ldots, L_M$ — еліптичні оператори; $0 \le \tau(t) < t$, $t \in (0, T]$; $p_i(x,t) > 0$, $q_i(x,t) > 0$ при $t > 0$ і $p_i(x,0) = 0$, $q_i(x,0) = 0$; B_i — граничні оператори; f_i, q_j визначені на $Q \times \mathbb{R}^{2(M+L)}$, а h_i — на S функції.

Розглядаємо класичні розв'язки цієї задачі. Знаходимо умови на вихідні дані задачі, за яких вона є коректною.

Андрій Бомба[1], Ігор Присяжнюк[1], Олена Яцук[2]

[1]Рівненський державний гуманітарний університет
[2]Національний університет водного господарства
та природокористування

ОБЕРНЕНІ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНІ ЗАДАЧІ ТИПУ "КОНВЕКЦІЯ-ДИФУЗІЯ"

Для області $G = G_z \times (0, \infty)$, де $G_z{=}ABCD$ $(z{=}x{+}iy)$ криволінійна чотирикутна область, обмежена чотирма гладкими кривими, розглядається обернена модельна задача:

$$\varepsilon a\left(t\right)\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right)-v_x\left(x,y\right)\frac{\partial c}{\partial x}-v_y\left(x,y\right)\frac{\partial c}{\partial y}=\frac{\partial c}{\partial t},$$

$$c\left(x,y,0\right)=c_0^0\left(x,y\right),\; a\left(t\right)\int_{\widehat{AB}}\frac{\partial c\left(M,t\right)}{\partial n}dl=c_*^*\left(t\right)\ell,$$

$$c|_{AB}=c_*\left(M,t\right),\; c|_{CD}=c^*\left(M,t\right),\; c|_{AD}=\varsigma\left(M,t\right),\; c|_{BC}=\zeta\left(M,t\right),$$

$$\left(v_x,v_y\right)=grad\varphi, \Delta\varphi=0,\; \varphi|_{AB}=\varphi_*,\; \varphi|_{CD}=\varphi^*,\; \left.\frac{d\varphi}{dn}\right|_{BC\cup DA}=0,$$

де $c\left(x,y,t\right)$ та $a(t)$- шукані функції, M та n- біжуча точка та нормаль до відповідної кривої, ε- малий параметр $(\varepsilon > 0), \ell$ - довжина дуги AB, $c_0^0\left(x,y\right), c_*\left(M,t\right), c^*\left(M,t\right), \varsigma\left(M,t\right), \zeta\left(M,t\right)$ - достатньо гладкі та узгоджені вздовж ребер та у кутових точках області G функції. Існування та єдиність розв'язку встановлюються аналогічно до [2]. Розв'язок цієї задачі з точністю $O\left(\varepsilon^{n+1}\right)$ отримано на основі конформного відображення області G_z на відповідну область комплексного потенціалу $G_w = \{w : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\}$ у вигляді асимптотичних рядів.

Розроблена методика перенесена на відповідні задачі для двозв'язних областей та на випадок залежності $a = a\left(x,y\right)$.

1. Бомба А.Я., Яцук О. А. Обернені сингулярно збурені задачі типу "конвекція-дифузія"// Волинський математичний вісник. - 2006. – №4. – С. 15–22.
2. Иванчов Н.И. Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // Сиб. мат. журнал. – 1998. – **39**, N 3. – С. 539–550.

Марта Бордуляк

Львівський національний університет імені Івана Франка
mbordulyak@yahoo.com

ПРО ВЕКТОРНОЗНАЧНІ ЦІЛІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нехай $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^m$ – векторнозначна функція, компонентами якої є цілі функції f_j, $j = \overline{1,m}$, $||F(z)|| = \max\{|f_j(z)| : 1 \le j \le m\}$, l – додатна неперервна на $[0;+\infty)$ функція.

Означення. Функція F називається цілою векторнозначною функцією обмеженого l-індексу, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $z \in \mathbb{C}$ та $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\frac{||F^{(n)}||}{n!l^n(|z|)} \le \max\left\{\frac{||F^{(k)}||}{k!l^k(|z|)} :\ 0 \le k \le N\right\}.$$

При $m = 1$ отримуємо означення цілої функції обмеженого l-індексу [1].

Позначимо через Q клас додатних неперервних на $[0;+\infty)$ функцій l таких, що $l(x + O(1/l(x))) = O(l(x))$ $(x \to +\infty)$.

Наступна теорема узагальнює результат з [2].

Теорема. *Нехай $r \in \mathbb{Z}_+$, а ціла векторнозначна функція F є розв'язком диференціального рівняння*

$$W^{(n)}(z) + Q_1(z)W^{(n-1)}(z) + \cdots + Q_n(z)W(z) = 0, \qquad (1)$$

де $Q_j(z) = (a_{pq,j}(z))$ $(j = \overline{1,n})$ – матриці $m \times m$, елементами яких є раціональні функції такі, що $a_{pq,j}(z) = O(z^{jr})$ $(z \to \infty)$. Тоді F має обмежений l-індекс з $l(x) = x^r + 1$.

Також встановлено умови обмеженості l-індексу для $l \in Q$ цілих векторнозначних розв'язків рівняння (1) першого та другого порядків з мероморфними функціями $a_{pq,j}$.

1. M.M.Sheremeta. Analytic functions of bounded l-index. – Monograph Series. V. 6. – VNTL Publishers. – 1999, 141 p.
2. R.Roy, S.M.Shah. Vector-valued entire functions satisfying a differential equation // Journal of Math. Anal. and Appl. – 1986. – **116**. – P. 349-362.

Андрій Бридун

Львівський національний університет імені Івана Франка
a_brydun@franko.lviv.ua

ГОЛОМОРФНІ ФУНКЦІЇ СКІНЧЕННОГО λ-ТИПУ В ПІВСМУЗІ

Нехай f – мероморфна функція в замиканні півсмуги R, де $R = \{z = x + iy : x > x_0,\ 0 < y < \pi\}$, $\{\rho_q\}$ – послідовність нулів функції f в R, занумерованих в порядку зростання їх дійсних частин, $\rho_q = \beta_q + i\gamma_q$; $\{\omega_p\}$ – послідовність полюсів функції f в R, занумерованих відповідно, $\omega_p = \xi_p + i\eta_p$. Припустимо, що f не має на ∂R ні нулів, ні полюсів.

Нехай $f(x_0) \neq 0, \infty$, і значення $\log f(x_0)$ вибране. В замиканні R з розрізами $\{t\beta_q + i\gamma_q : t \geq 1\}$ та $\{t\xi_q + i\eta_q : t \geq 1\}$ покладемо:

$$\log f(z) = \log f(x_0) + \int_{x_0}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta, \quad \arg f(z) = \operatorname{Im} \log f(z).$$

Характеристику $S(x; x_0, f) = A(x; x_0, f) + B(x; x_0, f) + C(x; x_0, f)$, будемо називати *характеристикою Неванлінни для півсмуги,* де $A(x; x_0, f) = \frac{1}{\pi}\int_{x_0}^{x} \left(\log^+ |f(t)| + \log^+ |f(t + i\pi)|\right)\left(e^{-t} - e^{t-2x}\right) dt$, $B(x; x_0, f) = \frac{2}{\pi e^x}\int_0^{\pi} \log^+ |f(x+iy)| \sin y\, dy, C(x; x_0, f) = 2 \sum\limits_{\omega_p \in R_x} \sin\eta_p \times \times \left(e^{-\xi_p} - e^{\xi_p - 2x}\right)$, $R_x = \{z = t + iy : x_0 < t < x,\ 0 < y < \pi\}$.

Додатна, неперервна, зростаюча і необмежена на $[x_0, +\infty)$ функція $\lambda(x)$ називається *функцією зростання.* Функція f, мероморфна в замиканні півсмуги R, називається *функцією скінченного λ-типу в R,* якщо існують сталі $a, b > 0$ такі, що для всіх $x > x_0$ виконується: 1) $S(x; x_0, f) \leq a\,\lambda(x + b)$; 2) $\int_{x_0}^{x} (|\log |f(t)|| + |\log |f(t + i\pi)||)\, e^{-t}\, dt \leq a\,\lambda(x + b)$. Клас таких функцій позначимо через $\mathcal{F}_\lambda$.

Нехай $c_k(x, f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \log |f(x + iy)| \sin ky\, dy$, $k \in \mathbb{N}$, — sin-*коефіцієнти Фур'є* функції $\log |f(x + iy)|$ як функції від y.

Теорема. *Нехай λ – функція зростання і нехай f – голоморфна в замиканні півсмуги R функція. Тоді наступні твердження еквівалентні: a) $f \in \mathcal{F}_\lambda$; b) виконується умова 2) та існують додатні сталі a, b такі, що $|c_k(x, f)| \leq ae^x\,\lambda(x + b)$ для всіх $x > x_0$ та $k \in \mathbb{N}$.*

Vladislav Bruk

Saratov State Technical University, Russia
vladislavbruk@mail.ru

ON SPACES OF BOUNDARY VALUES FOR RELATIONS GENERATED BY AN OPERATOR DIFFERENTIATIAl HYPERBOLIC EXPRESSION

Let H be a separable Hilbert space; $A(t)$ be an operator function strongly measurable on the compact interval $[a,b]$; the values of $A(t)$ be bounded nonnegative operators in H. Suppose $\|A(t)\|$ is integrable on $[a,b]$. We denote $l[y] = y'' + \mathcal{A}_1(t)y + q(t)$, where $q(t) = q^*(t)$ are bounded operators in H; the function $q(t)$ is strongly continuous, $\mathcal{A}_1(t)= \mathcal{A}_1^*(t)$ are operators in H, $\mathcal{A}_1(t) \geqslant \gamma E$ $(\gamma > 0)$, the domain $\mathcal{D}(\mathcal{A}_1(t)) = \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$ is not depending on t, the function $\mathcal{A}_1(t)x$ is strongly continuously differentiable for all $x \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_1)$. We define the maximal relation L just as in [1]. Let $W(t) = (W_1(t), W_2(t))$ be the one-row operator matrix, where $W_j(t)$ is the operator solution of equation $l[y] = 0$ satisfying the initial conditions: $W_j^{(k-1)}(a) = (-1)^{j+1}\delta_{jk}E$ (δ_{jk} is the Kronecker symbol, $j,k = 1,2$). Let Q_0 be a set of elements $x \in H^2$ such that $A(t)W(t)x = 0$ almost everywhere; $Q = H^2 \ominus Q_0$; Q_- be the completion of Q with respect to the norm $\|W(t)x\|_{\mathrm{B}}$; Q_+ be the space with positive norm with respect to Q, Q_-. The relation L consists of all ordered pairs $\{y,f\} \in \mathrm{B} \times \mathrm{B}$ such that $y(t)=W(t)c+F(t)$, where $c \in Q_-$, $F(t) = W(t)J\int_a^t W^*(s)A(s)f(s)ds$, J is the operator matrix of second order with first row $(0,-E)$ and second row $(E,0)$. To each pair $\{y,f\} \in L$ assign the pair of boundary values: $\Gamma\{y,f\} = \{Y, Y'\}$, where $Y' = \int_a^b W^*(s)A(s)f(s)ds$, $Y = c + 2^{-1}JY'$.

Theorem. *The range $\mathcal{R}(\Gamma)$ of Γ coincides with $Q_- \oplus Q_+$ and "the Green formula"is valid: $(f_1, y_2)_{\mathrm{B}} - (y_1, f_2)_{\mathrm{B}} = (Y_1', Y_2) - (Y_1, Y_2')$, where $\{y_i, f_i\} \in L$, $\Gamma\{y_i, f_i\} = (Y_i, Y_i'\}$ $(i = 1,2)$.*

So, the three $\{Q_-, Q_+, \Gamma\}$ is the space of boundary values of L [2].

1. Bruk V.M. On spaces of boundary values for relations generated by a formally selfadjoint expression and nonnegative operator function. J. of Math. Phys., Analysis, Geom. – 2006. – **2**, №3. – P. 268-277.
2. Gorbatchuk V.I., Gorbathuk M.L. Boundary value problems for differential operators. – Kiev. Naukova Dumka, 1984.

Микола Бугрій

Львівський національний університет імені Івана Франка
ol_buhrii@i.ua

ПРО ОДНУ ДИНАМІЧНУ ЗАДАЧУ ОПТИМІЗАЦІЇ ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ ТОВСТОСТІННОГО ЦИЛІНДРА

Розглядається задача про оптимізацію термопружного стану ізотропного пустотілого циліндра сталої товщини $2h$ з радіусом серединної поверхні R і довжиною $2z_0$, віднесеного до просторової системи координат (α,β,γ), нормально пов'язаної з його серединною поверхнею (S_0). Циліндр знаходиться під дією нестаціонарних температурного поля $t(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ і поверхневого силового навантаження $\vec{p}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$, де $\tau\in[0,\tau_0]$ – часова кооордината. За критерій оптимізації приймається функціонал Лагранжа

$$L[\vec{u},t]=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{(V)}\left[\rho\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial\tau}\right)-2W_0\right]dV\,d\tau, \qquad (1)$$

де $\vec{u}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ – вектор переміщень, $W_0(\vec{u},t)$ – питома енергія пружної деформації, ρ – густина матеріалу, (V) – просторова область, яку займає циліндр і яка обмежена поверхнею (S).

За функції керування приймаються інтенсивність силового поверхневого навантаження $\vec{p}(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$ та температура $t(\alpha,\beta,\gamma,\tau)$. Ці функції підпорядковуються обмеженням інтегрального типу

$$\int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{(V)} t\,\psi_m\,dV\,d\tau=T_m,\quad \int\limits_0^{\tau_0}\int\limits_{(S)}\vec{p}\,\psi_n\,dS\,d\tau=P_n, \qquad (2)$$

де $\psi_k(\alpha,\beta,\gamma,)$, $k=\overline{0,+\infty}$, – повна ортонормована система функцій в області (V), T_m, $(m=\overline{0,m_0})$, P_n, $(n=\overline{0,n_0})$ – задані параметри.

Задача оптимізації формулюється так: серед гладких функцій $\vec{u}$, t і $\vec{p}$, знайти екстремуми функціоналу (1), які справджують ключові співвідношення теорії термопружності в переміщеннях та обмеження (2). Встановлено умови коректності задачі оптимізації.

Олег Бугрій

Львівський національний університет імені Івана Франка
ol_buhrii@i.ua

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО РІВНЯННЯ НЬЮТОНІВСЬКОЇ ПОЛІТРОПНОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ ЗІ ЗМІННИМ СТЕПЕНЕМ НЕЛІНІЙНОСТІ

Нехай $\Omega \subset R^n$ – обмежена область з класу C^1, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $\Sigma_{t_1,t_2} = \partial\Omega \times (t_1, t_2)$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$; $q \in L^\infty(\Omega)$, $q(x) \ge q_1 > 1$. Визначимо функціонал $\rho_q(\cdot, \Omega)$ рівністю $\rho_q(v, \Omega) = \int_\Omega |v(x)|^{q(x)} dx$, де v – деяка функція. Узагальненим простором Лебега $L^{q(x)}(\Omega)$ називають множину таких вимірних функцій v, для яких $\rho_q(v, \Omega) < +\infty$. Так само визначають простір $L^{q(x)}(Q_{0,T})$.

Нехай $V = H_0^1(\Omega) \cap L^{q(x)}(\Omega)$, $H^{-1} = [H_0^1(\Omega)]^*$, $\mathcal{H}^1 = L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$, $Bv = -v^-$, де v – деяка функція, $v^- = \max\{-v, 0\}$.

Розглядається мішана задача

$$u_t - a_0\,\Delta(|u|^s u) + g_0\,|u|^{q(x)-2}u + \beta\,Bu = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{1}$$

$$u|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0. \tag{2}$$

Функцію $u \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^{q(x)}(Q_{0,T})$, $|u|^s u \in \mathcal{H}^1$, називатимемо узагальненим розв'язком задачі (1), (2), якщо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[-uv\varphi_t + a_0(\nabla(|u|^s u), \nabla v)\varphi + g_0|u|^{q(x)-2}uv\varphi - \beta u^- v\varphi - fv\varphi\Big]\, dxdt +$$

$$+\int\limits_\Omega u_0 v\varphi(0)\, dx = 0 \ \text{ для всіх } \ v \in V \ \text{ та } \ \varphi \in C^1([0,T]), \ \ \varphi(T) = 0.$$

Якщо $s \ge 0$, $a_0, g_0, \beta > 0$ – фіксовані числа,

(F): $f \in L^{\frac{q(x)+s}{q(x)-1}}(Q_{0,T}) \cap L^{s+2}(Q_{0,T})$, $f_t \in L^{s+2}(Q_{0,T})$,

(U): $u_0 \in L^{s+2}(\Omega) \cap L^{s+q(x)}(\Omega)$, $|u_0|^s u_0 \in H_0^1(\Omega)$,

то за додаткових умов доведено існування розв'язку u задачі (1), (2) такого, що $u \in L^\infty(0, T; L^{q(x)+s}(\Omega) \cap L^{s+2}(\Omega))$, $|u|^{\frac{s}{2}}u$, $(|u|^{\frac{s}{2}}u)_t \in L^2(Q_{0,T})$, $|u|^s u \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$.

За певних умов на $\partial\Omega$ встановлено єдиність цього розв'язку.

Ярослав Бурак, Євген Чапля, Галина Мороз

Центр математичного моделювання ІППММ
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
Університет Казимира Великого в Бидгощі, Польща
burak@cmm.lviv.ua

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНИХ СИСТЕМ З УРАХУВАННЯМ ГАЛУЖЕННЯ ПРОЦЕСУ ДЕФОРМУВАННЯ

При побудові фізико-математичних моделей нелінійної механіки деформівних пружних систем ефективно використовуються енергетичні підходи на основі повних функціоналів Гамільтона. За таким підходом в рамках моделі нелінійної теорії пружності для механічних систем, які знаходяться під дією фіксованого зовнішнього силового навантаження, встановлюються визначальні фізичні співвідношення, які характеризують локальний стан системи, та формулюються відповідні крайові задачі математичної фізики з відповідними природними граничними умовами. Як узагальнення такого підходу пропонується методика побудови визначальних співвідношень на основі моментної теорії пружності та формулюються відповідні крайові задачі. При цьому функціонал Гамільтона визначається на розширеному просторі фазових координат, а саме – векторів силового та моментного імпульсів і, відповідно, тензора градієнта переміщення та тензора градієнта локального повороту.

Проаналізовано два варіанти варіаційної постановки крайових задач для пружних систем, які знаходяться під дією одного і того ж заданого зовнішнього силового навантаження, а саме в рамках теорії пружності та моментної теорії пружності. Постановка такої задачі на основі двох послідовних модельних наближень (теорії пружності та моментної теорії пружності) та порівняння отриманих результатів з аналогічними для моделі ізотропного пружного тіла дали змогу зробити висновок про необхідність ітераційного підходу до побудови математичних моделей, які враховують галуження процесу деформування. При цьому густина енергії локального опису подається сумою пружної енергії та енергії розсіяння. Встановлено, що якщо пружній системі надаються додаткові ступені вільності, то система, природно, використовує їх для зменшення свого енергетичного стану.

Володимир Бурський, Євгенія Кириченко

Інститут прикладної математики і механіки НАН України
ekirichenko@iamm.ac.donetsk.ua

ЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ

В роботі вивчаються питання єдиності розв'язку задачі Діріхле в куті Ω з вершиною в 0 та твірними $\tilde{b}^1$ і $\tilde{b}^2$ для безтипного рівняння другого порядку з неоднорідним символом і комплексними коефіцієнтами:

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad \tilde{L}u = L\left(\frac{\partial}{\partial x} + \lambda\right)u = \big(a^1 \cdot (\nabla + \lambda)\big)\big(a^2 \cdot (\nabla + \lambda)\big)u = 0, \quad (1)$$

де $a^1, a^2, \lambda \in \mathbb{C}^2$ – сталі комплексні вектори, причому вектори a^1, a^2 довільні, а вибір $\lambda \in T^C \subset \mathbb{C}^2$ обмежений множиною T^C, яка залежить від кута і фактично є трубчастою областю в $\mathbb{C}^2$ з основою $C = int\Omega^*$, де Ω^* – замкнений опуклий конус з вершиною в 0, спряжений до Ω.

Отримана необхідна і достатня умова порушення єдиності розв'язку задачі (1) у просторах функцій помірного зростання для деякого класу диференціальних рівнянь, пов'язаного з заданим кутом. У випадку оператора $\triangle + b_1\partial_{x_1} + b_2\partial_{x_2} + b_0$ зазначений критерій формулюється в термінах π - раціональності кута.

Теорема. *Для того, щоб задача (1) мала нетривіальний розв'язок $u(x) \in C^2(\bar{\Omega}) \cap S'$, необхідно і достатньо виконання рівності*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (\tilde{b}^1 \cdot \tilde{a}^1)^n & (\tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}^1)^n \\ (\tilde{b}^1 \cdot \tilde{a}^2)^n & (\tilde{b}^2 \cdot \tilde{a}^2)^n \end{vmatrix} = 0$$

для деякого натурального n. Тут $\tilde{a}^1, \tilde{a}^2$ – вектори, ортогональні векторам a^1, a^2 відповідно.

Крім того, розглядається так звана задача "майже Коші"для безтипного рівняння з частинними похідними високого порядку в багатокутнику P на площині. Кількість граничних умов відрізняється від порядку рівняння на 1. Одержано необхідну умову порушення єдиності розв'язку однорідної задачі, причому ця умова виявляється достатньою для наступної задачі:

$$(a^1 \cdot \nabla) \cdot (a^2 \cdot \nabla) \cdot \ldots \cdot (a^n \cdot \nabla)u = 0, \quad u|_{\partial P} = 0.$$

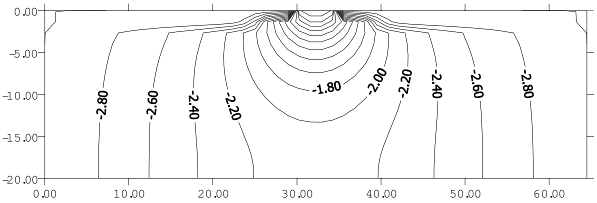
Євген Вакал, Олег Стеля, Олександр Тригуб

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
vakal@univ.kiev.ua

ВИЗНАЧЕННЯ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ВТРАТ З КАНАЛІВ

Для визначення інфільтраційних втрат з необлицьованих каналів використана профільна модель вологопереносу на основі рівняння Річардса. Алгоритм розв'язування нелінійної крайової задачі ґрунтується на скінченнорізницевому методі. Для задання параметрів моделі використовуються формули Ван Генушена.

У результаті реалізації моделі знаходяться напір та тиск у вузлах розрахункової різницевої сітки. Положення вільної поверхні ґрунтових вод визначається з розв'язку задачі. Нижче наводиться приклад розрахунку в напорах за умови, що ширина каналу по дну 1.5 м, глибина 1 м, коефіцієнт закладення відкосу 1.5.



За допомогою розробленої комп'ютерної моделі проведена серія розрахунків з метою визначення втрат води на фільтрацію з каналів у ґрунтових руслах для різних типів ґрунтів (супіску, легкого суглинку, суглинку, важкого суглинку) та для різних глибин залягання грунтових вод. Модельним шляхом визначений об'єм води Q (в м^3), що надходить на поверхню ґрунтових вод з одного погонного метра каналу за добу в залежності від типу ґрунту та початкової потужності зони аерації (в розрахунках 3 м та 2 м). Наведені в таблиці значення об'єму води відповідають сталому режиму.

Об'єм води	Супісок	Легкий суглинок	Суглинок	Важкий суглинок
Q м^3 (3 м до РГВ)	1.375	2.443	0.439	0.193
Q м^3 (2 м до РГВ)	0.97	1.714	0.308	0.135

Ярослав Васильків

Львівський національний університет імені Івана Франка
j_vasylkiv@franko.lviv.ua, kond@franko.lviv.ua

УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ВЕЙЄРШТРАССА ПРО ЗОБРАЖЕННЯ ПЛЮРІСУБГАРМОНІЙНИХ В $\mathbb{C}^n$ ФУНКЦІЙ

На базі методу рядів Фур'є для δ-субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій, розробленого П. Новеразом, А. Кодратюком і Я. Васильківим, запропоновано універсальний спосіб побудови канонічних інтегралів Вейєрштрасса з апріорними оцінками зверху зростання їх неванліннових характеристик. До того ж, знайдені нами апріорні оцінки, за певного вибору роду канонічного інтеграла, є мінімальними мажорантами зростання. Вони природнім чином виникають в точних оцінках зверху модулів коефіцієнтів Фур'є $c_k(r;\mu,\alpha)$, $r>0$, $k\in\mathbb{Z}$, пари (μ,α), де μ — довільний борелевий заряд в $\mathbb{C}$ такий, що supp $\mu\cap\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}=\emptyset$, α — деяка послідовність комлексних чисел (а саме, послідовність коефіцієнтів тейлорового розвинення в одиничному крузі канонічного інтеграла Вейєрштрасса певного роду, що відповідає заряду μ).

Як наслідки, для канонічних інтегралів Вейєрштрасса отримано та уточнено ряд оцінок, отриманих для добутків Вейєрштрасса в роботах Г. Янка та Л. Фолькмана, Г. Франка, В. Хеннекемпера та Г. Поллочека, Йо. Вінклера, А. Гольдберга, В. Бергвайлера, А. Кондратюка та Я. Васильківа. Крім того, узагальнено і розв'язано задачу А. Гольдберга про канонічну декомпозицію δ-субгармонійних в $\mathbb{C}$ функцій.

Ці результати узагальнено на різниці плюрісубгармонійних в $\mathbb{C}^n$ функцій. З цією метою знайдено $H(p,q)$ — розвинення плюрісубгармонійних функцій за голоморфними та антиголоморфними однорідними поліномами і побудовано відповідні канонічні інтеграли з ядрами А. Кнезера.

Олег Васюник

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
dept13@iapmm.lviv.ua

ТЕРМОДИФУЗОПРУЖНІСТЬ ТОНКОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ

На основі виведених рівнянь руху, рівнянь темплопровідності, рівнянь дифузії розв'язано динамічну задачу термодифузопружності тонких циліндричних оболонок в замкненому вигляді.

Оболонка завтовшки $2h$ знаходиться в умовах конвективного теплообміну і піддається осесиметриному температурному нагріву, дифундує осесиметрично у середовища відносно осі оболонки. Оболонка вільна на торцях. При виводі формул рівнянь руху, рівнянь теплопровідності, рівнянь дифузії, будували відповідний принцип Лагранжа для термодифузопружності тонких поперечно гофрованих за синусоїдальним законом циліндричних оболонок. За визначальні термодинамічні параметри брали деформацію ε_{ij}. температуру T, хімічний потенціал ϕ. Використовуючи варіаційний принцип Лагранжа для термопружності тонких оболонок, формували за аналогією варіаційний принцип Лагранжа для термодифузопружності тонких циліндричних оболонок.

Усі задачі розв'язуються окремо. Спочатку розв'язуємо рівняння на температуру, потім розв'язуємо рівняння на хімічний потенціал, і нарешті, розв'язуємо рівняння на переміщення та кут повороту.

Віктор Вербіцький, Олексій Вербіцький

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова
vvverb@mail.ua

ПІДВИЩЕННЯ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ПОЛОГОЇ ОБОЛОНКИ

У роботах [1,2] доведено збіжність змішаного методу скінченних елементів у задачах на власні значення стійкості та коливань пологих оболонок, встановлено порядки швидкості збіжності дискретних власних значень та функцій. Задача власних коливань пологих оболонок являє собою спектральну задачу для еліптичної системи одного диференціального рівняння з частинними похідними четвертого порядку та двох рівнянь другого порядку. В статті [3] для встановлення підвищеного порядка збіжності власних значень та функцій скінченно-елементної апроксимації бігармонічної спектральної задачі використано апостеріорні обчислення (postprocessing).

Нами встановлено підвищені порядки збіжності власних значень та функцій скінченно-елементної апроксимації спектральної задачі власних коливань пологої оболонки.

1. Масловская Л.В., Вербицкий В.В. Сходимость смешанного метода конечных элементов в задачах устойчивости пологих оболочек// Известия вузов. Математика. – 1993. - № 10. – С. 21–31.
2. Вербицкий В.В. Сходимость смешанного метода конечных элементов в задаче на собственные значения колебаний пологих оболочек// Вісник Одеського університету. – 2000. – **5**, вип. 3. – С. 57–61.
3. Andreev A.B., Lazarov R.D., Racheva M.R. Postprocessing and higher order convergence of mixed finite element approximations of bigarmonic eigenvalue problems// J. comput. appl. math. – 2005. – **182**, № 2. – P. 333–349.

Людмила Винницька, Ярема Савула

Львівський національний університет імені Івана Франка
lyuda_vyn@yahoo.com, savula@franko.lviv.ua

ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРУЖНОГО ТІЛА З ТОНКИМ ГНУЧКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

У математичному моделюванні реальних об'єктів виникає потреба об'єднання в одній моделі різномасштабних елементів, що мають різні властивості. Такий підхід у сучасній науці отримав назву гетерогенного різномасштабного методу (ГРМ) [1].

До проблем, що вирішують з використанням ГРМ, належить також моделювання механіки деформування пружних тіл з тонкими покриттями та включеннями. Необхідність розгляду таких задач зумовлена тим фактом, що наявність тонких включень чи покриттів має істотний вплив на розподіл переміщень, деформацій та напружень у системах. Тому об'єкт, що описується такою математичною моделлю, слід розглядати як такий, що складається з двох частин: базової (масивної) та тонкої. Для запису математичної моделі використано теорію пружності (масивна частина, 2D) та безмоментну теорію оболонок (тонка частина, 1D). Для об'єднання рівнянь в одну систему записано умови спряження на спільних границях елементів, що мають різну вимірність. Формулювання задачі подано у диференціальній та варіаційній формах.

Числовий аналіз моделі здійснено за допомогою методу скінченних елементів при поділі двовимірної частини області на трикутні елементи. За апроксимаційні базисні функції вибрано одно- та двовимірні функції - "бульбашки", що утворюють ієрархічні базиси [2]. У даній роботі подаємо результати обчислювальних експериментів, а також порівняння числових та аналітичних розв'язків деяких задач.

1. W. E, B. Engquist, X. Li, W. Ren, E. Vanden-Eijnden. The heterogeneous multiscale method: a review, 2005. Available from `http://www.math.princeton.edu/multiscale`.

2. B. Szabo, I. Babuska. Finite element analysis. – John Wiley and Sons, 1991.

Bohdan Vynnytskyi, Volodymyr Dilnyi

ON SOME POISSON TYPE FORMULAS

Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University
dilnyi@ukr.net

Let $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1 \leqslant p < +\infty, \sigma \geqslant 0$, be the space of analytic in the half-plane $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$ functions, for which

$$\sup_{|\varphi|<\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{+\infty} |f(re^{i\varphi})|^p e^{-p\sigma r|\sin\varphi|} dr \right\} < +\infty.$$

Functions $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ have almost everywhere on $\partial\mathbb{C}_+$ the angular boundary values $f(iy)$, and $f(iy)e^{-\sigma|y|} \in L^p(\mathbb{R})$. If $\sigma = 0$ then class $H^p_\sigma(\mathbb{C}_+)$ is equal [1] to Hardy space $H^p(\mathbb{C}_+)$. Also Paley-Wiener class of entire functions of exponential type $\leqslant \sigma$ that belong to $L^2(\mathbb{R})$ is a subset of $H^2_\sigma(\mathbb{C}_+)$.

Theorem. *If* $f \in H^p_\sigma(\mathbb{C}_+), 1 \leqslant p < +\infty, \sigma \geqslant 0$, *then*

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-i\sigma(z-iv)} f(iv)}{(y-v)^2 + x^2} dv + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{xe^{i\sigma(z-iv)} f(iv)}{(y-v)^2 + x^2} dv -$$

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{xf(u)\sin\sigma(z-u)}{(u-z)(u+\overline{z})} du, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}_+,$$

$$f(z) = \frac{i}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(v-y)e^{-i\sigma(z-iv)} f(iv)}{(y-v)^2 + x^2} dv + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{(v-y)e^{i\sigma(z-iv)} f(iv)}{(y-v)^2 + x^2} dv -$$

$$-\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{(u-iy)f(u)\sin\sigma(z-u)}{(u-z)(u+\overline{z})} du, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}_+.$$

In the case $\sigma = 0$, the first formula is the Poisson integral for Hardy space.

1. Седлецкий А. М. Эквивалентное определение пространств H^p в полуплоскости и некоторые приложения // Матем. сб. – 1975. – **96**, № 1. – С.75-82.

Богдан Винницький, Олександр Шаповаловський

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка

ПРО ОЦІНКУ КОЕФІЦІЄНТІВ ПОЛІНОМІВ ЗА ФУНКЦІЯМИ МІТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

Отримано оцінку коефіцієнтів поліномів за функціями Міттаг-Леффлера, яка є узагальненням відомої оцінки Л.Шварца [1] для поліномів із експонент.

Теорема. *Якщо* $\{\lambda_k : k \in \overline{1;n}\} \subset \{z : Re\ z > 0\}$, $d_k \in \mathbb{C}$, $\mu \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$, $\omega = 2\mu - 2$, $E(z;\mu) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu+n)}$ *і*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} d_k E(\lambda_k z; \mu),$$

то

$$|d_k| \leqslant \frac{\left(\int\limits_{-\infty}^{0} |f(\tau)|^2 |\tau|^\omega d\tau\right)^{1/2}}{\sqrt{2Re\ \lambda_n} \cdot |F_k(\lambda_k)|},\ k \in \overline{1;n},$$

де

$$F_k(z) = (z-\lambda_k)^{-1}(1+z)^{-\omega/2} \prod_{i=1}^{n} \frac{z-\lambda_i}{z+\overline{\lambda}_i}.$$

1. Schwartz L. Etude des sommes d'exponentielles reeles. – Paris: Herman, 1943. – 207 p.

Ніна Вірченко

Національний технічний університет України „КПІ“

ПРО ОДНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ B-ФУНКЦІЇ

Запровадимо (τ,β)- узагальнену B-функцію за допомогою виразу

$$ {}_{\tau,\beta}B_a^c(x,y;b) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-\frac{b}{t(1-t)})dt, \qquad (1)$$

де x,y – комплексні змінні, $Reb>0, \tau>0, \beta>0$, ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)$ – узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція [1]. При $a=c$ в (1) матимемо функцію $B(x,y;b)$ [2], а при $a=c,\ b=0$ для $Rex>0,\ Rey>0$ функція (1) зводиться до класичної бета-функції $B(x,y)$.

Вивчено основні властивості функції (1), встановлено низку функціональних, диференціальних та інтегральних співвідношень.

Теорема. *За умов існування функції (1) вірна рівність*

$$ {}_{\tau,\beta}B_a^c(x,y+1;b) + {}_{\tau,\beta}B_a^c(x+1,y;b) = {}_{\tau,\beta}B_a^c(x,y;b) \qquad (2)$$

та рекурентне співвідношення

$$ x\ {}_{\tau,\beta}B_a^c(x,y+1;b) - y\ {}_{\tau,\beta}B_a^c(x+1,y;b) = \qquad (3)$$

$$ = bA[{}_{\tau,\beta}B_a^c(x+1,y-1;b) - {}_{\tau,\beta}B_a^c(x-1,y+1;b)]$$

$$ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a+\tau;\ c+\beta;\ -\frac{b}{t(1-t)}),$$

де $A=\Gamma(c)\Gamma(a+\tau)/\left(\Gamma(a)\Gamma(c+\beta)\right)$.

Для доведення співвідношення (3) застосовуємо до функції

$$ F(t;y;b) = H(1-t)(1-t)^{y-1}\ {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;-\frac{b}{t(1-t)}) \qquad (4)$$

та її похідної інтегральне перетворення Мелліна. У формулі (4) $H(x)$ – функція Гевісайда.

1. Вірченко Н.О. Узагальнені спеціальні функції та їх застосування // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2006. – №4. – С. 42–49.
2. Chaudhry M.A., Zubair S.M. On a class of incomplete gamma functions with applications / Chapman and Hall. – CRC, 2000. – 494 p.

Александр Витюк

Одесский национальный университет им. И. И. Мечникова

МЕТОД УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Регуляризованной производной порядка $\alpha \in (0,1)$ от функции $f : R_+ \to R$ называем функцию

$$\overline{D}_0^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_0^x \frac{(f(t) - f(0))}{(x-t)^{1-\alpha}} dt,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\overline{D}_0^{\alpha} y(x) = \varepsilon^{\alpha} F(x, y(x)),$$

решения которого удовлетворяют условию

$$y(0) = y_0,$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Пусть функция $F(x,y)$ определена в области $G = \{(x,y) : x \geq 0, y \in Q \subset R\}$ и равномерно относительно $y \in Q$ существует предел

$$\lim_{x \to \infty} F(x,y) = \Phi(y). \tag{1}$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема. *Пусть функция $F(x,y)$ непрерывна в области G, удовлетворяет условию Липшица по y, $|F(x,y)| \leq M$, равномерно относительно $y \in Q$ существует предел (1), а решение задачи Коши $\overline{D}_0^{\alpha} z(x) = \varepsilon^{\alpha} \Phi(z(x)), z(0) = y_0$ определено для $x \geq 0$ и лежит в области Q вместе с некоторой его ρ — окрестностью при $0 < \varepsilon \leq \overline{\varepsilon}$.*

Тогда для любого сколь угодно малого $\eta > 0$ и сколь угодно большого $L > 0$ можно указать такое $\varepsilon_0(\eta, L) \leq \overline{\varepsilon}$, что при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $x \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ справедливо неравенство $|y(x) - z(x)| \leq \eta$.

Світлана Возна

Національний університет „Львівська політехніка“

АПРОКСИМАЦІЙНА ФОРМУЛА У ВИГЛЯДІ ПРИЄДНАНОГО НЕПЕРЕРВНОГО ДРОБУ

Одним із способів одержання правильного неперервного С-дробу, відповідного до формального ряду Тейлора, є здійснення граничного переходу в інтерполяційній формулі Тіле, коли всі вузли інтерполяції збігаються до однієї точки [1].

Виявилося, що апроксимаційна формула у вигляді приєднаного неперервного дробу

$$c_0 + c_1(x - x_0) + \cfrac{k_1(x - x_0)^2}{1 + l_1(x - x_0) - \mathop{\mathrm{D}}\limits_{j=2}^{\infty} \dfrac{k_j(x - x_0)^2}{1 + l_j(x - x_0)}} \qquad (1)$$

може бути отримана з інтерполяційного дробу

$$K_{2n+1}(x) = \omega_0(x_0) + \omega_1(\mathbf{x}_1)(x - x_0) + \mathop{\mathrm{D}}\limits_{k=0}^{n-1} \frac{(x - x_{2k})(x - x_{2k+1})}{\omega_{2k+2}(\mathbf{x}_{2k+2}) + \omega_{2k+3}(\mathbf{x}_{2k+3})(x - x_{2k+2})}, \qquad (2)$$

де $\omega_0(x_0) = f(x_0)$, $\omega_{2k}(\mathbf{x}_{2k}) = \dfrac{x_{2k} - x_{2k-1}}{\omega_{2k-1}(\mathbf{x}_{2k-2}, x_{2k}) - \omega_{2k-1}(\mathbf{x}_{2k-1})}$, $\omega_{2k+1}(\mathbf{x}_{2k+1}) = \dfrac{\omega_{2k}(\mathbf{x}_{2k-1}, x_{2k+1}) - \omega_{2k}(\mathbf{x}_{2k})}{x_{2k+1} - x_{2k}}$, для функції однієї змінної $f(x)$ граничним переходом при всіх $x_i \to x_0$ $i = 1, 2, \ldots$. Для здійснення цього граничного переходу використано зв'язок мішаних різниць дробу (2) і обернених різниць Тіле.

Встановлено, що парною частиною дробу, оберненого до дробу Тіле, є обернений дріб до інтерполяційного дробу (2).

1. Скоробогатько В. Я. Теория ветвящихся цепных дробей и ее приложения в вычислительной математике.– М.: Наука, 1983. – 312 с.

Сергій Вознюк

Національний аерокосмічний університет "ХАІ"
sergey.voznyuk@d4.khai.edu

ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ КОНУСА ЗІ СФЕРИЧНОЮ НЕОДНОРІДНІСТЮ

Розглядається задача про визначення напружено-деформівного стану ізотропного лінійно-пружного теплопровідного конуса обертання, що містить всередині включення у вигляді сферичної порожнини, яка знаходиться під впливом внутрішнього тиску та температури. На поверхні конуса підтримується нульова температура. Вважається, що центр сфери розташований на вісі обертання конуса.

Задача розв'язується узагальненим методом Фур'є. При цьому застосовуються дві сферичні системи координат, повязані відповідно із порожниною, та конусом, а також рухомі репери циліндричної системи координат. Загальний розв'язок задачі шукається у вигляді суми загального розв'язку однорідного та частинного розв'язку неоднорідного (термопружного)рівняння Ламе, що розкладаються за базисними векторними розв'язками рівняння рівноваги ізотропного пружного середовища в переміщеннях (рівняння Ламе) для застосованих систем координат [1]. Щоб задовольнити граничним умовам застосовуються теореми додавання зазначених розв'язків [2], що врешті дає можливість привести задачу до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, властивості оператора якої дозволяють застосувати до її розв'язання метод редукції.

Було проведено числові розрахунки напружень поблизу поверхні сферичної порожнини для різних параметрів задачі. Результати подаються у вигляді графіків. Досліджується вплив параметрів задачі на величини напружень поблизу порожнини.

1. Напряженно-деформированное состояние конуса с дисковой трещиной / С.Н.Вознюк, А.Г.Николаев // Теорет. и прикладная механика. 2005. Вып. 41. С. 9-13.
2. Николаев А.Г. Теоремы сложения решений уравнения Ламе // Харьк. авиац. ин-т.- Харьков, 1993. - 109 с. Деп. ГНТБ Украины 21.06.93, №1178 - Ук 93.

Сергій Войтенко

Інститут математики НАН України
svmath@mail.ru

НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ СУМАМИ ФУР'Є

Нехай $C^{\overline{\psi}}_{\infty}$ (див. [1]) — множина всіх неперервних 2π-періодичних функцій f, які можна подати у вигляді згортки

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi(t)\,dt = \frac{A_0}{2} + (f^{\overline{\psi}} * \Psi)(x),$$

де $\Psi(x)$ — функція, яка має ряд Фур'є $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\psi_1(k)\cos kx + \psi_2(k)\sin kx)$, $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара довільних числових послідовностей, $A_0 = const$.

Функція φ називається $\overline{\psi}$-похідною функції f і позначається через $f^{\overline{\psi}}$, $\operatorname{ess\,sup}\limits_{t} |f^{\overline{\psi}}(t)| \leq 1$.

Нехай $S_n(f;x)$ — частинна сума Фур'є порядку n функції $f(x)$ і $\rho_n(f;x) = f(x) - S_n(f;x)$.

Через $\mathfrak{M}$ позначимо множину всіх неперервних додатних функцій $\psi(x)$, які опуклі донизу при $x \geq 1$ і задовольняють умову $\lim\limits_{x\to\infty}\psi(x) = 0$.

Якщо $\psi \in \mathfrak{M}$ і $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\psi(t)}{t}\,dt < \infty$, то покладають $\psi \in \mathfrak{M}'$.

Справедливе наступне твердження.

Теорема. *Нехай $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, тоді для всіх $f \in C^{\overline{\psi}}_{\infty}$, $\forall x \in [-\pi;\pi]$ при $n \in N$ справедлива рівність*

$$\sup_{f\in C^{\overline{\psi}}_{\infty}} \left\| \frac{1}{2}\left[\rho_n\left(f; x+\frac{\pi}{2n}\right) + \rho_n\left(f; x-\frac{\pi}{2n}\right)\right]\right\|_C = \frac{\pi}{2}\int\limits_{n}^{\infty}\frac{\psi_2(x)}{x}\,dx + \gamma_n,$$

де $$|\gamma_n| < \psi_1(n)\left(si\pi + \tfrac{1}{n} + 2\right) + \tfrac{\psi_2(n)}{\pi}\Bigg(8 + (1+\pi)2\ln 3\Bigg) +$$

$$+4\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,|\psi_1'(n)|\,n + 10\frac{2}{3}\,|\psi_2'(n)|\,n.$$

1. Степанец А. Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$-интегралов. // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069-1113.

Олександр Волох, Мирослав Шеремета

Львівський національний університет імені Івана Франка
tftj@franko.lviv.ua

ПРО ЗБІЖНІСТЬ ФОРМАЛЬНИХ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ЗА СПЕЦІАЛЬНОЇ УМОВИ НА ПОХІДНІ ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА

Нехай $(f_k)_{k=0}^{\infty}$ – довільна послідовність комплексних чисел, $A(0)$ – клас формальних степеневих рядів

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, \qquad (1)$$

а $A(R)$ – клас рядів (1) з радіусом збіжності $\geq R$. Будемо говорити, що $f\in A^{+}(R)$, $(R\geq 0)$, якщо $f\in A(R)$ і $f_k>0$ для всіх $k\geq 0$. Для функцій $f\in A(0)$ і $l(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} l_k z^k\in A^{+}(0)$ формальний степеневий ряд $D_l^n f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{l_k}{l_{k+n}} f_{k+n} z^k$ називається n-ою похідною Гельфонда-Леонтьєва.

У цьому повідомленні вкажемо умови на похідні Гельфонда-Леонтьєва формального степеневого ряду (1), за яких $f\in A(R)$ для $R>0$. З цією метою через Λ позначимо клас додатних числових послідовностей $\Lambda=(\lambda_k)$, $\lambda_1\geq 1$, і будемо говорити, що $\lambda\in\Lambda_*$, якщо $\lambda\in\Lambda$ і $\lambda_{k-1}\lambda_{k+1}/\lambda_k^2\geq 1$, $k\geq 2$. Говоритимемо також, що $l\in A_*^{+}(0)$, якщо $l\in A^{+}(0)$ і послідовність $(l_{k-1}l_{k+1}/l_k^2)$ неспадна. Нарешті, нехай N – клас зростаючих послідовностей (n_p) цілих невід'ємних чисел, $n_0=0$, а $A_\lambda(0)$ – клас формальних степеневих рядів (1) таких, що $|f_k|\leq\lambda_k|f_1|$ для всіх $k\geq 1$. Правильна така теорема.

Теорема. *Нехай $(n_p)\in N$. Для того, щоб для будь-яких $\lambda\in\Lambda_*$, $l\in A_*^{+}(0)$ і $f\in A(0)$ з умови $\forall p\in\mathbb{Z}_+\{\,D_l^{n_p} f\in A_\Lambda(0)\}$ випливало, що $f\in A(R)$, необхідно і досить, щоб*

$$\varliminf_{p\to+\infty}\frac{1}{n_p+1}\Big\{\ln\frac{1}{l_{n_p+1}}-p\ln l_1-\sum_{j=1}^{p}\ln\frac{\Lambda_{n_j-n_{j-1}+1}}{l_{n_j-n_{j-1}+1}}\Big\}\geq \ln R.$$

Жодної з умов $\lambda\in\Lambda_*$ і $l\in A_*^{+}(0)$ у теоремі позбутися не можна.

Богдана Гайвась, Василь Кондрат

Центр математичного моделювання ІППММ
ім. Я.С. Підстригача НАН України
kon@cmm.lviv.ua

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРИРОДНЬОГО ТА СТИМУЛЬОВАНОГО ОСУШЕННЯ КАПІЛЯРНО-ПОРИСТИХ ТІЛ ЗА УРАХУВАННЯ ДИСПЕРСІЇ РОЗМІРІВ ПОР

Робота присв'ячена постановці та розробці методики наближеного розв'язування задач осушення капілярно-пористих тіл з урахуванням дисперсії розмірів пор. Розглядається капілярно-пористе тіло, яке займає область (V) евклідового простору та обмежене гладкою поверхнею (S). Тіло контактує з газовим середовищем, яке є сумішшю повітря і водяної пари. Осушення тіла починається від його поверхні формуванням двофазової зони області тіла , в якій присутні як осушені, так і заповнені рідиною пори. З часом ширина двофазової зони збільшується, досягаючи граничного значення за умови рівності потоків пари назовні тіла та потоку капілярного підсмоктування рідини. Після цього в приповерхневій області формується зона осушених пор (газова зона). В процесі осушення межі розділу зон переміщаються вглиб від поверхні тіла і ширина їхня змінюється.

Записано нелінійні рівняння масоперенесення в осушеній та двофазній зонах, сформульовано умови спряження на шукану функцію на поверхнях контакту газової і двофазної зон та зони насичених рідиною пор, а також граничні умови на поверхні тіла. Методика наближеного розв'язування сформульованої нелінійної задачі будується з урахуванням наявності малого параметра, який відображає малість відмінності густин повітря в газовій зоні та на поверхні тіла.

Для визначення динаміки в часі інтегральної характеристики вологовмісту тіла сформульовано відповідну нелінійну задачу Коші, яка відображає баланс зміни маси вологи в тілі з її відтоком через зовнішню поверхню.

Отримано наближені розв'язки задачі осушення для капілярно-пористого шару за двостороннього симетричного осушення. Досліджено умови вагомості впливу дисперсії розмірів пор на характер протікання та загальний час осушення шару.

Таміла Гапак

Ужгородський національний університет
sts@ukr.net

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ТРИВИМІРНИМ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМ ЛАНЦЮГОВИМ ДРОБОМ

Функцію трьох змінних $f(x,y,z)$, яка задана значеннями в точках області $G \subset R^3$, інтерполюємо тривимірним ланцюговим дробом

$$T_n(x,y,z) = F_0^{(n)} + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \frac{(x-x_{k-1})(y-y_{k-1})(z-z_{k-1})}{F_k^{(n)}(x,y,z)}, \qquad (1)$$

Теорема 1. *1.Нехай для неперервної функції $f(x,y,z)$ визначено дріб (1), коефіцієнти якого обчислюються за значеннями функції в точках сітки G_n. 2. Коефіцієнти задовольняють умови*

$$|\,b_{ij\,l}\,| > \begin{cases} d+1, \text{ коли } (i>j, i>l), \text{ або } (j>i, j>l), \text{ або } (l>i, l>j) \\ d^2+3, \text{ коли } (i=j>l), \text{ або } (i=l>j), \text{ або } (l=j>i) \\ d^3, \text{ коли } i=j=l,\ d=\beta-\alpha. \end{cases}$$

3. Знайдеться точка $(x_*, y_*, z_*) \in G$, $x_* \notin X, y_* \notin Y, z_* \notin Z$, що

$$|\,b_{n+1,j,l}(x_*)\,| \geqslant d+1,\ |\,b_{i,n+1,l}(y_*)\,| \geqslant d+1,\ |\,b_{i,j,n+1}(z_*)\,| \geqslant d+1,$$
$$|\,b_{n+1,n+1,l}(x_*,y_*)\,| \geqslant d^2+3,\ |\,b_{n+1,j,n+1}(x_*,z_*)\,| \geqslant d^2+3,$$
$$|\,b_{i,n+1,n+1}(y_*,z_*)\,| \geqslant d^2+3,\ |\ b_{n+1,n+1,n+1}(x_*,y_*,z_*)\ | \geqslant d^3.$$

Коефіцієнти визначаються за значеннями функції в точках сітки G_n у випадку, коли $x_{n+1}=x_*,\ y_{n+1}=y_*,\ z_{n+1}=z_*$. Тоді

$$|\ f(x_*,y_*,z_*) - T_n(x_*,y_*,z_*)\ | \leqslant \frac{1}{d^{3n}} + \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{3d^{n+1-2k}(d-1)^2}{(d^{n+1}-d^k)(d^{n+2}-d^k)} + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{d^{2n+k}} + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{d^{n+1-i-k}(d-1)^2}{(d^{n+1}-d^i)(d^{n+2}-d^i)}\right]. \qquad (2)$$

1. Пагіря М.М. Інтерполювання функцій ланцюговим дробом та його узагальненнями у випадку функцій багатьох змінних // Науковий вісник Ужгор. ун-ту. Серія математика. — 1998. — № 3. — С. 155-165.

Ярослав Гарасим, Борис Остудін

Львівський національний університет імені Івана Франка
kom@franko.lviv.ua

ЧИСЕЛЬНО-АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ ПРОСТОРОВИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ

У роботі проаналізовано всі аспекти чисельного розв'язування граничних задач, що виникають у процесі моделювання електростатичних полів, створених електронно-оптичними системами просторової конфігурації. Розглянуто питання коректної постановки проблем, а також їх еквівалентності відповідним одно- та двовимірним інтегральним рівнянням (ІР). Автори мали на меті максимально використати специфіку розглядуваних задач, що виражалося у можливості декомпозиції складних областей, застосуванні апарату функцій Гріна, врахуванні симетрії у розташуванні окремих ділянок межі. Головною проблемою було чисельне розв'язування двовимірних ІР першого роду на розімкнених поверхнях складної геометричної форми. Як правило, отримання наближених розв'язків таких рівнянь вимагає значних обчислювальних ресурсів у зв'язку з необхідністю врахування сингулярної поведінки шуканих густин поблизу контуру розімкнених поверхонь, наявністю різного характеру особливостей у ядрах, великою розмірністю алгебраїчних систем, що апроксимують інтегральні оператори. Запропонований чисельно-аналітичний підхід дозволяє на основі нерівномірних сіток і методу найменших квадратів частково компенсувати ці труднощі та отримати цілком прийнятний для практики результат. Однак, цей метод можна використовувати лише для певного класу поверхонь. З метою розширення сфери його застосування запозичено ідеї методу граничних елементів. Досліджено відповідні наближені схеми, здійснено прискорення збіжності ітераційних процедур, необхідних для реалізації методу Шварца декомпозиції складних необмежених областей, оцінено похибки отриманих розв'язків. Проведено порівняльний аналіз запропоновуваного методу із традиційними, які опираються на аналітичні способи послаблення та компенсації різних видів особливостей. Обчислювальними експериментами продемонстровано переваги цього підходу. Наведено результати розв'язування задач у суттєво просторовій постановці, які мають безпосереднє відношення до електронної оптики.

Микола Гачкевич[1], Любов Гаєвська[1], Богдан Тріщ[2]

[1]ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України
[2]Львівський національний університет імені Івана Франка

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ РЕЖИМІВ НАГРІВУ СКЛЯНИХ КУСКОВО-ОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК ОБЕРТАННЯ З ВРАХУВАННЯМ ТЕРМОЧУТЛИВОСТІ ДОПУСТИМИХ НАПРУЖЕНЬ

Запропоновано числово-аналітичну методику побудови оптимальних за напруженнями режимів нагріву скляних кусково-однорідних оболонок обертання при заданих областях допустимої зміни температури і компонент напружень. Такі задачі оптимізації описуються системами диференціальних рівнянь теплопровідності та температурної задачі теорії пружності оболонок, які є нелінійними за рахунок термочутливості коефіцієнта температурного розширення матеріалу та допустимих напружень. Методику розв'язування оптимізаційної задачі побудовано способом покрокової параметричної оптимізації. Для реалізації етапу пошуку умовного мінімуму функціоналу максимальних нормальних напружень (критерій оптимальності) застосовано метод локальних варіацій в просторі станів функції керування, за яку прийнято температуру гріючого середовища. При цьому для перевірки обмежень за напруженнями використано апроксимації залежності допустимих напружень від температури інтерполяційним поліномом Лагранжа. Ключове місце в запропонованій методиці при визначенні початкового і k-го наближення функції керування займає побудова розв'язку прямої задачі термомеханіки. При визначенні температурного поля застосовано кубічну апроксимацію розподілу температури по товщинній координаті та метод сіток при знаходженні інтегральних характеристик температури (з відповідної системи диференціальних рівнянь із частинними похідними, що не містять товщинної координати і отримуються за наявних умов теплообміну) у вузлах. З використанням ключових рівнянь механіки для розглядуваних типів оболонок, а також апроксимації температурної залежності коефіцієнта теплового розширення кусково-лінійними функціями, отримано дискретні значення ключових функцій, зусиль, моментів і напружень у вузлах сітки.

Олександр Гачкевич, Богдан Дробенко, Карен Казарян

ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України
dept13@iapmm.lviv.ua
Політехніка Опольська, Польща
Інститут механіки НАН Вірменії

ЧИСЛОВИЙ ПІДХІД ДО ЗВ'ЯЗАНИХ ЗАДАЧ ТЕРМОМЕХАНІКИ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ НАМАГНІЧУВАНИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ТІЛ ЗА КВАЗІУСТАЛЕНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Запропоновано методику числового розв'язування зв'язаної задачі електродинаміки і теплопровідності та термопружно-пластичності у термочутливих деформівних тілах з різними електропровідністю і здатністю до намагнічування та поляризації за умов дії зовнішніх квазіусталених електромагнітних полів.

В основу покладено підхід, який ґрунтується на сумісному застосуванні в рамках однієї обчислювальної схеми методу скінченних елементів (для апроксимації шуканих розв'язків за просторовими змінними) та різницевих алгоритмів (для апроксимації за часом) за використання різних за величиною кроків числового інтегрування рівнянь електродинаміки, теплопровідності і термопружно-пластичності за часом.

Внаслідок проведення стандартної процедури скінчено-елементної дискретизації за просторовими змінними у варіанті методу зважених залишків зв'язану задачу теплопровідності й електродинаміки зведено до системи звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих значень температури та напруженості електричного чи магнітного полів у вузлах скінченно-елементного поділу області тіла і зовнішнього середовища, а задачу термопружно-пластичності відносно приростів переміщень на черговому кроці навантаження – до системи нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Як приклад, знайдено і досліджено розв'язки задач визначення параметрів наявних фізико-механічних процесів при високотемпературній індукційній обробці циліндричних деталей.

С. Гембарська, К. Жигалло

Волинський державний університет імені Лесі Українки
tetvas@ukr.net

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ З КЛАСУ ЛІПШИЦЯ ЇХ БІГАРМОНІЙНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ ПУАССОНА

Нехай C — клас 2π-періодичних неперервних функцій на $\mathbb{R}$ з нормою $\|f\|_C = \max\limits_{x\in R}|f\,(x)|$. У роботі вивчається поведінка при $\delta\to\infty$ величин $\mathcal{E}\,(H^\alpha; A_\delta)_C = \sup_{f\in H^\alpha}\|A_\delta(f,x)-f(x)\|_C$, $0<\alpha<1$, де $H^\alpha = \{f\in C : |f(x+h)-f(x)|\le |h|^\alpha\}$ – клас Ліпшиця порядку α (див., наприклад, [1]), а $A_\delta(f,x)$ – бігармонійний інтеграл Пуассона для 2π-періодичної сумовної функції f (див. [2]).

Теорема. *Для довільного $0<\alpha<1$ при $\delta\to\infty$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}\,(H^\alpha; A_\delta) = \frac{1}{\pi}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\left(\frac{\pi-\alpha}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\alpha-1}+\right.$$

$$+\left.2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k k\left(\frac{1}{(2k+1-\alpha)\,\pi^{2k+1-\alpha}}-\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{[t^\alpha]_{2\pi}}{t^{2k+2}}dt\right)\left(\frac{1}{\delta}\right)^{2k}\right)+$$

$$+\left(\frac{2}{\pi\delta}-\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\left(\frac{1}{\delta}\right)^{\alpha-1}+\frac{1}{(\alpha-1)\pi^{1-\alpha}}+\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{[t^\alpha]_{2\pi}}{t^2}dt\right)+$$

$$+\left(\frac{2}{\pi\delta}-\frac{1-e^{-\frac{2}{\delta}}}{\pi}\right)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\delta^{2k}}\left(\frac{1}{(2k+1-\alpha)\,\pi^{2k+1-\alpha}}-\int\limits_{\pi}^{\infty}\frac{[t^\alpha]_{2\pi}}{t^{2k+2}}dt\right),$$

де $[f]_{2\pi}$ – парне 2π-періодичне продовження функції f, $0\le t\le\pi$.

1. Степанец А.И. Равномерные приближения тригонометрическими полиномами. Линейные методы. – Киев: Наук. думка, 1981. – 340 с.
2. Петров В.А. Бигармонический интеграл Пуассона // Лит. мат. сб., 1967. – **7**, № 1. – С. 137–142.

Оксана Гентош

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
ohen@ukr.net

НЕЛОКАЛЬНІ ІНВАРІАНТНІ РЕДУКЦІЇ СУПЕРСИМЕТРИЧНОЇ ІЄРАРХІЇ ЛАБЕРЖЕ-МАТЬЄ

Розглядається ієрархія Лаберже-Матьє узгоджено бігамільтонових нелінійних динамічних систем, заданих векторними полями d/dt_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, яка містить суперсиметричне узагальнення рівняння Кортевега-де Фріза у вигляді:

$$
\begin{aligned}
a_{t_2} &= (a_{xx} - 4a^3 - 6a(D_\theta w) - 3(D_\theta a)w)_x,\\
w_{t_2} &= (w_{xx} - 3w(D_\theta w) - 12a^2 w + 6a(D_\theta a_x) + 3a_x(D_\theta a))_x,
\end{aligned}
$$

де $(a, w)^\top \in M^{1|1} \subset C^\infty(\mathbb{S}^1 \times \Lambda_1; \Lambda_0 \times \Lambda_1)$, $x \in \mathbb{S}^1 \simeq \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\theta \in \Lambda_1$, $\Lambda := \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ – алгебра Грасмана над полем $\mathbb{C}$, $D_\theta = \partial/\partial\theta + \theta\partial/\partial x$, та ізоспектрально пов'язана з лінійним диференціальним рівнянням

$$
D_\theta \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \\ f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -(a-\lambda) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-\lambda & w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \psi \\ f \\ g \end{pmatrix}, \qquad (1)
$$

де $(f, g, \phi, \psi)^\top \in L_\infty(\mathbb{S}^1 \times \Lambda_1; \Lambda_0^2 \times \Lambda_1^2)$, $\lambda \in \Lambda_0$ – спектральний параметр.

На нелокальному інваріантному підмноговиді $M_N^{1|1} \subset M^{1|1}$:

$$
M_N^{1|1} = \{(a, w)^\top \in M^{1|1} : \ grad\, L_N[a, w] = 0\}, \quad L_N = -\gamma_0 + \textstyle\sum_{j=1}^N c_j \lambda_j,
$$

де $\gamma_0 = \int_0^{2\pi} dx \int d\theta\, w$ – локальний закон збереження ієрархії Лаберже-Матьє, $\lambda_j \in D(M^{1|1})$ – деякі власні значення спектральної задачі (1), $c_j \in \Lambda_0$, $j = \overline{1, N}$, встановлено існування парної канонічної суперсимплектичної структури

$$
\omega^{(2)} = \textstyle\sum_{j=1}^N (2dg_j \wedge df_j - \phi_j \wedge \phi_j - \psi_j \wedge \psi_j),
$$

де $(f_j, g_j, \phi_j, \psi_j)^\top \in L_\infty(\mathbb{S}^1 \times \Lambda_1; \Lambda_0^2 \times \Lambda_1^2)$ – власні вектор-функції, що відповідають власним значенням $\lambda_j \in \Lambda_0$, $j = \overline{1, N}$. Доведено гамільтоновість та інтегровність за Лаксом-Ліувіллем векторних полів d/dt_k, $k \in \mathbb{Z}_+$, редукованих на скінченновимірний підмноговид $M_N^{1|1}$.

Володимир Гладун

Національний університет „Львівська політехніка“
v_hladun@yahoo.com

ПАРНІ ОБЛАСТІ СТІЙКОСТІ ДО ЗБУРЕНЬ ГІЛЛЯСТИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ З КОМПЛЕКСНИМИ ЧАСТИННИМИ ЗНАМЕННИКАМИ

У роботі побудовано та досліджено області відносної стійкості до збурень гіллястих ланцюгових дробів (ГЛД)

$$\left(b_0 + \mathop{\mathbf{D}}_{k=1}^{\infty} \sum_{i_k=1}^{N_{i(k-1)}} \frac{1}{b_{i(k)}}\right)^{-1}, \tag{1}$$

де усі $b_{i(k)} \in \mathbb{C}$. Нехай $I_0 = \{0\}$, $I_k = \{\, i(k) = i_1 i_2 \dots i_k : 1 \le i_p \le N_{i(p-1)}, p = \overline{1,k}\,\}$, $k \ge 1$.

Теорема. *Нехай* $\rho_{i(k)}$, $\rho_{i(k)} \in \mathbb{R}_+$, $i\,(k) \in I_k$, $k \ge 0$, φ_{2k+1}, $\varphi_{2k+1} \in \mathbb{R}$, $k \ge 0$, $\Gamma_{i(2k)}$, $\Gamma_{i(2k)} \in \mathbb{C}$, $i\,(2k) \in I_{2k}$, $k \ge 0$, *– задані сталі, такі що* $\left|\Gamma_{i(2k)}\right| < \rho_{i(2k)}$, $-\pi < \varphi_{2k+1} \le \pi$. *Області*

$$G_{i(2k)} = \left\{ z : \left| z - \left(\Gamma_{i(2k)} - e^{-i\varphi_{2k+1}} \sum_{i_{2k+1}=1}^{N_{i(2k)}} \frac{1}{2\rho_{i(2k+1)}} \right) \right| \ge \right.$$
$$\left. \ge \rho_{i(2k)} + \sum_{i_{2k+1}=1}^{N_{i(2k)}} \frac{1}{2\rho_{i(2k+1)}} \right\}, \quad i\,(2k) \in I_{2k},\ k \ge 0,$$

$$G_{i(2k-1)} = \left\{ z : \mathrm{Re} \left(\left(z - \sum_{i_{2k}=1}^{N_{i(2k-1)}} \frac{\bar{\Gamma}_{i(2k)}}{\rho^2_{i(2k)} - \left|\Gamma_{i(2k)}\right|^2} \right) e^{-i\varphi_{2k-1}} \right) \right.$$
$$\left. \ge \rho_{i(2k-1)} + \sum_{i_{2k}=1}^{N_{i(2k-1)}} \frac{\rho_{i(2k)}}{\rho^2_{i(2k)} - \left|\Gamma_{i(2k)}\right|^2} \right\}, \quad i\,(2k-1) \in I_{2k-1},\ k \ge 1,$$

є послідовністю областей відносної стійкості до збурень ГЛД (1), якщо збігається ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \prod_{l=0}^{k} \eta_l$, *де*

$$\eta_{2k} = \max_{i(2k) \in I_{2k}} \left\{ \left(\rho_{i(2k)} - \left|\Gamma_{i(2k)}\right| \right)^{-1} \sum_{i_{2k+1}=1}^{N_{i(2k)}} \rho^{-1}_{i(2k+1)} \right\}, k \ge 0,$$
$$\eta_{2k-1} = \max_{i(2k-1) \in I_{2k-1}} \left\{ \rho^{-1}_{i(2k-1)} \sum_{i_{2k}=1}^{N_{i(2k-1)}} \left(\rho_{i(2k)} - \left|\Gamma_{i(2k)}\right| \right)^{-1} \right\}, k \ge 1.$$

Отримано оцінки відносних похибок підхідних дробів ГЛД (1).

Мирослава Глебена, Марія Філяк, Григорій Цегелик

Львівський національний університет імені Івана Франка,
Ужгородський національний університет
kafmmsep@franko.lviv.ua

ЗБІЖНІСТЬ ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА СТІЙКІСТЬ ЧИСЕЛЬНОГО МЕТОДУ МАЖОРАНТНОГО ТИПУ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо задачу Коші для нормальної системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \quad y_i(x_0) = y_{i,0}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Нехай в області $\overline{D} = \{x_0 \leq x \leq x_0 + a, |y_i - y_{i,0}| \leq b, i = 1, 2, \dots, n\}$ функції $f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, неперервні і задовольняють умову Ліпшиця за аргументами $y_1, y_2, \dots, y_n$ зі сталою L. Тоді в проміжку $[x_0, x_0 + c]$ задача Коші матиме єдиний розв'язок, де $c = \min(a, b/M)$, а M – стала, така, що для всіх $(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in \overline{D}$ $|f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n)| \leq M$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Припустимо, що розв'язок задачі треба знайти на проміжку $[x_0, x_0 + c]$. Якщо на цьому проміжку вибрати систему точок $x_k = x_0 + kh$, де $k = 0, 1, 2, \dots, m$, $h = c/m$, то для відшукання наближених значень $y_{i,1}, y_{i,2}, \dots, y_{i,m}$ розв'язку задачі в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ одержуємо формулу [1]

$$y_{i,k+1} = y_{i,k} + h\frac{f_i(x_{k+1}, y_{1,k+1}, \dots, y_{n,k+1}) - f_i(x_k, y_{1,k}, \dots, y_{n,k})}{\ln(f_i(x_{k+1}, y_{1,k+1}, \dots, y_{n,k+1})/f_i(x_k, y_{1,k}, \dots, y_{n,k}))},$$

яка виражає ітераційний метод розв'язування задачі Коші. Нами встановлена ознака збіжності методу, його обчислювальна стійкість та досліджена ефективність.

1. Цегелик Г.Г. Нелінійний, неяний, однокроковий чисельний метод розв'язування задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь // Наук. зб. "Прикладні проблеми механіки і математики". Вип. 3. – 2005. – С. 21–27.

Василь Гнатюк, Юрій Гнатюк, Уляна Гудима

Кам'янець-Подільський державний університет
gneve@yandex.ru

ЗАДАЧА НАЙКРАЩОЇ РІВНОМІРНОЇ РАЦІОНАЛЬНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ НЕПЕРЕРВНОГО КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ

Нехай S - метричний компакт, $C(S)$ - лінійний над полем дійсних чисел простір неперервних на S дійснозначних функцій з нормою $\|g\| = \max\limits_{s\in S}|g(s)|$, $K(R)$- сукупність непорожніх компактів простору R , $C(S, K(R))$- множина багатозначних відображень a компакту S в R, які неперервні за Хаусдорфом на $K(R)$,$U \subset C(S)$, $C^+(S) = \{g : g \in C(S) : \ g(s) > 0\ ,\ s \in S\}$, $V \subset C^+(S)$, $\frac{U}{V} = \left\{\frac{u}{v} :\ u \in U, v \in V\right\}$.

Задачею найкращої рівномірної раціональної апроксимації відображення $a \in C(S, K(R))$ множиною $\frac{U}{V}$ називається задача відшукання величини:

$$\alpha^*_a\left(\frac{U}{V}\right) = \inf_{\substack{u\in U,\\ v\in V}} \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left|\frac{u(s)}{v(s)} - y\right|. \quad (1)$$

Якщо існують $u^* \in U, v^* \in V$ такі, що $\alpha^*_a\left(\frac{U}{V}\right) = \max\limits_{s\in S} \max\limits_{y\in a(s)} \left|\frac{u^*(s)}{v^*(s)} - y\right|$, то $\frac{u^*}{v^*}$ будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

В роботі доведено теореми існування та критерії екстремального елемента для величини (1) , побудовано задачу двоїсту до задачі відшукання величини (1) , встановлено співвідношення двоїстості.

Теорема. *Нехай U та V опуклі множини простору $C(S)$ розмірності r та l відповідно. Для того щоб елемент $\frac{u^*}{v^*}$, $u^* \in U$,$v^* \in V$, був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб існували точки $s_j \in S$, $y_j \in a(s_j)$, додатні числа ρ_j, $1 \le j \le \nu$, $1 \le \nu \le r + l + 1$, $\sum\limits_{j=1}^{\nu} \rho_j = 1$, такі, що*

$$sign\left(\frac{u^*(s_j)}{v^*(s_j)} - y_j\right)\left(\frac{u^*(s_j)}{v^*(s_j)} - y_j\right) = \max_{s\in S} \max_{y\in a(s)} \left|\frac{u^*(s)}{v^*(s)} - y\right|,$$

$$\min_{\substack{u\in U,\\ v\in V}} \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j sign\left(\frac{u^*(s_j)}{v^*(s_j)} - y_j\right)\frac{u(s_j)}{v(s_j)} = \sum_{j=1}^{\nu} \rho_j sign\left(\frac{u^*(s_j)}{v^*(s_j)} - y_j\right)\frac{u^*(s_j)}{v^*(s_j)}.$$

Александр Голушков

Одесский национальный политехнический университет

ЗАДАЧА НИКОЛЕТТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Пусть $J = [a, b]$, $\alpha \in (0, 1)$, $f \in L(J)$, $c \in (a, b)$,

$$I_c^\alpha f(x) = \frac{sign(x-c)}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_c^x \frac{f(t)dt}{|x-t|^{\alpha-1}},$$

$$D_c^\alpha f(x) = sign(x-c)\frac{df_{1-\alpha}(x)}{dx}, f_{1-\alpha}(x) = I_c^{1-\alpha} f(x),$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Регуляризованной производной функции $f(x)$ с началом в точке c называем функцию

$$\overline{D}_c^\alpha f(x) = D_c^\alpha (f(x) - f(c)). \tag{1}$$

Рассмотрим систему

$$\overline{D}_{x_i}^\alpha y_i(x) = F_i[x, y(x)] \equiv F_i[x, y_1(x), \ldots, y_n(x)], x_i \in J, \tag{2}$$

решения которой удовлетворяют условиям

$$y_i(x_i) = \gamma_i, i = \overline{1, n}. \tag{3}$$

Под решением задачи (1), (2) понимаем вектор-функцию $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ такую, что функции $y_i(x) \in C(J)$, $y_{i,1-\alpha}(x) = I_{x_i}^{1-\alpha} \times y_i(x) \in AC(J)$, а также функции $y_i(x)$ удовлетворяют условиям (2) и системе (1) для почти всех $x \in J$.

Доказано, что задача (1), (2) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$y_i(x) = \gamma_i + \frac{sign(x-x_i)}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_{x_i}^x |x-t|^{\alpha-1} F_i[t, y(t)]dt, \quad i = \overline{1, n}.$$

Получены достаточные условия существования и единственности решения задачи (1), (2).

Владимир Голушков

Одесский национальний университет им. И.И. Мечникова

СМКЭ РАСЧЕТА ОГИБАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ СЕМЕЙСТВА ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Компактность и функциональность требует определения пространства, в котором размещается динамическая система. Рассматривается задача определения огибающей поверхности части трехмерного пространства, в котором размещается семейство гибких цилиндрических оболочек. Семейство имеет: одинаковые крепления на торцах, минимально допустимый радиус искривления R, постоянную длину L оси симметрии оболочек, которая превосходит длину кривой между торцами с радиусом не меньше R. Семейству оболочек соответствует множество внешних сил.

Используется модель Новожилова-Койтера и условие несжимаемости оси симметрии оболочек, что приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Используется итерационная схема, основанная на смешанном методе конечных элементов (СМКЭ) [1]. Доказывается сходимость метода, получена оценка погрешности для точек соприкосновения оболочки с огибающей поверхностью. Условия прикрепления огибающей и интерполирования позволяют восстановить огибающую поверхность с погрешностью, которая по порядку не превосходит погрешность СМКЭ. Получены результаты расчетов с помощью созданного пакета WireShellSpace.

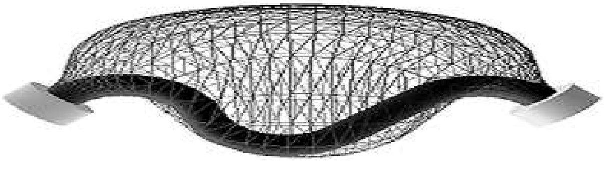


Рис. Огибающая поверхность и оболочка.

1. Голушков В.Г., Масловская Л.В. Смешанный метод конечных элементов в задачах теории оболочек // ЖВМ и МФ. – 1994. – **34**, № 5. – С.748-769.

Volodymyr Gorbachuk

National Technical University "KPI"

ON THE WELL-POSEDNESS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR ELLIPTIC-TYPE OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS

We consider the problem

$$\begin{cases} y''(t) &= By(t) + f(t), \quad t \in [0, \infty), \\ y(0) &= y_0, \end{cases} \tag{1}$$

where B is a positive operator on a Banach space X with norm $\|\cdot\|$, $f \in C^1([0,\infty), X)$, $\sup\limits_{t\in[0,\infty)} \|f(t)\| < \infty$, $y_0 \in X$.

It is shown that under the above conditions, there exists a unique solution of problem (1) in the class of vector-valued functions $y(t)$ with the property

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\sqrt{s}t}\|y(t)\| = 0,$$

where $s = s(B) = \inf\{\Re\lambda : \lambda \in \sigma(B)\}$, $\sigma(B)$ is the spectrum of the operator B.

Myroslav Gorbachuk, Valentyna Gorbachuk

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine

ON BEHAVIOR AT INFINITY OF ORBITS OF ANALYTIC SEMIGROUPS

Let $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ be a C_0- semigroup of bounded linear operators on a Banach space $\mathfrak{B}$ with generator A. The semigroup $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ is called:

(a) uniformly exponentially stable, if

$$\exists \varepsilon > 0 : \lim_{t\to\infty} e^{\varepsilon t}\|T(t)\| = 0,$$

(b) strongly stable, if

$$\forall x \in \mathfrak{B} \quad \lim_{t\to\infty} \|T(t)x\| = 0.$$

We give a criterion for the semigroup $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ to be uniformly exponentially stable, which generalizes in particular the theorem of Datko and Pazy, and in the case where an analytic bounded semigroup $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ with analyticity angle $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ is not uniformly exponentially but strongly stable, we study the behavior of its orbits $T(t)x$, $x \in \mathfrak{B}$, at infinity. In this case, $0 \in \sigma_c(A)$ ($\sigma_c(A)$ is the continuous spectrum of A), and the inverse A^{-1} of the operator A generates a bounded analytic semigroup, too, with the same analyticity angle θ. In terms of smoothness of a vector $x \in \mathfrak{B}$ for the operator A^{-1}, the degree of convergence of $T(t)x$ to 0 as $t \to \infty$ is determined. We show in particular that for such a semigroup, there exist orbits decreasing at infinity like $e^{-at^{\alpha}}$ with arbitrary $a > 0$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2(\pi-\theta)}$, and the set of such orbits is dense in the set of all orbits $T(t)x$. The equality sign in the right-hand bound for α is, in general, impossible: one can prove, for example, that there exist semigroups $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ with analyticity angle $\frac{\pi}{2}$ whose sets of exponentially decreasing orbits consist only of zero orbit. But under the condition

$$\int_0^1 \ln\ln M(s)\, ds < \infty, \quad M(s) = \sup_{z:|\Im z|\geq s} \|(A^{-1} - zI)^{-1}\|,$$

the set of all exponentially decreasing orbits of the semigroup $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ is dense in the set of all its orbits.

Omelian Horbachuk, Mykola Komarnytskiy, Yuri Maturin

Ivan Franko Lviv National University
Ivan Franko Drohobych Pedagogical University

DIFFERENTIALLY CLOSED FIELDS AND DIFFERENTIAL PRERADICALS

All rings are considered to be associative with $1 \neq 0$. All modules are unitary right modules. Let A be a differential ring.

Definition. A differential preradical r of $A - D$ Mod assigns to each differential A-module C its differential submodule $r(C)$ in such a way that: (DTI) for every differential A-homomorphism $f : N \to M$ $f(r(N)) \subseteq r(M)$. A differential preradical r of $A - D$ Mod is said to be idempotent in case

(DT2) for every differential left A-module N $r(r(N)) = r(N)$. A differential preradical r of $A - D$ Mod is said to be a differential radical in case

(DT3) for every differential left A-module N $r(N/r(N)) = 0$. A differential preradical r of $A - D$Mod is said to be hereditary in case

(DT4) for every differential left A-module M and for every its differential submodule N $r(N) = N \cap r(M)$.

Definition. Let σ be a differential preredical of the category of differential left A-modules. We shall say that σ splits if for every differential left A-module M there exists a differential submodule K of M such that $M = \sigma(M) \oplus K$.

Definition. A differential field F is said to be differentially closed in case for every differential equation $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_nx = b$ $(n \in N, \{a_1, \ldots, a_n, b\} \subseteq F)$ there exists its solution belonging to F.

Theorem 1. *Let A be a differential ring. If I is an idempotent ideal of A then $\sigma : M \mapsto \sigma(M)$ $(\sigma(M) = \{m \in \mid \forall a \in I\ \forall n \in \{0, 1, 2, \ldots\} : am^{(n)} = 0\}$, M is a differential left A-module) is a differential hereditary radical.*

Theorem 2. *If F is a differential field with $char(F) = 0$ then every differential hereditary radical splits if and only if F is differentially closed.*

1. Горбачук О.Л., Комарницький М.Я. Про диференціальні кручення // Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. – К.: Наук. думка, 1977.

Василь Городецький, Олег Ленюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ПСЕВДО-БЕССЕЛЕВИМИ ОПЕРАТОРАМИ

Останні десятиліття інтенсивно розвивається теорія псевдодиференціальних операторів (ПДО), які формально можна подати у вигляді $F^{-1}[aF]$, де a – функкція (символ), що задовольняє певні умови, F та F^{-1} – пряме та обернене перетворення Фур'є. Серед нових розділів цієї теорії особливої уваги заслуговує теорія рівнянь з ПДО, побудованими за негладкими однорідними символами. Випадок однорідних символів має важливі застосування в теорії випадкових процесів. Теорія ПДО з негладкими символами тісно пов'язана також із сучасною теорією фракталів.

До псевдодиференціальних рівнянь формально можна віднести і сингулярні еволюційні рівняння з оператором Бесселя (B-параболічні рівняння), який вироджується по певній просторовій змінній, а саме рівняння при цьому вироджується на межі області, оскільки оператор Бесселя $B_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\frac{d}{dx}$, $\nu > -\frac{1}{2}$, можна визначити за допомогою співвідношення $B_\nu \varphi = -F^{-1}_{B_\nu}[\xi^2 F_{B_\nu}[\varphi]]$, де F_{B_ν} – перетворення Бесселя, φ– елемент простору, в якому вказане перетворення визначене. Класична теорія задачі Коші та крайових задач для сингулярних параболічних рівнянь побудована у працях І.А. Кіпріянова, В.В. Катрахова, М.І. Матійчука, В.В. Крехівського, С.Д. Івасишена, В.П. Лавренчука, І.І. Веренич та ін. Задача Коші для B-параболічних рівнянь у класах розподілів та у класах узагальнених функцій типу S' та типу W' вивчалась Я.І. Житомирським, В.В. Городецьким, І.В. Житарюком, В.П. Лавренчуком, О.В. Мартинюк.

Природним узагальненням B-параболічних рівнянь є еволюційні рівняння з оператором $A = F^{-1}_{B_\nu}[aF_{B_\nu}]$, де a– однорідний символ (A надалі називатимемо псевдо-Бесселевим оператором). Задача Коші для таких рівнянь не вивчена. У цій праці розвивається теорія задачі Коші для еволюційного рівняння $\partial u/\partial t + Au = 0$, де A– псевдо-Бесселевий оператор, з початковими даними, які є узагальненими функціями типу розподілів. Вивчаються властивості перетворення Бесселя основних та узагальнених функцій, а також згорток, згортувачів і мультиплікаторів.

Тетяна Готинчан

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
tgot_univer@mail.ru

ПРО ОЦІНКИ ПОХІДНИХ ДЕЯКИХ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ НА ДІЙСНІЙ ОСІ ЗА ЇХНЬОЮ ПОВЕДІНКОЮ В ПОБУДОВАНІЙ ОБЛАСТІ КОМПЛЕКСНОЇ ПЛОЩИНИ

У праці [1], використовуючи теорему Фрагмена-Ліндельофа у випадку кута, для цілих функцій експоненціального зростання порядку p й скінченного типу була побудована область комплексної площини, в якій зберігаються оцінки з дійсної осі для похідних зазначених функцій. І навпаки, за поведінкою цілої функції зазначеного типу в побудованій області визначені оцінки похідних на дійсній осі. За допомогою цієї методики можна узагальнити отриманий результат на випадок цілих однозначних функцій спеціального вигляду, зокрема, елементів та мультиплікаторів простору W_M^Ω [2], де простори W_M^Ω будуються так.

Розглядають функцію $\omega\colon\ [0,+\infty)\to[0,+\infty)$, яка є неперервною і монотонно зростаючою, причому $\omega(0)=0$, $\omega(1)>1$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\omega(t)=+\infty$. Для $x\geq 0$ визначимо $\Omega(x)=\int\limits_0^x\omega(\eta)d\eta$. Функція Ω є диференційовною, монотонно зростаючою, опуклою вниз на $[0,+\infty)$, причому $\Omega(0)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\Omega(t)=+\infty$. Довизначимо парним чином її на $(-\infty,0]$.

Розглянемо також функції μ та M, які мають ті самі властивості, що й функції ω і Ω відповідно. За функціями M,Ω й будують основні простори $W_M, W^\Omega, W_M^\Omega$ [2]. Зазначимо, якщо

$$\exists\,\gamma_1>0\ \exists\,\gamma_2>0\ \forall\,x\geq x_0>0\ :\ \Omega_1(\gamma_1 x)\leq\Omega_2(\gamma_2 x),$$

то $W_M^{\Omega_1}\subset W_M^{\Omega_2}$.

1. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Пространства основных и обобщенных функций. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 308 с.
2. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 276 с.

Рада Грабовська[1], Наталія Крапива[2], Дмитро Буряк[2]

[1]Одеський національний університет ім. І. І. Мечникова
[2]Одеський національний політехнічний університет
krapiva@farlep.net

ПРО РОЗВ'ЯЗОК ДЕЯКИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЙЖЕ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглядається система диференціальних рівнянь першого порядку з майже сталими коефіцієнтами

$$\begin{cases} y'_k = \sum_{j=1}^{n}(a_{kj} + A_{kj}(x, y_1, ..., y_n))y_j, \\ k = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{1}$$

де $a_{kj} = const \in \mathbb{R}; A_{kj} \in C^{0,1,\dots,1}_{x,y_1,\dots,y_n}(D)$; $D = \{(x,y)|x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n\} \subset \subset R^{n+1}$, а також відповідна "урізана"система

$$\begin{cases} y'_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}y_j, \\ k = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{2}$$

Позначимо через $\omega = (\omega_j(x))_{j=1}^n$ фіксований частинний розв'язок системи (2) на R. Пропонується перетворення $y_k = \omega_k + Y_k, k = \overline{1,n}$, яке зводить систему (1) до системи вигляду

$$\begin{cases} Y'_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}Y_j + \sum_{j=1}^{n} A_{kj}(x, \omega_1 + Y_1, ..., \omega_n + Y_n)(\omega_j + Y_j), \\ k = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Одержані достатні умови існування таких розв'язків системи (1), які при $x \to +\infty$ асимптотично дорівнюють фіксованому розв'язку системи (2), причому для кожного фіксованного розв'язку системи (2) існує або хоча б один, або n-параметрична сім'я розв'язків системи (1), зображених у вигляді $y(x) = \omega(x) + O(1)$ при $x \to +\infty$.

1. Грабовская Р.Г. Об асимптотическом поведении решений системы двух нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка // Диф. уравнения. – 1975. – **11**, №4. – с. 639–644.

Геннадій Грабчак

Львівський національний університет імені Івана Франка
h_hrabchak@franko.lviv.ua

ПРО ОДНУ СИНГУЛЯРНУ ЗБУРЕНУ СПЕКТРАЛЬНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛІУВІЛЯ НА СКІНЧЕННОМУ ГЕОМЕТРИЧНОМУ ГРАФІ

Розглядається задача на власні значення для оператора Штурма-Ліувіля $L_\varepsilon u_\varepsilon \equiv (pu'_\varepsilon)' + \lambda_\varepsilon \rho_\varepsilon u_\varepsilon$ на скінченному геометричному графі $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Тут λ_ε – спектральний параметр; ε – малий параметр; p – додатна гладка на Γ функція; ρ_ε збігається з неперервною обмеженою невід'ємною функцією ρ на графі Γ всюди за винятком ε-околів його внутрішніх вершин a, де вона має вигляд $\varepsilon^{-m} q(\varepsilon^{-1}(x-a))$, $m \in \mathbb{R}$. Множина вершин, в яких задається умова Діріхле, називається границею графа; інші вершини називаються внутрішніми [1].

Ця задача описує власні коливання системи натягнутих струн (тонких пружних стержнів) з лінійною густиною ρ_ε. Параметр m визначає величину збурення густини. В праці [2] встановлено залежно від значень параметра m характер поведінки при $\varepsilon \to 0$ власних значень і власних функцій задачі Штурма-Ліувіля для струни з концентрованою масою m . Характерними є випадки: 1) $m < 1$; 2) $m = 1$; 3) $1 < m < 2$; 4) $m = 2$; 5) $m > 2$. Аналогічну ситуацію маємо для задачі на графі. В праці ми розглядаємо випадки 1)–3): доводимо теореми збіжності, будуємо і обґрунтовуємо повні асимптотичні розвинення за малим параметром власних значень і власних функцій, коли $m = 1$ і $m = 3/2$.

1. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах.– М.: Физматлит, 2004.– 272 с.

2. Головатый Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А., Соболева Т.С. О собственных колебаниях струны с присоединенной массой // Сиб. мат. журн.– 1988.– **29**, №5.– С.71-91.

Надія Гринців, Микола Іванчов

Львівський національний університет імені Івана Франка
hryntsiv@ukr.net, ivanchov@franko.lviv.ua

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИЛЬНО ВИРОДЖЕНОГО РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНОЮ МЕЖЕЮ

В області $\Omega_T = \{(x,t) : 0 < x < h(t), 0 < t < T\}$, де $h(t)$, $h(t) > 0$, $t \in [0,T]$, – невідома функція, розглядається рівняння

$$u_t = a(t)u_{xx} + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

з невідомим коефіцієнтом $a(t) > 0$, $t \in (0,T]$, початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le h(0), \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h(t),t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

та умовами перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$\int\limits_0^{h(t)} u(x,t)dx = \mu_4(t), \quad t \in [0,T]. \tag{5}$$

Встановлено умови існування та єдиності розв'язку $(a,h,u) \in C[0,T] \times C^1[0,T] \times C^{2,1}(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$, $u_x(0,t) \in C(0,T]$, задачі (1)–(5) у випадку сильного виродження, коли невідомий коефіцієнт $a(t)$ прямує до нуля при $t \to +0$ як степенева функція t^β, $\beta \ge 1$.

Йосип Гробер, Іван Прокопишин, Дмитро Хлєбніков

АТ "Sidrabe", Рига, Латвія
Львівський національний університет імені Івана Франка
mmlab@franko.lviv.ua

ТЕМПЕРАТУРНІ НАПРУЖЕННЯ У НЕСКІНЧЕННІЙ СТРІЧЦІ ЗА ЛОКАЛЬНОГО НАГРІВУ У ВАКУУМІ

Розглядається технологічний процес нанесення металевого покриття на тонку металеву стрічку методом випаровування та конденсації у вакуумі.

Тонка металева стрічка рухається з постійною швидкістю через технологічну зону. Вздовж стрічки у нерухомій системі координат встановлюється квазістаціонарне температурне поле, яке має три характерні ділянки: до зони нагріву, в межах зони нагріву і після зони нагріву. Нерівномірний розподіл температури зумовлює напруження у стрічці, які можуть викликати її ушкодження.

Для моделювання температурного поля у стрічці прийнято гіпотези:
1) стрічка нескінченна, а розподіл температури має квазістаціонарний характер;
2) стрічка нагрівається тепловим потоком рівномірно розподіленим по прямокутній зоні, а її торці та поверхня поза зоною нагріву – теплоізольовані;
3) температура стала по товщині стрічки.
Це дозволило методом інтегрального преретворення Фур'є визначити розподіл температури вздовж стрічки у явному вигляді.

Для розрахунку температурних напружень у нескінченній стрічці прийнята модель плоского напруженого стану. Методом інтегрального перетворення Фур'є отримано вирази для напружень у формі інтегралів від осцилюючих функцій з нескінченними границями інтегрування. Для розрахунку останніх, з врахуванням асимптотичної поведінки підінтегральних функцій на нескінченності, використано спеціальні числові методи.

Проведено аналіз термопружного стану стрічки для різних технологічних режимів нанесення покриття на алюмінієву фольгу.

Мирон Гром'як

Тернопільський національний університет ім. Володимира Гнатюка

ПОБУДОВА ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ І ЛІНІЙНИМИ ВІДХИЛЕННЯМИ АРГУМЕНТІВ

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними і лінійно перетвореними аргументами вигляду:

$$u_t(t,x) = Au(t,x) + Bu_x(t,x) + Cu(\lambda t + a, \mu x + b) + Du_t(\lambda t + a, \mu x + b) +$$
$$+ Fu_x(\lambda t + a, \mu x + b) + f(t,x), \tag{1}$$

де λ, a, μ, b - деякі дійсні сталі, A, B, C, D, F - постійні $(n \times n)$-матриці, вектор-функція $f(t,x) : R \times R \to R^n$ є неперервною і обмеженою на R^2 (періодичною за t, x). Основною метою є встановлення умов існування неперервно-диференційованого за t, x розв'язку $\gamma(t,x)$, що належить класу C^∞ за x і є обмеженим на R^2 (періодичним за t, x).

Теорема. Нехай виконуються наступні умови:

1) власні значення λ_i, $i = 1, ..., n$, матриці A такі, що мають місце співвідношення $Re\lambda_j(\Lambda_1) > 0, j = 1, ..., p$; $Re\lambda_j(\Lambda_2) < 0, j = p+1, ..., n$, де Λ_1, Λ_2 - постійні $(p \times p)$ і $(n - p \times n - p)$ - матриці;

2) λ - довільне дійсне число $(\lambda \neq 0)$, $0 <| \mu |< 1$;

3) $| D | + \frac{2L}{a}(| B | + | C + DA | + | F |) < 1$, де L, a - додатні сталі;

4) вектор-функція $f(t,x)$ неперервна за t, належить класу C^∞ за x і $\sup\limits_{(t,x)\in R^2} | \frac{\partial^i f(t,x)}{\partial x^i} | \leq K$, $0, 1, ...$, де K – деяка додатна стала.

Тоді система рівнянь (1) має обмежений на R^2 розв'язок, що є неперервно-диференційовним за t і належить класу C^∞ за x.

1. Митропольський Ю.А., Хома Г.П., Громяк М.И. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа. – К.: Наук.думка, 1991.–232с.

2. Блащак Н.І., Пелюх Г.П. Про періодичні розв'язки систем нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з лінійно перетвореним аргументом та їх властивості. – Київ, 1996. – 18 с. – (Препринт/ Інститут математики НАН УКраїни; № 96.19).

Орест Гуменчук[1], Анна Пеер-Касперська[2], Борис Чорний[3]

[1]ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
[2]Політехніка Опольська, Польща
[3]Львівський факультет Дніпропетровського технічного університету залізничного транспорту

ТЕРМОНАПРУЖЕНИЙ СТАН ЧАСТКОВО ПРОЗОРОГО ШАРУ ПРИ ДІЇ ТЕПЛОВОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ ЗА НАГРІВУ ВІДБИВАЧА

Розглядається задача про знаходження термонапруженого стану частково прозорого шару при сторонньому тепловому опроміненні за наявності неохолоджуваного непрозорого шару-відбивача, який, відбиваючи частину променевої енергії, може нагріватись за рахунок поглинання іншої її частини. Джерелами випромінювання є нагріта поверхня випромінювача (на якій підтримується задана стала температура) з одного боку частково прозорого шару та з іншого боку – поверхня шару-відбивача, що нагрівається. Шари перебувають в умовах конвективного теплообміну з зовнішнім середовищем.

Вихідною для опису теплових і механічних процесів у частково прозорому тілі за умов дії стороннього теплового випромінювання приймається система рівнянь, що базується на співвідношеннях феноменологічної теорії випромінювання в наближенні невипромінюючого матеріалу та квазістатичної задачі термопружності. Ця система містить нелінійн і інтегро-диференціальні рівняння, де інтегральні рівняння (рівняння Фредгольма II роду) описують теплообмін випромінюванням, а диференціальні – теплопровідність в шарі та його деформування. За постійних характеристик матеріалів нелінійність вихідної системи співвідношень є наслідком теплових граничних умов на поверхнях шару-відбивача, де результуючі потоки енергії випромінювання нелінійно залежать від шуканої температури на поверхнях. Складові задачі теорії випромінювання та теорії теплопровідності в шарах є зв'язані, оскільки потоки енергії власного випромінювання з поверхонь шару-відбивача залежать від температури його поверхонь, а в теплових граничних умовах є наявний вираз спектральної густини потоку енергії падаючого випромінювання.

Досліджено термонапружений стан скляного шару за дії опромінення для різних характеристик матеріалу та товщин шару.

Сергій Гуран, Богдан Копитко

Львівський національний університет імені Івана Франка
Bohdan.Kopytko@gmail.com

КЛАСИЧНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ПОХІДНОЮ ЗА ЧАСОМ В УМОВІ СПРЯЖЕННЯ

Нехай D_1 і D_2 – півпростори в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, тобто $D_m = \{x \in \mathbb{R}^n : (-1)^m x_n > 0\}$, $m = 1, 2$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$, $\overline{D}_m = D_m \bigcup S$, $\Omega_m = (0, \infty) \times D_m$, $\Sigma = (0, \infty) \times S$. Розглянемо наступну задачу спряження: знайти функцію $u(t, x) = u_m(t, x)$, $(t, x) \in \Omega_m$, яка задовольняє умови

$$\frac{\partial u_m(t,x)}{\partial t} = L_m u(t,x), \qquad (t,x) \in \Omega_m, \qquad m = 1,2, \tag{1}$$

$$u_m(0,x) = \varphi_m(x), \qquad x \in D_m, \qquad m = 1,2, \tag{2}$$

$$u_1(t,x) = u_2(t,x), \qquad (t,x) \in \Sigma, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u_1(t,x)}{\partial t} + \sum_{m=1}^{2} l_m(x) \nabla u_m(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in \Sigma, \tag{4}$$

де L_1 і L_2 – лінійні рівномірно еліптичні оператори другого порядку на D_1 і D_2 з коефіцієнтами, які залежать від x, $l_m(x) = (l_i^{(m)}(x))_{i=1}^n$, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$. Будемо припускати, що $l_i^{(m)}(x)$ та коефіцієнти операторів L_1 і L_2 – обмежені гельдерові функції на S та $\overline{D}_1$ і $\overline{D}_2$ відповідно, до того ж

$$l_n^{(1)}(x) \leq 0, \qquad l_n^{(2)}(x) \geq 0, \qquad \inf(l_n^{(2)}(x) - l_n^{(1)}(x)) > 0, \qquad x \in S.$$

Задача (1)–(4) виникає, зокрема, при лінеаризації задачі Стефана (див. [1]), а також в теорії випадкових процесів при вивченні аналітичними методами задачі про склеювання двох дифузійних процесів. Класичну розв'язність задачі (1)–(4) встановлено нами за допомогою методу граничних інтегральних рівнянь з використанням звичайного параболічного потенціалу простого шару.

1. Бижанова Г.И., Солонников В.А. О некоторых модельных задачах для параболических уравнений второго порядка с производной по времени в краевых условиях // Алгебра и анализ. – 1994. – **6**, вып. 6. – С. 30-50.

Альона Данилюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНУ МАТРИЦЮ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Розглядається задача Коші для системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k|\le 2b} A_k(t,x) D_x^k u + \int_0^t d\tau \int_{E_n} K(t,\tau,x,\xi) u(\tau,\xi)\, d\xi + f(t,x), \quad (1)$$

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x). \quad (2)$$

Теорема. *Нехай система рівномірно параболічна, коефіцієнти системи* $A_k(t,x)$ *визначені в шарі* $\Pi = (0,T)\times E_n$, *неперервні по* t, *причому рівномірно щодо* x *при* $|k| = 2b$, $A_k \in C_x^{(\alpha)}(\Pi)$. *Ядро* $K = (K_{ij})_{i,j=1}^N$ *інтегрального оператора системи абсолютно сумовне за просторовими змінними і має інтегровну особливість, тобто*

$$K_{ij} \in K_\gamma = \left\{ g(t,\tau,x,\xi) \,\Big|\, |g| \le C_0 \frac{e^{-c_1 \rho(t,\tau,x,\xi)}}{(t-\tau)^{\frac{n}{2b}+\gamma}} \right\}.$$

Тоді існує фундаментальна матриця розв'язків $\Gamma(t,\tau,x,\xi)$ *системи* (1), *яка при* $t > \tau$ *задовольняє однорідну систему, а розв'язок задачі Коші для неоднорідної системи визначається сумою потенціалів*

$$u(t,x) = \int_{E_n} \Gamma(t,0,x,\xi)\varphi(\xi)\, d\xi + \int_0^t d\tau \int_{E_n} \Gamma(t,\tau,x,\xi) f(\tau,\xi)\, d\xi,$$

де

$$\Gamma(t,\tau,x,\xi) = Z(t,\tau,x,\xi) + \int_\tau^t d\beta \int_{E_n} Z(t,\beta,x,z) R(\beta,\tau,z,\xi)\, dz.$$

Тут R *– резольвента системи інтегральних рівнянь Вольтерри-Фредгольма 2-го роду, повторні ядра якої виражаються через згортку ядра* K *інтегрального оператора системи* (1) *та фундаментальну матрицю розв'язків* Z *відповідної параболічної системи.*

Властивості фундаментальної матриці розв'язків Γ використовуються для дослідження загальної крайової задачі для системи (1).

1. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 444 с.

Іван Данилюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
i_danylyuk@yahoo.com

ДОСЛІДЖЕННЯ БАГАТОЧАСТОТНОЇ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ ВИЩОГО НАБЛИЖЕННЯ ЗІ СТАЛИМ ЗАПІЗНЕННЯМ НА ПІВОСІ

Розглянемо початкову задачу [1] для багаточастотної системи диференціальних рівнянь зі сталим запізненням Δ вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k a_k(x, x_\Delta, \tau) + \varepsilon^{r+1} A(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \tau, \varepsilon),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^{k-1} b_k(x, x_\Delta, \tau) + \varepsilon^{r} B(x, x_\Delta, \varphi, \varphi_\Delta, \tau, \varepsilon), \tag{1}$$

$$x(\tau,\varepsilon) = f(\tau), \quad \varphi(\tau,\varepsilon) = g(\tau,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \Omega(t)dt, \quad \tau \in [-\Delta, 0],$$

в якій $\tau \in [0,+\infty)$, $x = x(\tau,\varepsilon) \in R^n$, $\varphi = \varphi(\tau,\varepsilon) \in R^m$, $x_\Delta = x(\tau-\Delta,\varepsilon)$, $\varphi_\Delta = \varphi(\tau-\Delta,\varepsilon)$, ε – малий додатний параметр, $f, g, \Omega, a_k, b_k, k = \overline{0,r}$, належать певним класам гладких функцій, а A, B – гладкі і майже періодичні по φ, φ_Δ функції.

Усереднену за φ, φ_Δ задачу запишемо у вигляді

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k a_k(\bar{x}, \bar{x}_\Delta, \tau) + \varepsilon^{r+1} A_0(\bar{x}, \bar{x}_\Delta, \tau, \varepsilon),$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^{k-1} b_k(\bar{x}, \bar{x}_\Delta, \tau) + \varepsilon^{r} B_0(\bar{x}, \bar{x}_\Delta, \tau, \varepsilon), \tag{2}$$

$$\bar{x}(\tau,\varepsilon) = f(\tau), \quad \bar{\varphi}(\tau,\varepsilon) = g(\tau,\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \Omega(t)dt, \quad \tau \in [-\Delta, 0],$$

де A_0, B_0 позначають середні функцій A, B за φ, φ_Δ.

Знайдено достатні умови існування розв'язку $x(\tau,\varepsilon), \varphi(\tau,\varepsilon)$ задачі (1) на півосі L та встановлено оцінку його відхилення від розв'язку $\bar{x}(\tau,\varepsilon)$, $\bar{\varphi}(\tau,\varepsilon)$ усередненої задачі (2).

1. Самойленко А.М., Петришин Р.І. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань. – Київ: Наук. думка, 2004. – 474 с.

Ігор Демків, Ірина Кравець

Національний університет „Львівська політехніка“
ihor.demkiv@gmail.com

ФУНКЦІОНАЛЬНІ ПОЛІНОМИ ЕРМІТА В ПРОСТОРІ Q[0,1]

В абстрактних лінійних просторах присвячено ряд робіт побудові та дослідженню інтерполяційних поліномів , серед яких посідають помітне місце операторні інтерполяційні формули типу Ньютона.

Автори робіт [1, 2] запропонували свій підхід щодо побудови інтерполянтів типу Ньютона, які мають водночас дві властивості: першу - інтерполяційні вузли є континуальними, тобто залежать від неперервних параметрів, і другу - інваріантність інтерполяційних формул щодо поліномів відповідного степеня. Перша властивість забезпечується завдяки знайденому правилу підстановки [2], виконання якого для даного функціонала є достатньою умовою континуальності інтерполяційних вузлів у $Q[0,1]$ - просторі кусково-неперервних на відрізку $[0,1]$ зі скінченою кількістю точок розриву першого роду.

У даній роботі пропонується конструювати функціональні поліноми типу Ерміта на основі інтерполяційних формул Ньютона, використовуючи кратність вузлів за допомогою граничного переходу. При цьому дві вищезазначені властивості інтерполянтів будуть зберігатися.

1. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Интерполяционная формула типа Ньютона для нелинейных функционалов//ДАН СССР. – 1989. – **307**, №3. – С.534-537.
2. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В.,Кашпур Е.Ф., Михальчук Б.Р. Интерполяционные полиномы типа Ньютона с континуальными узлами//Укр.мат.журн. – 2003. – **55**, №6. – С.779-790.

Любомир Демків

Національний університет „Львівська політехніка“

УЗАГАЛЬНЕННЯ МЕТОДИКИ ОЦІНЮВАННЯ ТОЧНОСТІ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ НА ВИПАДОК ОПУКЛИХ ОБЛАСТЕЙ

Висвітлюються питання, пов'язані зі знаходженням оцінок точності різницевих схем для еліптичних рівнянь з крайовими умовами Діріхле в опуклих областях, границя яких утворена відрізками прямих ліній. Розглянуто випадки еліптичних рівнянь зі сталими та змінними коефіцієнтами у 2-D, а також випадок тривимірної області. Робота є продовженням серії робіт авторів [1–6], що присвячені знаходженню вагових апріорних оцінок точності різницевих схем для звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь математичної фізики.

1. Makarov V. On apriori estimates of difference schemes giving an account of the boundary effect // C.R. Acad. Bulgare Sci. – 1989. – **42**, №.5. – P.41-44.
2. Макаров В.Л., Демків Л.І. Оцінки точності різницевих схем для параболічних рівнянь, що враховують початково-крайовий ефект // Доповіді НАН України. – 2003. – №2. – С.26-32.
3. Makarov V.L., Demkiv L.I. Accuracy estimates of the difference schemes for quasi–linear parabolic equations taking into account the initial–boundary effect // Comput. Methods Appl. Math. – 2003. – **3**, № 4. – P.579-595.
4. Makarov V.L., Demkiv L.I. Accuracy estimates of difference schemes for quasi–linear elliptic equations with variable coefficients taking into account boundary effect // Lect. notes Comp. Sc. – 2005. – **3401**. – P.80-90.
5. Makarov V., Demkiv L. Taking into account the third kind conditions in weight estimates for difference schemes // Lect. notes Comp. Sc. – 2006. – **3743**. – P.687-694.
6. Makarov V., Demkiv L. Estimates of accurancy of difference schemes for ordinary differential equations with third kind boundary conditions// Proc. of the 31st int.conf."Appl. of math. in engin. and econ." (Sozopol 2005), Softtrade. – 2006. – P.139-145.

Наталя Денисенко

Інститут математики НАН України

ПРО НЕПЕРЕРВНО-ДИФЕРЕНЦІЙОВНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Вивчається питання про існування неперервно-диференційовних розв'язків системи диференціально-функціональних рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(\lambda t) + f\big(t, x(t), x(\lambda t)\big), \tag{1}$$

де $0 < \lambda < 1$, $t \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$, A, B – $(n \times n)$ - матричні функції, $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Правильна така теорема.

Теорема. *Нехай виконуються умови:*

1. *всі елементи матриць A, B є неперервними і обмеженими при $t \in \mathbb{R}^+$ функціями;*
2. *всі компоненти вектора f є неперервними за всіма змінними при $t \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}^n$ функціями і виконується співвідношення $\sup\limits_{t \in \mathbb{R}^+} |f(t, 0, 0)| \le f^* < \infty$;*
3. *вектор - функція f задовольняє умову*

$$|f(t, \tilde{x}, \tilde{y}) - f(t, \tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}})| \le l(|\tilde{x} - \tilde{\tilde{x}}| + |\tilde{y} - \tilde{\tilde{y}}|),$$

де $(t, \tilde{x}, \tilde{y}), (t, \tilde{\tilde{x}}, \tilde{\tilde{y}}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $l = const > 0$.

Тоді при достатньо малому l система рівнянь (1) має сім'ю неперервно-диференційовних при $t \in \mathbb{R}^+$ розв'язків $\overline{x}(t) = \overline{x}(t, c)$, де $c = (c_1, \ldots, c_n)$, $c_i, i = \overline{1, n}$, – довільні сталі.

Аналогічні результати правильні для більш загальних систем рівнянь вигляду

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)x(\varphi(t)) + f\big(t, x(t), x(\varphi(t))\big),$$

де матричні функції A, B і вектор-функція f задовольняють умови теореми, а φ є неперервною при $t \in \mathbb{R}^+$ функцією такою, що $0 \le \varphi(t) \le t$.

Наталія Джалюк, Василь Петричкович

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
nataliya.dzhalyuk@gmail.com, vpetrych@iapmm.lviv.ua

ФАКТОРИЗАЦІЇ КЛІТКОВО–ТРИКУТНИХ ЦІЛОЧИСЕЛЬНИХ МАТРИЦЬ

Нехай R – евклідове кільце, $T = \|T_{ij}\|_1^k$ – нижня клітково-трикутна матриця над R, тобто T_{ij} – $(n_i \times n_j)$-матриці і $T_{ij} = 0$, якщо $i < j$, $i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$. Досліджується задача про розклад матриці T на множники такого ж клітково-трикутного вигляду. Нагадаємо, що факторизації $A = B_1 C_1$ і $A = B_2 C_2$ матриці A називають асоційованими, якщо $B_2 = B_1 V$, $C_2 = V^{-1} C_1$ для деякої оборотної матриці V.

Теорема. *Нехай клітково-трикутна матриця T розкладена на множники вигляду*

$$T = BC, \quad \det B = \prod_{i=1}^{k} \varphi_i,\ \varphi_i | \det T_{ii}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k. \tag{1}$$

Якщо елементарні дільники матриці T попарно взаємно прості або $(\det B, \det C) = 1$, *то кожна факторизація вигляду* (1) *матриці T асоційована до клітково-трикутної факторизації* $T = \tilde{B}\tilde{C}$, *де* $\tilde{B} = \|B_{ij}\|_1^k, \tilde{C} = \|C_{ij}\|_1^k$, $B_{ij} = C_{ij} = 0$, *для всіх* $i < j$, *і* $\det B_{ii} = \varphi_i$, $i, j = 1,\ 2,\ \ldots,\ k$.

Зауважимо, що в умовах теореми, опис клітково-трикутних факторизацій матриці T зводиться до опису факторизацій її діагональних кліток T_{ii} і розв'язування матричних лінійних рівнянь типу Сильвестра. Такі факторизації матриць над кільцями многочленів $P[x]$, де P – поле, описані в роботі [1].

1. Петричкович В.М. Клеточно-треугольная и клеточно-диагональная факторизации клеточно-треугольных и клеточно-диагональных многочленных матриц // Математические заметки. – 1985. – **38**, № 6. – С. 789–796.

Іван Дияк, Ігор Прокопишин

Львівський національний університет імені Івана Франка
dyyak@franko.lviv.ua

ДОСЛІДЖЕННЯ ГІБРИДНИХ СКІНЧЕННО-ГРАНИЧНОЕЛЕМЕНТНИХ СХЕМ МЕТОДУ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Розглянуто дві ітераційні схеми МДО (методу декомпозиції області) [1,2] – послідовну схему Діріхле-Неймана та паралельну схему Неймана-Неймана з використанням гібридних гранично-скінченноелементних апроксимацій. Показано відповідність цих схем методу простої ітерації розв'язування деяких систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Це дало змогу обгрунтувати збіжність алгоритмів , а також забезпечити оптимальний вибір параметрів методами мінімальних нев'язок та найшвидшого спуску.

Числову ефективність схем МДО апробовано для трьох задач теорії пружності:

1) про згин жорстко закріпленої по краях кусково-неоднорідної балки під дією рівномірного нормального навантаження;

2) про згин консольної двошарової балки дією рівномірного нормального навантаження;

3) про розтяг пластини з тріщиною.

Числовое дослідження послідовної схеми Діріхле-Неймана для цих задач підтвердило теоретичні висновки про лінійну швидкість збіжності стаціонарного і нестаціонарного ітераційних процесів та ефективність цієї схеми для симетричних тіл та тіл, які значно відрізняються за контактною жорсткістю.

Для паралельної схеми Неймана-Неймана встановлено, що вона значно повільніша за схему Діріхле-Неймана, а лінійний характер збіжності є менш виражений.

1. Агошков В.И. Методы разделения области в задачах математической физики // Вычислительные процессы и системы. – Вып.8. – М.: Наука, 1991. – С. 4–50.
2. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989. – 608 с.

Володимир Дідак, Ярослав Пелех, Зенон Крупка

Національний університет „Львівська політехніка“

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Використовуючи ланцюгові дроби та теорію побудови методів Рунге–Кутта, пропонуються числові методи для розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри другого роду

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} F[x, y, f(y)]dy, \quad x \in I_L, \tag{1}$$

де функція $F[x, y, f(y)]$ володіє необхідною гладкістю.

Ввівши на I_L сітку $\sigma_h = \{x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_N = x_0 + L\}$ з кроком $h = x_{n+1} - x_n$, наближений розв'язок рівняння (1) в точці $x_1 = x_0 + h$ шукаємо у вигляді ланцюгового дробу:

$$\varphi_1^{[k,l]} = \cfrac{c_{0,0}}{\sum\limits_{i=0}^{k-1} d_{i,0} + \cfrac{d_{k,0}}{1 + \ddots + \cfrac{d_{k,l-1}}{1 + d_{k,l}}}}\,. \tag{2}$$

Теорема. *Якщо* $k + l = 2$, $(k = 1, 2;\ l = 0, 1)$ *і* $c_{0,0} = h\delta_1$, $d_{0,0} = 1$, $d_{1,0} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$, $\quad d_{2,0} = \frac{\delta_1\delta_3 - \delta_2^2}{\delta_1^2}$, $\quad d_{1,1} = -\frac{d_{2,0}}{d_{1,0}}$, $\quad \delta_i = \sum\limits_{i=1}^{k+l+1} a_{ij}k_j$, $k_j = F[x_0 + \alpha_j h, x_0 + \beta_j h, h\sum\limits_{m=0}^{j-1}\gamma_{jm}k_m]$, $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = 1 - \beta_2$, $\beta_1 = 0$, $\beta_3 = 2/3$, $\gamma_{10} = 0$, $\gamma_{21} = \beta_2$, $\gamma_{31} = \frac{2}{3} - \frac{2}{9\beta_2}$, $\gamma_{32} = \frac{2}{9\beta_2}$,

$$a_{11} = \frac{1}{4} + a_{21} + a_{31},\ a_{12} = a_{22} + a_{32},\ a_{13} = \frac{3}{4} + a_{23} + a_{33}, \tag{3}$$

де $\beta_2 \neq 0$ *і* a_{ij} $(i = 2, 3;\ j = 1, 2, 3)$ *– довільні параметри, то*

$$|\ f(x_1) - \varphi_1^{[k,l]}\ | = O(h^4).$$

Для знаходження наближеного розв'язку рівняння (1) в наступних точках x_n $(n \geq 2)$ використовуємо спосіб рухомого початку та формули (2), (3).

Мар'ян Дмитришин

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
m_dmytryshyn@hotmail.com

НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ ВЕКТОРАМИ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОГО ТИПУ

Нехай $\{X, \|\cdot\|\}$ – комплексний банаховий простір, $A\colon \mathcal{C}^1(A) \subset X \longrightarrow X$ – замкнений і необмежений лінійний оператор з щільною областю визначення. Припустимо, що резольвентна множина оператора A непорожня. Для $0 < t < \infty$ і $1 \le q \le \infty$ визначимо простори векторів експоненціального типу $\mathcal{E}_q^t(A) = \Big\{x \in X\colon \|x\|_{\mathcal{E}_q^t(A)} < \infty\Big\}$, де

$$\|x\|_{\mathcal{E}_q^t(A)} = \begin{cases} \Big(\sum\limits_{k \in Z_+} \Big\|(A/t)^k x\Big\|^q\Big)^{1/q} & : \quad 1 \le q < \infty, \\ \sup\limits_{k \in Z_+} \Big\|(A/t)^k x\Big\| & : \quad q = \infty. \end{cases}$$

В просторі $\mathcal{E}(A) = \bigcup_{t>0} \mathcal{E}_q^t(A)$ задамо квазінорму $|x|_q = \|x\| + \inf\big\{t > 0\colon x \in \mathcal{E}_q^t(A)\big\}$ і визначимо функціонал

$$E_q(t,x) = \inf\Big\{\big\|x - x^0\big\| : x^0 \in \mathcal{E}(A),\ \big|x^0\big|_q < t\Big\}, \qquad x \in X.$$

Для пар чисел $0 < \alpha < \infty$ і $0 < \tau \le \infty$ або $0 \le \alpha < \infty$ і $\tau = \infty$ розглянемо шкалу апроксимаційних просторів $\mathcal{B}_{q,\tau}^\alpha(A) = \Big\{x \in X:\ |x|_{\mathcal{B}_{q,\tau}^\alpha(A)} < \infty\Big\}$ з квазінормою

$$|x|_{\mathcal{B}_{q,\tau}^\alpha(A)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^\infty \big[t^\alpha E_q(t,x)\big]^\tau \frac{dt}{t}\right)^{1/\tau} & : \quad 0 < \tau < \infty, \\ \sup\limits_{t>0} t^\alpha E_q(t,x) & : \quad \tau = \infty. \end{cases}$$

Теорема. *Існують постійні $c_1(\alpha,\tau)$ і $c_2(\alpha,\tau)$ такі, що*

$$|x|_{\mathcal{B}_{q,\tau}^\alpha(A)} \le c_1\, |x|_q^\alpha\, \|x\|, \qquad x \in \mathcal{E}(A),$$

$$d_q(t,x) \le c_2\, t^{-\alpha}\, |x|_{\mathcal{B}_{q,\tau}^\alpha(A)}, \qquad x \in \mathcal{B}_{q,\tau}^\alpha(A),$$

де $d_q(t,x) = \inf\big\{\big\|x - x^0\big\| : x^0 \in \mathcal{E}_q^t(A)\big\}$ – відстань між деяким елементом $x \in X$ і підпростором $\mathcal{E}_q^t(A)$.

Roman Dmytryshyn

Vasyl Stefanyk Precarpathian National University
dmytryshynr@hotmail.com

ONE EXAMPLE OF THE TWO-DIMENSIONAL g-FRACTION WITH NONEQUIVALENT VARIABLES EXPANSION FOR THE DOUBLE POWER SERIES

We consider the double power series

$$F(a,1,c;-z_1)F(b,1,d;-z_2(F(a,1,c;-z_1))^2) =$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(a)_k}{(c)_k} z_1^k\right)^{2l+1} \frac{(b)_l}{(d)_l} z_2^l,$$

where $(a)_k$ is the Pochhammer symbols, $(a)_k = a(a+1)(a+2)\dots(a+k-1)$ for $k \in \mathbb{N}$, $(a)_0 = 1$, a, b, c and d are real constants with $c,\ d \notin \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$, $\mathbf{z} = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. The coefficients of this series satisfy the conditions of theorem 2 [1], if $0 < a < c$ and $0 < b < d$.

Hence function $F(a,1,c;-z_1)F(b,1,d;-z_2(F(a,1,c;-z_1))^2)$ has the two-dimensional g-fraction with nonequivalent variables expansion

$$\frac{s_0}{\Psi_0(z_1) + \underset{n=1}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \dfrac{m_{0n}(1-m_{0,n-1})z_2}{\Psi_n(z_1)}},$$

where $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^2;\ s_0 = 1;$

$$\Psi_l(z_1) = 1 + \frac{m_{1l}z_1}{1 + \underset{k=2}{\overset{\infty}{\mathrm{D}}} \dfrac{m_{kl}(1-m_{k-1,l})z_1}{1}}, \quad l \geq 0;$$

$$m_{2r-1,l-1} = \frac{a+r-1}{c+2r-2},\ m_{2r,l-1} = \frac{r}{c+2r-1},\ m_{0,2l-1} = \frac{b+l-1}{d+2l-2},$$
$$m_{0,2l} = \frac{l}{d+2l-1}, \quad r \geq 1,\ l \geq 1.$$

1. Боднар Д.І., Дмитришин Р.І. Двовимірне узагальнення g-агоритму Бауера // Доповіді Національної академії наук України. – 2006. – № 2. – С. 13–18.

Юрій Дмитришин

Львівський національний університет імені Івана Франка
yuree@yandex.ru

ДИНАМІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВОЇ УМОВИ ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею Γ класу C^2, $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — одиничний вектор зовнішньої до Γ нормалі, $T > 0$ — дійсне число або $T = +\infty$, $Q \stackrel{\text{def}}{=} \Omega \times (-\infty; T)$, $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma \times (-\infty; T)$.

Розглядаємо задачу: знайти функцію $u : Q \to \mathbb{R}$ таку, що

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, \nabla u) + a_0(x, t, u, \nabla u) = 0, \quad (x, t) \in Q, \tag{1}$$

$$u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i\big(x, t, u, \nabla u\big) \cos\big(\nu, x_i\big) + b(x, t, u) = f, \quad (x, t) \in \Sigma, \tag{2}$$

де $a_i : Q \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ $(i = \overline{0, n})$, $b : \Sigma \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ — задані функції.

Узагальнені розв'язки задачі (1), (2) шукаємо у просторі функцій $\mathbb{U}_p \stackrel{\text{def}}{=} \big\{u : u \in L_{p,\text{loc}}\big(-\infty, T;\ W_p^1(\Omega)\big), u\big|_\Gamma \in C\big((-\infty, T]; L_2(\Gamma)\big)\big\}$ $(u\big|_\Gamma$ — слід u на $\Gamma)$, $p > 2$. Встановлюємо достатні умови на вихідні дані для існування єдиного узагальненого розв'язку цієї задачі при відсутності умов на зростання вихідних даних і поведінку розв'язку при $t \to -\infty$. Крім того, доводимо неперервну залежність цього розв'язку від вихідних даних, зокрема, і коефіцієнтів рівняння.

Мирослава Долинюк, Олег Скасків

Львівський національний університет імені Івана Франка
matstud@franko.lviv.ua

СТІЙКІСТЬ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ЦІЛОГО КРАТНОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

Нехай $\lambda = (\lambda_n)$, $\lambda_n = (\lambda_{n_1}^{(1)}, \dots, \lambda_{n_p}^{(p)})$, $n = (n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $0 \le \lambda_k^{(j)} \uparrow +\infty$ $(k \uparrow +\infty)$, а $S^p(\lambda)$ – клас абсолютно збіжних в $\mathbb{C}^p$ рядів Діріхле $F(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{(z,\lambda_n)}$, $\|n\| = n_1 + \dots + n_p$. Для $\sigma \in \mathbb{R}^p$ позначимо $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|e^{(\sigma,\lambda_n)} : n \ge 0\}$, де $(a,b) = \sum_{j=1}^p a_j b_j$, для $a = (a_1, \dots, a_p), b = (b_1, \dots, b_p) \in \mathbb{C}^p$. Нехай L – клас додатних неспадних до $+\infty$ на $[0; +\infty)$ функцій, а W – клас функцій $w \in L$ таких, що $\int_1^{+\infty} x^{-2} w(x)dx < +\infty$. Позначимо:
$B_+(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n b_n e^{(z,\lambda_n)}$, $B_-(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n^{-1} e^{(z,\lambda_n)}$,
$B_w(z) = \sum_{\|n\|=0}^{+\infty} a_n e^{w(\|\lambda_n\|)+(z,\lambda_n)}$.

Теорема. *Якщо $B_w \in S^p(\lambda)$ і існує функція $w \in L$ така, що $\nu \in W$ (де $\nu(t) = \sum_{\|\lambda_n\| \le t} e^{w(\|\lambda_n\|)}$) і $e^{-w(\|\lambda_n\|)} \le |b_n| \le e^{w(\|\lambda_n\|)}$ $(\|n\| \ge k_1)$, то при $|\sigma| \to +\infty, \sigma \in K \setminus E$, виконується співвідношення*

$$\ln \mu(\sigma, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, B_+) = (1 + o(1)) \ln \mu(\sigma, B_-),$$

де K – довільний конус в $\mathbb{R}^p$ з вершиною у початку координат O такий, що $\overline{K} \setminus \{O\} \subset \gamma(F) \equiv \{\sigma \in \mathbb{R}^p : \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \ln \mu(t\sigma, F) = +\infty\}$, а E – така вимірна за Лебегом підмножина $\mathbb{R}^p$, що

$$meas_p(E \cap \{x : |x| \le R\}) = O(R^{p-1}) \ (R \to +\infty).$$

Наслідок. *Нехай для $\lambda = (\lambda_n)$ виконується умова*

$$(\forall j : 1 \le j \le p) : \sum_{k=1}^{+\infty} 1/(k\lambda_k^{(j)}) < +\infty,$$

$w \in W$, а для $(b_n), B_w, F$ – умови теореми. Тоді справджується і твердження теореми.

Доведення теореми отримано за допомогою однієї теореми з [1], що містить асимптотичні оцінки інтегралів вигляду $\int\limits_{\mathbb{R}^p} a(x)e^{(\sigma,x)}\nu(dx)$.

Твердження теореми підтверджує припущення, висловлене другим співавтором у м.Чернівці в червні 2004 року на конференції, присвяченій 125-річчю Г.Гана (див. Тези доп. конф., с. 100–101).

1. Скасків О.Б., Тракало О.М. Асимптотичні оцінки інтегралів типу Лапласа // Мат. Студіїю – 2002. – **18**, № 2. – С. 125-146.

Галина Доманська

Львівський національний університет імені Івана Франка
h.domanska@gmx.net

НЕОБМЕЖЕНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область, причому $\partial\Omega \in C^1$. Позначимо через $Q_T = \Omega \times (0, T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0, T)$, де $0 < T < \infty$.

В області Q_T розглянуто рівняння вигляду

$$\begin{aligned} u_t - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i t})_{x_j} - \\ - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c(x)u = f(x)|u|^{p-2}u \end{aligned} \tag{1}$$

з крайовою умовою

$$u\Big|_{S_T} = 0 \tag{2}$$

і початковою умовою

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Припускаємо додатну визначеність квадратичних форм

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j, \quad \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)\xi_i\xi_j,$$

а також додатність функції f. У випадку $p > 2$ одержано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку задачі (1) – (3) на деякому часовому проміжку $(0, T_0)$, $T_0 \leqslant T$; доведено необмеженість розв'язків при $t \to T_0 - 0$.

Олена Доманська

Львівський національний університет імені Івана Франка
olena.domanska@gmail.com

КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ У ПСЕВДОЦИЛІНДРИЧНИХ ОБЛАСТЯХ

Нехай Ω — необмежена область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, з кусково-гладкою межею $\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \partial\Omega$; $\Gamma = \overline{\Gamma}_1 \bigcup \overline{\Gamma}_2$, де Γ_1, Γ_2 — відкриті множини на $\partial\Omega$ (одна з них може бути порожньою), $\Gamma_1 \bigcap \Gamma_2 = \varnothing$, $\forall\, R > 0 : \mathrm{mes}_n\, \Omega \cap \{x : (x_{d+1}^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2} < R\} \leq CR^b$, де $d \in \{1, \ldots, n-1\}$, $C > 0$, $b > 0$ — деякі сталі.

Розглядаємо задачу: знайти функцію $u \in W^1_{p(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ таку, що

$$\sum_{i=0}^{d} D_i a_i(x, D_0 u, D_1 u, \ldots, D_d u) + \sum_{i=d+1}^{n} D_i a_i(x, D_i u) = \sum_{i=0}^{n} D_i f_i(x),$$

$$x \in \Omega, \qquad u(x)|_{\Gamma_1} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu_A}|_{\Gamma_2} = 0,$$

де $D_0 u = u$, $D_i u \stackrel{\text{def}}{=} \partial u / \partial x_i$; для $i \in \{0, \ldots, d\}$ функції $a_i(x, \xi)$, $(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^{d+1}$, для $j \in \{d+1, \ldots, n\}$ функції $a_j(x, \eta)$, $(x, \eta) \in \Omega \times \mathbb{R}$, є каратеодорівськими, і

$$|a_i(x,\xi)| \leq K^i (1 + \sum_{k=0}^{d} |\xi_k|^{p_k(x)-1}), \quad p_i \geq 2, \quad i = \overline{0, d},$$

$$\sum_{i=0}^{d} (a_i(x,\xi) - a_i(x,\widetilde{\xi}))(\xi_i - \widetilde{\xi}_i) \geq \sum_{i=0}^{d} K_i |\xi_i - \widetilde{\xi}_i|^{p_i(x)}, \quad \xi, \widetilde{\xi} \in \mathbb{R}^{d+1},$$

$$|a_j(x,\eta_j)| \leq K^j (1 + |\eta_j|^{p_j(x)-1}), \quad 1 \leq p_j \leq 2, \quad j = \overline{d+1, n},$$

$$(a_j(x,\eta) - a_j(x,\widetilde{\eta}))(\eta - \widetilde{\eta}) \geq K_j |\eta - \widetilde{\eta}|^{p_j(x)}, \ \eta, \widetilde{\eta} \in \mathbb{R}, \ j = \overline{d+1, n},$$

де K_i, K^i $(i = \overline{0, n})$ — деякі додатні сталі; $f_i \in L_{p_i^*(\,\cdot\,),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$ — задані функції.

Доводиться однозначна розв'язність цієї задачі та її неперервна залежність від вільного члена.

Микола Дорошенко, Галина Коваль, Володимир Грозовський

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ ГРАНИЧНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРШОГО РОДУ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ

При розв'язуванні прямих та обернених задач теорії потенціалу в осесиметричному випадку виникає необхідність рішення такої системи одномірних граничних інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду:

$$\sum_{i=1}^{m} \int\limits_{L_i} \mu^{(i)}(r,z) E^{j(i)}(r,z,\overline{r},\overline{z}) dl_i = \delta_{ij},$$

де $\mu^{(i)}(r,z)$ – невідомі густини; L_i – твірні осесиметриних поверхонь;

$$E^{j(i)}(r,z,\overline{r},\overline{z}) = \frac{K^{j(i)}(k) r^{(i)}}{\sqrt{(r^{(i)} + \overline{r}^{(j)})^2 + (z^{(i)} - \overline{z}^{(j)})^2}};$$

$K^{j(i)}(k)$ – повні еліптичні інтеграли першого роду; $i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,m}$;
$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{якщо} \quad i = j. \end{cases}$

Невідомі функції $\mu^{(i)}(r,z)$ можуть мати особливості на краях розімкнутих поверхонь, ядро – логарифмічну особливість при суміщенні точок спостереження з точками інтегрування.

Для розв'язування системи інтегральних рівнянь застосовувався метод колокації, а невідомі функції $\mu^{(i)}(r,z)$ представлялися за допомогою кубічних сплайнів.

В результаті застосування методу колокації отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти якої мають особливості завдяки особливостям на краю розімкнутих поверхонь та особливості в ядрі. Особливості на краю розімкнутих поверхонь виділяються заміною змінних, а логарифмічні особливості в ядрі – за методикою ослаблення особливостей Канторовича. Чисельні розрахунки проводились в прикладній системі Matlab.

Денис Драгунов

Інститут математики НАН України
institute@imath.kiev.ua

МЕХАНІЧНІ СИСТЕМИ, ЕКВІВАЛЕНТНІ В СЕНСІ ЛЯПУНОВА СИСТЕМАМ, ЩО НЕ МІСТЯТЬ НЕКОНСЕРВАТИВНИХ ПОЗИЦІЙНИХ І/АБО ГІРОСКОПІЧНИХ СИЛ

Розглядаються дві системи звичайних лінійних диференціальних рівнянь

$$\ddot{x}(t) + A\dot{x}(t) + Bx(t) = 0, \tag{1}$$

$$\ddot{\xi}(t) + V\dot{\xi}(t) + W\xi(t) = 0, \tag{2}$$

$x(t) = col(x_1(t), \ldots, x_m(t)), \xi(t) = col(\xi_1(t), \ldots, \xi_m(t)), A, B, V, W$ – дійсні квадратні матриці розміру m.

1. Доведено основну теорему, що дає необхідні і достатні умови, виражені в термінах матриць A, B, V, W, того, щоб системи (1) і (2) були еквівалентними в сенсі Ляпунова.
2. За допомогою основної теореми та в межах досить загальних припущень одержано необхідні і достатні умови, виражені в термінах матриць A та B, того, що система (1) еквівалентна в сенсі Ляпунова деякій системі (2), для якої виконується одна (або обидві) з наступних умов 1) $V = V^T$; 2) $W = W^T$. Також, в явному вигляді знайдено відповідне перетворення Ляпунова. Умова 2) дає змогу, досліджуючи систему (2) на стійкість, використовувати відомі та зручні теореми Томпсона-Тета-Четаєва. Результати такого дослідження будуть справджуватись і для системи (1). Умова 1) стосуєтся задачі виключення гіроскопічних сил, яка була поставлена свого часу В.М. Кошляковим.
3. Використовуючи підхід, викладений вище, одержано досить загальні висновки про стійкість цілого класу гіроскопічних систем – підвішеного на струні тіла, що обертається.

Матеріали доповіді одержані спільно з В.Кошляковим та В.Макаровим.

Іванна Дронюк, Марія Назаркевич

Національний університет "Львівська Політехніка"
nazarkevich@mail.ru

МЕТОД ЗАХИСТУ ІНФОРМАЦІЇ ЗАСОБАМИ ATEB-ФУНКЦІЙ

Точні розв'язки нелінійних систем диференціальних рівнянь, що описують нелінійні періодичні або аперіодичні процеси, забезпечує математичний апарат Ateb-функцій. В його основу покладено розв'язки неповних Beta-функцій. Необхідність дослідження нестаціонарних періодичних процесів виникає у задачах, що моделюють проходження системи через резонанс; при дослідженні коливань в системах із змінною масою і жорсткістю. Аперіодичні Ateb-функції застосовуються у задачах керування рухом об'єктів.

В цій роботі пропонується застосування Ateb-функцій в області захисту інформації. Нехай маємо документ, який необхідно захистити від несанкціонованого використання. Для захисту будуємо повну систему ортонормованих періодичних Ateb-функцій, яка залежить від параметрів Ateb-функцій. Ця система однозначно визначається двома параметрами, які характеризують степінь нелінійності початкової системи нелінійних диференціальних рівнянь. Ця система існує і її ортонормованість доведена в [1].

Для захисту документів застосовуємо математичний апарат Ateb-функцій оскільки розв'язки початкової системи нелінійних диференціальних рівнянь є точними, однозначними і суттєво нелінійними. Не маючи алгоритму побудови і не знаючи параметрів Ateb-функцій, відтворити вигляд зображення неможливо. У випадку захисту масиву документів для кожного документа застосовуємо унікальний набір параметрів Ateb-функцій, що дає змогу однозначно ідентифікувати кожен документ.

1. Сокіл Б.І. Про асимптотичні наближення розв'язку для одного нелінійного неавтономного рівняння // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 11. – С. 1580-1583.

В'ячеслав Євтухов

Одеський національний університет ім. І.І. Мечникова
emden@farlep.net

АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ n-го ПОРЯДКУ

Розглядається диференціальне рівняння вигляду

$$y^{(n)} = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ – неперервна функція, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $\varphi : \Delta \longrightarrow]0, +\infty[$ – двічі неперервно диференційовна функція, Δ_{Y_0} – односторонній окіл точки Y_0, Y_0 дорівнює 0 або $\pm\infty$. Припускається також, що

$$\lim_{\substack{y \to Y_0 \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi'(y)}{\varphi(y)} = \sigma_0 = const.$$

Розв'язок $y : [t_y, \omega[\longrightarrow \Delta_{Y_0}$ рівняння (1) називається $P_\omega(Y_0, \lambda_0)$-розв'язком, якщо він задовольняє такі умови: $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y(t) = Y_0$,

$$\lim_{t\uparrow\omega} y^{(k)}(t) = \begin{cases} \text{або } 0, \\ \text{або } \pm\infty \end{cases} \quad (k = 1, \ldots, n-1), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{y^{(n)}(t)y^{(n-2)}(t)}{[y^{(n-1)}(t)]^2} = \lambda_0.$$

Доведено, що в залежності від значень λ_0 множина таких розв'язків за своїми асимптотичними властивостями поділяється на $n + 2$ неперетинних класи. Встановлено необхідні та достатні умови існування розв'язків кожного з цих класів і одержано асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ для всіх таких розв'язків та їхніх похідних до порядку $n - 1$ включно. При цьому здійснюється подальший розвиток методик досліджень [1, 2].

1. Евтухов В.М. Асимптотические представления монотонных решений нелинейного дифференциального уравнения типа Эмдена-Фаулера n-го порядка // Докл. АН России. – 1992. – **324**, № 2. – С.№258-260.
2. Евтухов В.М., Кириллова Л.А. Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, № 8. – С. 1053–1061.

Тетяна Єрьоміна

Національний технічний університет України «КПІ»

ПРО ДЕЯКИЙ КЛАС ІНТЕГРО-СУМАРНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Вивчається проблема розв'язуваності задачі Чаплигіна у випадку розривних функцій, яка пов'язана зі знаходженням такої функції $z(t)$ з розривами 1-го роду в точках t_k, $a = t_0 < t_1 < \ldots$, $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = \infty$, що

$$z(t) > \int_a^t K(t, s, z(s))\, ds + \psi(t) + \sum_{a<t_k<t} \theta(t, t_k)\, \mu_k(z(t_k - 0))$$

і задовольняє нерівність $z(t) \geq u(t)$, де $u(t)$ – розв'язок рівняння

$$x(t) = \int_a^t K(t, s, x(s))\, ds + \psi(t) + \sum_{a<t_k<t} \theta(t, t_k)\, \mu_k(x(t_k - 0)), \quad (1)$$

неперервний на кожному з проміжків $[t_k, t_{k+1}[$, $k = 0, 1, \ldots$, $\theta(t, t_k)$ – неперервні невід'ємні при $t \geq a$ функції, $k = 0, 1, \ldots$, вектор-функції $K(t, s, x(s)) = \left\{K^1\left(t, s, x^1, \ldots, x^n\right), \ldots, K^n\left(t, s, x^1, \ldots, x^n\right)\right\}$ і $\psi(t) = \left\{\psi^1(t), \ldots, \psi^n(t)\right\}$ визначені в області, яка задана нерівностями $a \leq s < t < b$ $\|x\| < c$ $(b \leq \infty, c \leq \infty)$, функції $\mu_k(z)$ – неперервні невід'ємні і неспадні за z.

Теорема 1. *Нехай в $[a, b)$ існує пара вектор-функцій $z_i(t)$ $(\|z_i(t)\| < c)$ $t \in [a, b)$, $i = 1, 2$, з розривами 1-го роду, яка задовольняє інтегро-сумарним нерівностям*

$$z_1(t) > \int_a^t K(t, s, z_1(s))\, ds + \psi(t) + \sum_{a<t_k<t} \theta(t, t_k)\, \mu_k(z_1(t_k - 0)),$$

$$z_2(t) > \int_a^t K(t, s, z_2(s))\, ds + \psi(t) + \sum_{a<t_k<t} \theta(t, t_k)\, \mu_k(z_2(t_k - 0)),$$

де $\psi(t), \theta(t, t_k)$ – неперервні невід'ємні при $t \geq a$ функції $(k = 0, 1, \ldots)$, за винятком $z_i(t)$ $i = 1, 2$, що має розриви 1-го роду в точках t_k, причому $a < t_1 < t_2 < \ldots$, $\lim\limits_{i\to\infty} t_i = \infty$, функції $\mu_k(z_i)$ – неперервні невід'ємні і неспадні по z. Тоді будь-який розв'язок $v_\tau(t)$ $(\tau \in (a, b))$ рівняння (1) має в $[a, b)$ продовження $\nu_b(t)$ і існує верхній $u_1(t)$ та нижній $u_2(t)$ розв'язки рівняння (1), причому $z_1(t) > u_1(t) \geq \nu_b(t) \geq u_2(t) > z_2(t)$.

Тетяна Жигалло

Волинський державний університет імені Лесі Українки
tetvas@ukr.net

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ З КЛАСУ H^1 НА ВІДРІЗКУ ЇХ БІГАРМОНІЙНИМИ ОПЕРАТОРАМИ ПУАССОНА

Для кожної неперервної на $[-1,1]$ функції f розглянемо оператор $B_\rho(f,T,x)$:

$$B_\rho(f,T,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1+\frac{k}{2}\left(1-\rho^2\right)\right)\rho^k c_k \hat{T}_k\left(x\right),\quad 0\le\rho<1,$$

де $\hat{T}_0\left(x\right)=\sqrt{\frac{1}{\pi}}$, $\hat{T}_k\left(x\right)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(k\arccos x)$, $k\in\mathbb{N}$, — ортонормована з вагою $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на $[-1,1]$ система поліномів Чебишева, $c_k=\int\limits_{-1}^{1}\frac{f(t)\hat{T}_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ – коефіцієнти Фур'є функції f за цією системою. Оператор $B_\rho(f,T,x)$ будемо називати бігармонійним оператором Пуассона.

Нехай H^1 – клас Ліпшиця порядку 1 функцій $f(x)$ (див. [1]), які для всіх $x\in[-1,1]$ задовольняють умову

$$|f(x_1)-f(x_2)|\le|x_1-x_2|,\quad\forall x_1,x_2\in[-1,1]\,.$$

У роботі вивчається поведінка при $\rho\to1$ величини

$$E\left(H^1;B_\rho;x\right)=\sup_{f\in H^1}\left|f(x)-B_\rho(f,T,x)\right|,\quad x\in[-1,1].$$

Теорема. *В кожній точці $x\in[-1,1]$ при $\rho\to1$ правильна рівність*

$$E\left(H^1;B_\rho;x\right)=\sqrt{1-x^2}\left(\frac{2(1-\rho)}{\pi}+\frac{2(1-\rho)^2}{\pi}\ln\frac{1}{1-\rho}\right)+$$
$$+O(1-\rho)^2\left(\sqrt{1-x^2}+|x|\right).$$

1. Тиман А.Ф. Приближение функций, удовлетворяющих условию Липшиця, обыкновенными многочленами // Докл. АН СССР. – 1951. – **77**, № 6. – С. 969–972.

Микола Заболоцький

Львівський національний університет імені Івана Франка
m_zabol@franko.lviv.ua

ВИНЯТКОВІ ЗНАЧЕННЯ ТА ПРЯМІ ЖУЛІА

Нехай f – ціла функція. Промінь $l_\theta = \{z : arg\ z = \theta\}$ називають прямою Жуліа функції f, якщо f приймає нескінченно часто будь-яке значення з комплексної площини, за винятком можливо одного, в кожному куті $\{z : \theta - \varepsilon < arg\ z < \theta + \varepsilon\}$, де $\varepsilon > 0$ – довільне число. Якщо функція f приймає значення $a \in \mathbb{C}$ лише скінченну кількість разів у деякому такому куті, то кажемо, що f має виняткове значення на прямій Жуліа l_θ. С. Топпіла [1] довів: якщо

$$\ln M(r, f) = O(\ln^2 r),\ r \to \infty, \tag{1}$$

то f не має виняткових значень на жодній своїй прямій Жуліа.

Виникає запитання: чи можна в теоремі Топпіли умову (1) замінити на умову

$$\ln M(2r, f) \sim \ln M(r, f),\ r \to \infty. \tag{2}$$

Нам не вдалося дати повну відповідь на це запитання. Ми показали справедливість твердження теореми Топпіли тільки для деяких підкласів цілих функцій, що задовольняють умову (2) (теореми 1–2).

Теорема 1. *Нехай f – ціла функція з нулями на скінченній системі променів $l_{\theta_j}, 0 \le \theta_j < 2\pi, j = \overline{1, n}$, і виконується умова (2). Тоді прямими Жуліа функції f будуть тільки промені l_{θ_j}, причому на цих прямих Жуліа функція f не має виняткових значень.*

Теорема 2. *Нехай ціла функція f задовольняє умову (2) і виконується одна з умов:*

А) $\ln M(r \ln r, f) \sim \ln M(r, f)$, $r \to \infty$;

Б) $\sup\{t(\ln M(t, f))' / \ln M(t, f) : t \ge r\} = o(1/ \ln\ln r)$, $r \to \infty$;

В) $\ln M(r\varphi(r), f) = O(\ln M(r, f))$, $r \to \infty$, *де φ – додатна зростаюча на $[0; +\infty)$ функція така, що* $\ln\ln r = o(\ln \varphi(r))$, $r \to \infty$.

Тоді f не має виняткових значень на жодній своїй прямій Жуліа.

1. Toppila S. Some remarks on exceptional values at Julia line // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. – 1970. – **456**. – P. 3–20.

Ольга Задорожна, Олег Скасків, Оксана Мулява

Львівський національний університет імені Івана Франка
Київський національний університет харчових технологій

matstud@franko.lviv.ua

АБСЦИСИ ЗБІЖНОСТІ ПОДВІЙНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Нехай $(\lambda_n^{(1)})$, $(\lambda_m^{(2)})$ – невід'ємні послідовності, $\lambda_0^{(1)} = \lambda_0^{(2)} = 0$, а $F(s_1, s_2) = \sum\limits_{n,\, m=0}^{\infty} a_{nm} \exp\{s_1\lambda_n^{(1)} + s_2\lambda_m^{(2)}\}, s_j = \sigma_j + it_j\, (j = 1, 2)$, – подвійний ряд Діріхле. Абсолютну збіжність таких рядів досліджували В.П.Громов і А.І.Янушаускас (див., наприклад, [1]). Нехай $\mathbf{G}_c$, $\mathbf{G}_a$ відповідно області збіжності та абсолютної збіжності ряду для $F(s_1, s_2)$, а $G_c = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ x = Re\ z,\ z \in \mathbf{G}_c\}$, $G_a = \{x \in \mathbb{R}^2 :\ x = Re\ z,\ z \in \mathbf{G}_a\}$ – їхні сліди в $\{x \in \mathbb{R}^2 :\ x = Re\ z,\ z \in \mathbb{C}^2\}$, тобто, області спряжених абсцис збіжності та абсолютної збіжності. Для $\gamma > 0$, $\{\delta, \delta_1, \delta_2\} \subset \mathbb{R}$ позначимо:
$h_1(\gamma; \delta) = \varliminf\limits_{n+m\to\infty} \big((\gamma - 1) \ln |a_{nm}| + \delta(\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)})\big)/\ln(n + m)$,
$h_2(\gamma; \delta_1, \delta_2) = \varliminf\limits_{n+m\to\infty} \big((\gamma - 1) \ln |a_{nm}| + \delta_1\lambda_n^{(1)} + \delta_2\lambda_m^{(1)}\big)/\big(\ln n + \ln m\big)$.
Нехай G_μ – область існування максимального члена
$\mu(\sigma_1, \sigma_2) = \max\{|a_{nm}| \exp\{\sigma_1\lambda_n^{(1)} + \sigma_2\lambda_m^{(2)}\} : n \geq 0, m \geq 0\}$ ряду Діріхле. Зрозуміло, що $G_a \subseteq G_c \subseteq G_\mu$.

Теорема. *i)* *Якщо* $h_1(\gamma; \delta) > 2$, *то* $\gamma G_c \subseteq G_a + \delta e_1$, *де* $e_1 = (1; 1)$.
ii) *Якщо* $h_2(\gamma; \delta_1, \delta_2) > 1$, *то:*

$$\gamma G_\mu \subseteq G_a + (\delta_1, \delta_2); \quad \gamma G_\mu \subseteq G_a + (\delta_1, \delta_2).$$

Наслідок. *Якщо* $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}_+$ *таке, що*

$$\varlimsup_{n+m\to\infty} (\ln n + \ln m)/(\tau_1\lambda_n^{(1)} + \tau_2\lambda_m^{(2)}) \leq 1,$$

то $G_c \subseteq G_a + \tau$; $G_\mu \subseteq G_a + \tau$.
Якщо ж $\varlimsup\limits_{n+m\to\infty} \ln(n + m)/(\lambda_n^{(1)} + \lambda_m^{(2)}) \leq \tau_0$, *то* $G_c \subseteq G_a + 2\tau_0 e_1$.

Теорема і наслідок є аналогами відповідних тверджень, встановлених у випадку рядів Діріхле від однієї змінної в [2].

1. Янушаускас А.И. Двойные ряды.–Новосиб.: Наука, 1980.–224 с.
2. Мулява О.М. Про абсцису збіжності ряду Діріхле // Мат. студії, 1998. – **9**, № 2. – С. 171–176.

Mykhailo Zarichnyi

Ivan Franko Lviv National University
mzar@litech.lviv.ua

SPACES OF IDEMPOTENT PROBABILITY MEASURES

Let $C(X)$ denote the Banach space of continuous functions on a compact Hausdorff space X. We denote by $\odot\colon \mathbb{R}\times C(X)\to C(X)$ the map acting by $(\lambda,\varphi)\mapsto \lambda_X+\varphi$, and by $\oplus\colon C(X)\times C(X)\to C(X)$ the map acting by $(\varphi,\psi)\mapsto \max\{\varphi,\psi\}$.

For each $c\in\mathbb{R}$ by c_X we denote the constant function from $C(X)$ defined by the formula $c_X(x)=c$ for each $x\in X$.

A functional $\mu\colon C(X)\to\mathbb{R}$ is called an *idempotent probability measure* (a *Maslov measure*) if

1. $\mu(c_X)=c$;
2. $\mu(c\odot\varphi)=c\odot\mu(\varphi)$;
3. $\mu(\varphi\oplus\psi)=\mu(\varphi)\oplus\mu(\psi)$,

for every $\varphi,\psi\in C(X)$.

See, e.g. [1] for some properties of idempotent measures.

The set $I(X)$ of idempotent measures is endowed with the weak* topology. We show that this construction is functorial in the category of compact Hausdorff spaces and investigate the obtained functor. In particular, we show that the functor I determines a monad in the mentioned category.

The spaces $I(X)$ play in the so-called idempotent mathematics (see, e.g. [2,3] for some of its aspects) the role corresponding to those of the spaces $P(X)$ of probability measures in the traditional mathematics.

1. Akian M. Densities of idempotent measures and large deviations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1999. – **351**, N 11. – P. 4515-4543.
2. Litvinov G.L., Maslov V.P., Shpiz G.B. Idempotent functional analysis: An algebraic approach // Translated from Matematicheskie Zametki. – 2001. – **69**, N 5. – P. 758-797.
3. Maslov V.P., Samborskii S.N. Idempotent analysis. – Providence: Amer. Math. Soc., 1992. (v.13 of Advances in Soviet Mathematics)

Тарас Звоздецький

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
mathan@ukr.net

ОПИС ЛІНІЙНИХ НЕПЕРЕРВНИХ ОПЕРАТОРІВ, ЩО ДІЮТЬ У ПРОСТОРАХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай G – область комплексної площини, $\mathcal{A}(G)$ – простір усіх аналітичних в G функцій, наділений топологією компактної збіжності. Для областей G_1 і G_2 з $\mathbb{C}$ через $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$ позначимо сукупність усіх лінійних неперервних операторів, що діють з $\mathcal{A}(G_1)$ в $\mathcal{A}(G_2)$. У роботі [1] вивчався взаємозв'язок між операторами $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$ і локально аналітичними на множині $\mathcal{C}G_1 \times G_2$ функціями двох змінних $t(\lambda, z)$, для яких $t(\lambda, z) = T[1/(\lambda - z)]$. У [2] при певних умовах на області G_1 і G_2 та функцію $\alpha(z)$ була встановлена взаємно однозначна відповідність між множиною $\mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$ і одним класом аналітичних функцій двох змінних $t(\lambda, z)$, для яких $t(\lambda, z) = T[\alpha(\lambda z)]$.

Нехай $\varrho > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}\mu > 0$), $[\varrho; +\infty)$ – простір усіх цілих функцій, порядок яких менший за ϱ або тип яких при порядкові ϱ скінченний, а $E_\varrho(z; \mu)$ – функція Міттаґ-Лефлера.

Теорема. *Нехай G_1 – ϱ-опукла область, а G_2 – довільна область в $\mathbb{C}$. Оператор $T \in \mathcal{L}(\mathcal{A}(G_1), \mathcal{A}(G_2))$ тоді й лише тоді, коли функція $t(\lambda, z) = T[E_\varrho(\lambda z; \mu)]$ при кожному фіксованому $\lambda \in \mathbb{C}$ аналітична в G_2 відносно z і при кожному фіксованому $z \in G_2$ належить до класу $[\varrho; +\infty)$ відносно λ, причому індикатор зростання $h(\theta; t_z)$ функції $t_z(\lambda) = t(\lambda, z)$ задовольняє наступну умову: для кожного компакта $K_2 \subset G_2$ існує такий ϱ-опуклий компакт $K_1 \subset G_1$, що $h(\theta; t_z) \le k_\varrho(-\theta; K_1)$ для всіх $z \in K_2$ і $\theta \in (-\pi; \pi]$, де $k_\varrho(\theta; K_1)$ – ϱ-опорна функція ϱ-опуклого компакта K_1.*

1. Köthe G. Dualität in der Funktionentheorie // J. Reine und Angew. Math. – 1953. – **191**. – S. 30-49.
2. Линчук С.С. О представлении линейных непрерывных операторов, действующих в пространствах аналитических функций. – Черновцы, 1982. – 37 с. – Деп. в ВИНИТИ 13 апреля 1982 г., № 1798-82.

Михайло Зеліско, Мирослав Шеремета

Львівський національний університет імені Івана Франка
tftj@franko.lviv.ua

ПРО НИЖНІЙ Ф-ТИП МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА РЯДУ ДІРІХЛЕ

Нехай $\Lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, а $S(\Lambda, A)$ – клас рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

з абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a = A \in (-\infty, +\infty]$. Для $\sigma < A$ нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}$ – максимальний член ряду (1). Через $\Omega(A)$ позначимо клас додатних необмежених на $(-\infty, A)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є неперервно диференційовна, додатна і зростаюча до $+\infty$ на $(-\infty, A)$. Нехай $\Psi(x) = x - \Phi(x)/\Phi'(x)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном.

Приймемо $\tau_\Phi = \varliminf\limits_{\sigma\uparrow A} \dfrac{\ln \mu(\sigma, F)}{\Phi(\sigma)}$, $k_\Phi = \varliminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_n}{\Phi'\left(\Psi^{-1}\left(\dfrac{1}{\lambda_n} \ln \dfrac{1}{|a_n|}\right)\right)}$ і вкажемо умови, за яких нижній Φ-тип τ_Φ максимального члена ряду (1) є додатним і, зокрема, нескінченним. Для цього говоритимемо, що $F \in S(\Lambda, A, k_\Phi > 0)$ ($F \in S(\Lambda, A, k_\Phi = +\infty)$), якщо $F \in S(\Lambda, A)$ і $k_\Phi > 0$ ($k_\Phi = +\infty$). Через $\Omega_1(A)$ позначимо клас функцій $\Phi \in \Omega(A)$ таких, що Φ/Φ' є незростаючою функцією.

Теорема. *Нехай $A \in (-\infty, +\infty]$. Умова $\lambda_{n+1} = O(\lambda_n)$, $n \to \infty$, є необхідною і достатньою для того, щоб $\tau_\Phi > 0$ для всіх $\Phi \in \Omega_1(A)$ і $F \in S(\Lambda, A, k_\Phi > 0)$, а також є необхідною і достатньою для того, щоб $\tau_\Phi = +\infty$ для всіх $\Phi \in \Omega_1(A)$ і $F \in S(\Lambda, A, k_\Phi = +\infty)$.*

Александр Зернов, Юлия Кузина

Южноукраинский государственный педагогический
университет им. К.Д. Ушинского
zernov@ukr.net, yuliak@te.net.ua

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧ КОШИ

В первой части доклада рассматриваются задачи Коши вида

$$P(t, x(t), x'(t)) \ + \ f(t, x(t), x'(t)) \ = 0, \quad x(0) = 0, \tag{1}$$

где $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}$– неизвестная функция, $P : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – многочлен, $f : D_1 \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $D_1 \subset (0, \tau) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, которая в определенном смысле мала.

Во второй части доклада рассматриваются задачи Коши вида

$$\alpha(t)x'(t) = F(t, x(g_1(t)), \ldots, x(g_r(t)), x'(h_1(t)), \ldots, x'(h_s(t))),$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

где $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ – неизвестная функция, $\alpha : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ – непрерывная функция, $\lim\limits_{t \to +0} \alpha(t) = 0$, $F : D_2 \to \mathbb{R}$ – непрерывная функция, $D_2 \subset (0, \tau) \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$, $g_i : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ – непрерывные функции, $g_i(t) \leqslant t,\ t \in (0, \tau) \ \ (i \in \{1, \ldots, r\})$, $h_j : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ – непрерывные функции, $h_j(t) \leqslant t,\ t \in (0, \tau) \ \ (j \in \{1, \ldots, s\})$.

Решением каждой из задач (1),(2) называется непрерывно дифференцируемая функция $x : (0, \rho] \to \mathbb{R} \ \ (0 < \rho < \tau)$, которая при всех $t \in (0, \rho]$ удовлетворяет соответствующему уравнению и при этом выполнено условие $\lim\limits_{t \to +0} x(t) = 0$.

Доказывается существование у задач (1),(2) непустых множеств решений $x : (0, \rho] \to \mathbb{R} \ \ (\rho$ – достаточно мало) с требуемыми асимптотическими свойствами при $t \to +0$.

1. Зернов А.Е., Кузина Ю.В. Качественное исследование сингулярной задачи Коши $F(t, x(t), x'(t)) = 0, \ \ x(0) = 0$ // Укр. мат. ж. – 2003. – **55**, №12. – С. 1720-1723.

Дмитро Зікрач, Юрій Галь

Львівський національний університет імені Івана Франка
Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
tftj@franko.lviv.ua

АСИМПТОТИЧНІ ОЦІНКИ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ ЗА ОДНОРІДНИМИ ПОЛІНОМАМИ

Нехай $\widetilde{l}_2(\mathbb{C})$ — клас таких послідовностей $z = (z_1, z_2, \ldots)$, $z_k \in \mathbb{C}$, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\ln|z_k|)^2 < +\infty$, $\widetilde{l}_2(\mathbb{R})$ — клас послідовностей $r = (r_1, r_2, \ldots) \in \widetilde{l}_2(\mathbb{C})$ таких, що $r_k \in \mathbb{R}$, $r_k \geq 0$.

Розглядаємо абсолютно збіжні для всіх $z = (z_1, z_2, \ldots) \in \widetilde{l}_2(\mathbb{C})$ ряди за однорідними поліномами

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\|n\|=k} a_n z^n,$$

де $n = (n_1, \ldots, n_p)$, $z^n = z_1^{n_1} z_2^{n_2} \ldots z_p^{n_p}$. Для $r = (r_1, r_2, \ldots)$ позначимо: $\mu_f(r) = \sup\big\{ \sum\limits_{\|n\|=k} |a_n| r^n : k \geq 0 \big\}$, $f_+(r) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \sum\limits_{\|n\|=k} |a_n| r^n$. Нехай P_0 — довільна ймовірнісна міра на одиничній сфері в l_2, ν_0 — міра Лебега на додатному дійсному промені $\mathbb{R}_+$, а $\nu = P_0 \times \nu_0$ — прямий добуток мір, тобто міра на $l_2 = \{x \in l_2 : |x| = 1\} \times \mathbb{R}_+$.

Правильне таке твердження.

Теорема. *Для кожного $r \geq 0$ існує множина $E \subset \widetilde{l}_2(\mathbb{R})$ така, що для всіх $r \in K \setminus E$*

$$f_+(r) \leq \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{1/2+\varepsilon}, \qquad \sigma(E) \stackrel{def}{=} \nu(E^*) < +\infty,$$

де E^* — образ множини E при відображенні $x_1 = \ln r_1, x_2 = \ln r_2, \ldots : \widetilde{l}_2(\mathbb{R}) \to l_2(\mathbb{R})$, K — образ при відображенні $r_1 = e^{x_1}, r_2 = e^{x_2}, \ldots : l_2(\mathbb{R}) \to \widetilde{l}_2(\mathbb{R})$ довільного конуса K^* з вершиною у точці $0 \in l_2$ такого, що $\overline{K}^* \setminus \{0\} \subset \{x \in l_2(\mathbb{R}) : \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln \mu_f(e^{tx}) = +\infty\}$.

Wadim Zudilin

Lomonosov Moscow State University

RAMANUJAN-TYPE FORMULAE FOR $1/\pi$: A SECOND WIND?

wadim@mi.ras.ru

In 1914 S. Ramanujan recorded a list of 17 series for $1/\pi$. We review the methods to prove the Ramanujan's formulae and indicate recently discovered generalizations, some of which are not yet proven.

Степан Івасишен, Василь Лаюк

Національний технічний університет України „КПІ“
ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України

ПРО ЗАДАЧУ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА

vlayuk@gmail.com

Розглядаються три класи рівнянь $\mathbf{E}_{21}^{B}$, $\mathbf{E}_{22}^{B}$ і $\mathbf{E}_{23}^{B}$, які узагальнюють відповідно клас $\mathbf{E}_{21}$ вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова порядку $2b$, клас $\mathbf{E}_{22}$ ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова і клас $\mathbf{E}_{23}$ вироджених рівнянь типу Колмогорова з $2\vec{b}$ - параболічною частиною за основними змінними із монографії [1].

У доповіді уточнюються і доповнюються результати з [1] для класів $\mathbf{E}_{21}$, $\mathbf{E}_{22}$ і $\mathbf{E}_{23}$ та наводяться відповідні результати дослідження фундаментальних розв'язків і коректної розв'язності задачі Коші для класів $\mathbf{E}_{21}^{B}$, $\mathbf{E}_{22}^{B}$ та $\mathbf{E}_{23}^{B}$.

Уточнення і доповнення результатів з [1] стосується насамперед поняття розв'язків та оцінок приростів старших похідних від фундаментальних розв'язків. При означенні розв'язків використовується поняття похідної Лі функції відносно відповідного векторного поля [2].

1. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type. – Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2004. – 390 p. – (Operator Theory: Adv. and Appl. Vol. 152).
2. Di Francesco M., Pascucci A. On a class of degenerate parabolic equations of Kolmogorov type // AMRX Appl. Math. Res. Express. – 2005. – **3**. – P. 77-116.

Галина Івасюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ПОЧАТКОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ СОЛОННИКОВА–ЕЙДЕЛЬМАНА

b_tonia@mail.ru

Класичне означення І.Г.Петровського параболічних систем рівнянь із частинними похідними С.Д.Ейдельманом [1, 2] узагальнено на випадок систем, в яких диференціювання за різними просторовими змінними мають, взагалі кажучи, різну вагу відносно диференціювання за часовою змінною, тобто системи мають векторну параболічну вагу $\overrightarrow{2b} := (2b_1, \ldots, 2b_n)$, та В.О.Солонниковим [3] – на випадок, коли порядок оператора, який діє на невідому функцію u_j у рівнянні з номером k, може залежати як від j, так і від k .

У даному повідомленні розглядаються системи, які природно узагальнюють параболічні за Солонниковим системи і системи, параболічні в розумінні Ейдельмана (такі системи ми називаємо параболічними за Солонниковим системами квазіоднорідної структури або параболічними системами Солонникова-Ейдельмана). Вивчення таких систем, в основному для модельного випадку, розпочато в [4]. Для нового класу систем доведені теореми про коректну розв'язність початкових задач у просторах Гельдера швидко зростаючих функцій та необхідність умов параболічності системи для виконання апріорних оцінок для її розв'язків .

1. Эйдельман С.Д. Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – **133**, № 1. – С. 40 – 43.
2. Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д. $\overrightarrow{2b}$-параболические системы // Тр. сем. по функц. анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. – Вып. 1. – С. 3-175, 271-273.
3. Солонников В.А. О краевых задачах для общих параболических систем // Докл. АН СССР. – 1964. – **157**, № 1. – С. 56-59.
4. Івасишен С.Д., Івасюк Г.П. Параболічні за Солонниковим системи квазіоднорідної структури // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1501-1510.

Володимир Ільків[1,2], Тетяна Магеровська[3]

[1]Національний університет „Львівська політехніка“
[2]ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
[3]Львівський державний університет внутрішніх справ
ilkivv@rambler.ru

ГЛАДКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ІЗ НЕЛОКАЛЬНИМИ БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СТРОГО ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

В області $(0,T)\times\Omega_{2\pi}^p$, де $\Omega_{2\pi}^p=(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, досліджено нелокальну багатоточкову задачу для гіперболічного рівняння

$$D_t^n u+\sum_{j=1}^{n}a_j(t,D)D_t^{n-j}u=0,\quad \sum_{\alpha=1}^{M}\sum_{j=1}^{n}B_{j\alpha}(D)D_t^{n-j}u\Big|_{t=T_\alpha}=\varphi; \quad (1)$$

вважаємо, що $a_j(t,D)=\sum_{|s|\le jl}a_{js}(t)D^s$, $B_{j\alpha}(D)=\sum_{|s|\le jl}B_{j\alpha}^{(s)}D^s$, $a_{js}(\cdot)\in\mathbf{C}^1\big([0,T];\mathbb{C}\big)$, $B_{j\alpha}^{(s)}\in\mathcal{O}^n$, $\mathcal{O}=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 1\}$, $D_t=\partial/\partial t$, $D^s=D_1^{s_1}\cdots D_p^{s_p}$, $D_j=-i\partial/\partial x_j$, $0\le T_1<\cdots<T_M\le T$.

Такі задачі є некоректними за Адамаром; вони, взагалі, не є розв'язними у шкалі просторів Соболєва 2π-періодичних за змінними $(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega_{2\pi}^p$ функцій на відміну від задач із сталими коефіцієнтами [1]. Умови існування розв'язку задачі (1) та його гладкість у шкалі просторів Соболєва залежать від точності оцінок знизу малих знаменників, які виникають в рядах, що зображають цей розв'язок, та від оцінок зверху фундаментальної матриці розв'язків для звичайного (залежного від параметрів) диференціального рівняння.

За допомогою методів метричної теорії чисел та використання умови гіперболічності рівняння авторами встановлено існування та єдиність розв'язку задачі (1) та його гладкість для майже всіх векторів, які певним способом складені з елементів векторів $B_{j\alpha}^{(s)}$.

Робота частково підтримана ДФФД України (проект № 14.1/017).

1. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

Володимир Ільків, Богдан Салига, Петро Сохан

Національний університет „Львівська політехніка“
ilkivv@rambler.ru

ПРО КОНСТАНТУ В ЛЕМІ ПЯРТЛІ

Питання про міру множин, які визначаються деякими функціями, виникає в різних галузях математики, зокрема, диференціальних рівняннях, теорії функцій, теорії ймовірностей. Для прикладу, в теорії крайових задач для рівнянь з частинними похідними, а саме, умовно коректних задач, які пов'язані з малими знаменниками, необхідно знаходити міри множин (у просторі коефіцієнтів рівнянь та параметрів крайових умов), на яких ці знаменники не перевищують заданий рівень. Для унітальних степеня n многочленів $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ міра множини $\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \le \varepsilon\}$ оцінюється числом $\pi \sqrt[n]{\varepsilon^2}$ (лема Картана [1, с. 257]). Для гладких функцій $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ встановлено (лема Пяртлі), що міра множини $\{x \in [a, b] : |f(x)| \le \varepsilon\}$ не перевищує числа $C_n \sqrt[n]{\varepsilon/\delta}$, де $[a, b]$ – довільний проміжок, $|f^{(n)}(x)| \ge \delta > 0$ на $[a, b]$. Цей результат був отриманий у роботі [2] за додаткових припущень щодо гладкості f та величини ε. Уточненням та узагальненням леми Пяртлі займалися В. І. Бернік, Б. Й. Пташник, В. С. Ільків, П. І. Штабалюк, М. М. Симотюк [3–6], в результаті чого встановлено такі значення сталої C_n: $(2n+1)(2^n-2)\sqrt[n]{2}$ [2], $n\sqrt{2^{n+1}}$ [5], $2n\sqrt[n]{n!}$ [6].

У цьому повідомленні подано спосіб зменшення C_n до числа $2n$.

Робота частково підтримана ДФФД України (проект № 14.1/017).

1. Бейкер Дж., мл., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
2. Пяртли А. С. Функц. анализ и его прилож. – 1969. – **3**, вып. 4. – С. 59–62.
3. Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О. Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.
4. Илькив В. С., Пташник Б. И. Дифференц. уравн. – 1984. – **20**, № 6. – С. 1012–1023.
5. Ільків В. С. Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 68–74.
6. Симотюк М. М. Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 90–95.

Євген Ірза, Степан Будз, Зигмунт Касперський

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
Політехніка Опольська, Польща

ЗАДАЧІ ОПТИМАЛЬНОГО ЗА ШВИДКОДІЄЮ КЕРУВАННЯ РЕЖИМАМИ ТЕРМООБРОБКИ ТІЛ З В'ЯЗКОПРУЖНИХ МАТЕРІАЛІВ

Сформульовано і розв'язано задачу оптимального за швидкодією керування режимами термообробки в'язкопружних тіл обертання. Виконуються обмеження на термонапружений стан в тілі. У використаній математичній моделі процеси описано послідовно зв'язаними системами диференційних рівнянь теплопровідності та термов'язкопружності, які є нелінійними за рахунок температурної залежності характеристик матеріалу і обмежень на функцію керування та параметри стану. Критерієм оптимальності вибрано мінімум часу термообробки. Розв'язок задачі побудовано на основі принципу поетапної параметричної оптимізації, на базі побудованих розв'язків прямої задачі термомеханіки в'язкопружних тіл. У рамках запропонованого підходу мінімізація функціоналу (мінімального часу термообробки), при заданих обмеженнях і в'язях на параметри термонапруженого стану і характристики матеріалу, зведена до задачі нелінійного програмування на знаходження умовного мінімуму відповідної функції, аргументами якої є значення функції управління в дискретні моменти часу. Ці задачі розв'язано пошуковими методами, зокрема методом прямого пошуку по Хуку і Джівсу. Ключове місце в такій схемі оптимізації займає побудова розв'язку прямої задачі, яка включає відповідні задачі теплопровідності і термов'язкопружності. Задача формулюється в квазістатичній постановці і в переміщеннях. Оскільки геометрична конфігурація області, яку займає тіло, звичайно є досить складною і система рівнянь, що описують розглядувані при термообробці процеси, є нелінійною, використано метод зважених нев'язок в поєднанні з кінцево-елементним підходом. При цьому вихідна система нелінійних диференційних рівнянь піддається просторовій і часовій дискретизації на елементі розбиття. Отримано системи нелінійних алгебричних рівнянь, які розв'язуються за допомогою ітераційних методів.

Євгенія Іщенко

Дніпропетровський національний університет

СИСТЕМА ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПФАФФА ДЛЯ НОРМАЛЬНО-ІНФЛЕКЦІЙНИХ КОМПЛЕКСІВ K_1 в E_3

Система рівнянь Пфаффа є сукупністю лінійних рівнянь у повних диференціалах. У багатьох випадках, наприклад, майже завжди в питаннях диференціальної геометрії рівняння Пфаффа замінюють систему рівнянь в частинних похідних.

Нехай в евклідовому просторі E_3 введені криволінійні координати u, v, w. З точкою $\overline{A}(u, v, w)$ простору E_3 пов'яжемо ортогональні орти $\overline{I_1}(u, v, w)$, $\overline{I_2}(u, v, w)$, $\overline{I_3}(u, v, w)$. Позначимо через ω^i, ω_i^k координати векторів $d\overline{A}, d\overline{I}_i, (i = 1, 2, 3)$ відносно тригранника $(\overline{A}, \overline{I_1}, \overline{I_2}, \overline{I_3})$:

$$d\overline{A} = \omega^k \overline{I}_i, d\overline{I_i} = \omega_i^k \overline{I_k}, (i, k = 1, 2, 3).$$

Величини ω^i,ω_i^k, які є деякі лінійні форми диференціалів du,dv,dw, задовольняють умови:

$$\omega_i^k = -\omega_k^i, (\omega^i)' = [\omega^j \omega_j^i];\ (\omega_i^k)' = [\omega_i^j \omega_j^k] \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Тригранник $(\overline{A}, \overline{I_1}, \overline{I_2}, \overline{I_3})$ є супровідний для будь-якого многовиду, який розглядається в даному просторі. В E_3 розглянемо нормально-інфлекційні комплекси, які розшаровуються на плоскі пучки прямих, площини яких перпендикулярні до поверхні, яку описує простий інфлекційний центр променя комплексу (K_1). Для дослідження цих комплексів певним чином вибрано супровідний тригранник $(\overline{A}, \overline{I_1}, \overline{I_2}, \overline{I_3})$: $\overline{A}$ – простий інфлекційний центр променя комплексу; $\overline{I_3}$ колінеарний цьому променю; площина $(\overline{A}, \overline{I_2}, \overline{I_3})$ відповідає точці $\overline{A}$ в нормальній корреляції. В цьому триграннику комплекси K_1 визначаються системою диференціальних рівнянь Пфаффа:

$$\omega^2 = k\omega_3^1 + r\omega^1, \omega^3 = b\omega^2,\ dr + (1 + r^2)\omega_1^2 = l\omega^1 + \alpha\omega_3^1 + \beta\omega_3^2,$$
$$dk + r\omega^3 + rk\omega_1^2 = \alpha\omega^1 + m\omega_3^1 + \gamma\omega_3^2,\ -\omega^3 + k\omega_1^2 = \beta\omega^1 + \gamma\omega_3^1,$$
$$db + (1 + b^2)\omega_2^3 + (1 + b^2/k)\omega^1 = -\lambda\omega^2.$$

Дослідження цієї системи методом зовнішніх форм Картана показало, що ця система в інволюції, та її розв'язок існує з довільністю в дві функції двох аргументів. Доведена теорема.

Теорема. *Кожен нормально-інфлекційний комплекс K_1 розшаровується в однопараметричну сім'ю конґруенцій $\omega^1 = 0$ та $\omega^2 = 0$.*

Анатолій Казмерчук

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
_kaz@rambler.ru

УМОВИ ЛАКСА В ЗАДАЧІ РІМАНА ДЛЯ СИСТЕМ ЗАКОНІВ ЗБЕРЕЖЕННЯ

Розглядається задача Рімана для гіперболічної системи законів збереження

$$u_t + F(u)_x = 0, \quad u \in \mathbb{R}^n, \quad F \in \mathbb{R}^n, \quad A = F'(u) \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u|_{t=0} = u_l + sign(x)(u_r - u_l). \tag{2}$$

Задача Коші для (1) навіть при досить гладких даних задачі при $n = 1$ не має класичного розв'язку. Водночас, порушується єдиність узагальненого розв'язку в сенсі розподілів.

У роботі [1] введено умову на розв'язки задачі (1), (2), для яких у кожній точці розриву для $1 \leq k \leq n$

$$\lambda_k(u_r) < s < \lambda_k(u_l), \quad \lambda_{k-1}(u_r) < s < \lambda_{k+1}(u_l), \tag{3}$$

(λ_k – $k^{\underline{e}}$ власне значення матриці A, s – швидкість ударної хвилі). В [1] показано, що при малій варіації початкової функції умова (3) еквівалентна наступній:

$$s(U(u_r) - U(u_l)) - (G(u_r) - G(u_l)) \geq 0 \tag{4}$$

$$(U(u) \in \mathbb{R}^n, \ U'' > 0, \ G(u) \in \mathbb{R}^n, \ A\nabla U = \nabla G).$$

Для систем (1), (2) широкого класу E показано еквівалентність умов (3) і (4) для довільної початкової функції (2), а також єдиність автомодельного розв'язку. Клас E містить, наприклад, систему (1) з функцією потоку

$$F(u) = (æ u_1 + \varphi(u_2), \mu u_2 + \psi(u_1)).$$

1. Lax P.D. Hyperbolic systems of conservation laws II // Com. Pure Appl. Math. – 1957. – **10**. – P. 537-566.

Петро Каленюк, Ярослав Баранецький, Уляна Ярка

Національний університет „Львівська політехніка“
ul_yarka@yahoo.com

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ ДЛЯ ЗБУРЕНОГО ЕЛІПТИЧНОГО РІВНЯННЯ

Нехай $L_2(K)$ – простір дійснозначних функцій інтегровних (за Лебегом) з квадратом в області K, $K = (0,1) \times (0,1)$,

$$W_2^2(K) = \left\{ u \in L_2(K) : \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L_2(K), \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \in L_2(K) \right\}.$$

Розглянуто задачу

$$L_1 u(x,y) \equiv L_0 u(x,y) + \alpha L_{1,x} u(x,y) = f(x,y),\ \alpha \in \mathbb{R},\ f \in L_2(K), \quad (1)$$

$$u(x,y)|_{\partial K} = 0, \quad (2)$$

де $L_0 u(x,y) = -\Delta u(x,y),\ L_{1,x} u(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial u(1-x,y)}{\partial x}$.

Позначимо: L_1 – оператор задачі (1), (2): $\mathrm{L}_1 u\,(x,y) \equiv L_1 u\,(x,y)$, $D(\mathrm{L}_1) = \{u \in W_2^2(K),\ u|_{\partial K} = 0\}$ та $\mathrm{L}_{1,\mathrm{x}}$ – оператор, для якого $\mathrm{L}_{1,\mathrm{x}} u(x,y) \equiv L_{1,x} u(x,y)$, $D(\mathrm{L}_{1,\mathrm{x}}) = D(L_1)$.

У випадку $\alpha = 0$ оператор L_1 позначаємо $= \mathrm{L}_0$.

Теорема 1.

1. Точковий спектр оператора L_1 *співпадає з точковим спектром оператора* L_0, $\sigma_p(\mathrm{L}_1) = \sigma_p(\mathrm{L}_0) = \left\{ \lambda_{k,m} : \lambda_{k,m} = (\pi k)^2 + (\pi m)^2,\ \ k, m \in \mathbb{N} \right\}$.

2. Система власних функцій оператора L_1 *є базою Ріса в просторі* $L_2(K)$.

1. Ярка У.Б. Про один клас крайових задач для диференціально-фукціональних рівнянь еліптичного типу ізоспектральних задачі Діріхле для рівняння Пуассона // Вісн. Чернівецького ун-ту, сер. Математика. – 2004. – Вип. 191-192. – С. 146-150.

Інна Кальчук, Юрій Харкевич

Волинський державний університет імені Лесі Українки
kalchuk_i@ukr.net

АСИМПТОТИЧНІ РОЗВИНЕННЯ ВЕРХНІХ МЕЖ ВІДХИЛЕНЬ БІГАРМОНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА ВІД ФУНКЦІЙ З КЛАСІВ W^r_∞

Нехай C — простір 2π-періодичних неперервних функцій, у якому норма задається за допомогою рівності $\|f\|_C = \max\limits_t |f(t)|$. Через W^r_∞ позначимо множину 2π-періодичних функцій, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно і $\operatorname{ess}\sup\limits_t |f^{(r)}(t)| \le 1$.

Величина

$$B_\delta(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+x)\left\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[1+\frac{k}{2}\left(1-e^{-\frac{2}{\delta}}\right)\right]e^{-\frac{k}{\delta}}\cos kt\right\}dt,\ \delta>0,$$

називається бігармонійним інтегралом Пуассона функції f.

Ставиться за мету знаходження повних асимптотичних розвинень для величин $\mathcal{E}\left(W^r_\infty, B_\delta\right)_C = \sup\limits_{f\in W^r_\infty}\left\|f\left(x\right)-B_\delta\left(f,x\right)\right\|_C$, $r\in\mathbb{N}$, за степенями $\frac{1}{\delta}$ при $\delta\to\infty$.

Теорема 1. *Мають місце наступні повні асимптотичні розвинення:*

$$\mathcal{E}\left(W^1_\infty; B_\delta\right)_C \cong \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\delta}+\sum_{k=2}^{\infty}\nu^1_k\frac{1}{\delta^k}\right),\quad \delta\to\infty, \tag{1}$$

$$\mathcal{E}\left(W^r_\infty; B_\delta\right)_C \cong \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-r}{r!}\frac{1}{\delta^r}\ln\delta+\sum_{k=2}^{\infty}\nu^r_k\frac{1}{\delta^k}\right),\ r=2l+1,\ l\in\mathbb{N},\delta\to\infty,$$

(визначення коефіцієнтів ν^r_k див. в [1]).

Аналогічна теорема має місце у випадку парного r.

1. Харкевич Ю. І., Кальчук І. В. Повні асимптотики точних верхніх меж відхилень бігармонійних інтегралів Пуасона на класах диференційовних функцій // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання. Зб. праць Ін–ту математики НАН України. – Київ, 2005. – **2**, № 2. – С. 311-335.

Олена Карлова, Олександр Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ФУНКЦІЇ ПЕРШОГО КЛАСУ БЕРА ЗІ ЗНАЧЕННЯМИ В ПРЯМІЙ ЗОРҐЕНФРЕЯ

Символом $B_1(X,Y)$ позначатимемо сукупність усіх відображень $f : X \to Y$ першого класу Бера, тобто поточкових границь послідовностей неперервних функцій, а через $H_1(X,Y)$ – сукупність усіх відображень $f : X \to Y$ першого класу Лебеґа, тобто таких, для яких прообраз довільної відкритої множини має тип F_σ. Нагадаємо, що пряма Зорґенфрея $\mathbb{L}$ – це числова пряма з топологічною структурою, що породжена базою $\{[x,y) : x < y\}$. Добре відомо, що простір $\mathbb{L}$ неметризовний.

Згідно з класичною теоремою Лебеґа-Гаусдорфа [1, с. 402] рівність $H_1(X,Y) = B_1(X,Y)$ виконується, коли X – метричний простір, а $Y = \mathbb{R}$. Ця теорема узагальнювалась багатьма математиками: С. Ролевичем, Р. Ганселлом, К. Роджерсом, М. Фосґерау, Л. Веселим та іншими. Слід зазначити, що у їхніх результатах простір значень Y є метризовним. Тому природно виникає питання, чи залишається твердження теореми Лебеґа-Гаусдорфа правильним для відображень, які набувають значень у неметризовних просторах. Зауважимо, що включення $B_1(X,Y) \subseteq H_1(X,Y)$ правильне для довільного досконало нормального простору Y. Наступний приклад показує, що обернене включення, взагалі кажучи, неправильне.

Приклад. *Нехай $f(x) = x$, якщо $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $f(x) = x - \frac{1}{n}$, якщо $x = r_n$, де $\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ – деяка перенумерація множини раціональних чисел. Тоді $f \in H_1(\mathbb{L},\mathbb{L}) \setminus B_1(\mathbb{L},\mathbb{L})$.*

Проте для деяких спеціальних функцій першого класу Лебеґа вдається встановити їх належність до першого класу Бера.

Теорема 1. *Нехай X – сильно нульвимірний простір, $f : X \to \mathbb{R}$ – функція з замкненою і сильно дискретною множиною точок розриву. Тоді $f \in B_1(X,\mathbb{L})$.*

Теорема 2. *Нехай X – сильно нульвимірний простір, $f : X \to \mathbb{R}$ – напівнеперервна зверху функція. Тоді $f \in B_1(X,\mathbb{L})$.*

1. Куратовский К. Топология. Т. 1. – М.: Мир, 1966. – 594с.

Олена Карпова, Наталія Парфінович

Дніпропетровський національний університет
nparfinovich@mail.ru

ПРО НАЙКРАЩІ ВІДНОСНІ НЕСИМЕТРИЧНІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ СПЛАЙНАМИ

Нехай L_p $(1 \le p \le \infty)$ – простори 2π-періодичних функцій $f{:}R \to R$ з відповідними нормами $\|\cdot\|_p$. Якщо $f \in L_p$ і α, β – додатні числа, то покладемо $\|f\|_{p;\alpha,\beta} = \|\alpha f_+ + \beta f_-\|_p$, де $f_\pm(t) = \max\{\pm f(t), 0\}$.

Якщо $M \subset L_p$ – деякий клас функцій, то величина

$$E(M,H)_{p;\alpha,\beta} = \sup_{f\in M} \inf_{h\in H} \|f-h\|_{p;\alpha,\beta}$$

називається найкращим (α,β)- наближенням класу M множиною H в метриці простору L_p.

Позначимо через W_p^r $(r \in N)$ клас функцій $f \in L_p$, які мають локально абсолютно неперервну похідну $f^{(r-1)}$ $(f^{(r-1)} \in AC_{loc})$ і таких, що $\|f^{(r)}\|_p \le 1$, а через W_V^r – клас функцій $f \in L_p$ таких, що $f^{(r-1)} \in AC_{loc}$ і $\bigvee\limits_0^{2\pi}[f^{(r)}] \le 1$. Нехай також $S_{2n,r}$ – множина 2π- періодичних поліноміальних сплайнів порядку r, дефекту 1 з вузлами в точках $\dfrac{k\pi}{n}$ $(k \in Z)$.

Отримано точну асимптотичну рівність при $n \to \infty$ для величин $E(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap (1+\varepsilon_n)W_V^{r-1})_{1;\alpha,\beta}$ у випадку $\varepsilon_n n^2 \to \infty$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, а саме, має місце

Теорема. *Нехай $r = 4, 6, ...$, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^\infty$ – незростаюча послідовність додатних чисел така, що $\varepsilon_n n^2 \to \infty$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тоді при $n \to \infty$*

$$E(W_1^r, S_{2n,r-1} \cap (1+\varepsilon_n)W_V^{r-1})_{1;\alpha,\beta} = \frac{C}{n^r \varepsilon_n^{r/2-1}}(1+o(1)),$$

де $C = C(\alpha,\beta,r)$ – додатна константа.

Відзначимо, що у випадку $\alpha = \beta = 1$ цей результат був отриманий раніше В.Ф. Бабенком і Н.В. Парфінович.

Валерія Касьянова

Одеський державний аграрний університет
emden@farlep.net

ПРО АСИМПТОТИКУ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглядається диференціальне рівняння вигляду

$$y'' = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k p_k(t)[1 + r_k(t)]\varphi_k(y), \tag{1}$$

де $\alpha_k \in \{-1; 1\}$ $(k = \overline{1,m})$, $p_k : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(k = \overline{1,m})$ – неперервно диференційовні функції, $-\infty < a < \omega \leq +\infty$, $r_k : [a, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(k = \overline{1,m})$ – неперервні функції такі, що

$$\lim_{t \uparrow \omega} r_k(t) = 0, \quad k = \overline{1,m},$$

φ_k $:]0, y_0] \longrightarrow]0, +\infty[$ $(k = \overline{1,m};\ 0 < y_0 < +\infty)$ – двічі неперервно диференційовні функції.

Розв'язок $y : [t_0, \omega[\longrightarrow]0, y_0]$ $(t_0 \in [a, \omega[)$ рівняння (1) називається $\Pi^0_\omega(\mu_0)$- розв'язком, де $-\infty \leq \mu_0 \leq +\infty$, якщо він задовольняє умови

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = 0, \quad y'(t) < 0 \quad \text{при} \quad t \in [t_0, \omega[, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = \begin{cases} \text{або} & 0, \\ \text{або} & +\infty, \end{cases}$$

$$\lim_{t \uparrow \omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y'(t)} = \mu_0, \quad \text{причому} \ \lim_{t \uparrow \omega} \frac{y''(t) y(t)}{[y'(t)]^2} = 1, \ \text{якщо} \quad \mu_0 = \pm\infty.$$

За деяких додаткових обмежень на функції φ_k $(k = 1, \ldots, m)$ одержано необхідні та достатні умови існування для диференціального рівняння (1) всіх можливих типів $\Pi^0_\omega(\mu_0)$-розв'язків і отримано для них асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$.

Асимптотика необмежених розв'язків рівняння (1) досліджена в роботі [1].

1. Евтухов В.М., Касьянова В.А. Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. – 2005. – **5**, №3. – С. 338-355.

Володимир Кирилич

Львівський національний університет імені Івана Франка
kyrylych@franko.lviv.ua

НЕПЕРЕРВНІ РОЗВ'ЯЗКИ ГІПЕРБОЛІЧНИХ ЗАДАЧ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ ДАНИХ З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ

Нехай G – криволінійний сектор у верхній півплощині $t > 0$ площини $x0t$, обмежений кривими γ_0 і γ_{m+1}, заданими відповідно рівняннями $x = a_0(t)$ і $x = a_{m+1}(t)$, $m \geq 0$, $a_0(0) = a_{m+1}(0) = 0$, $a_0(t) < a_{m+1}(t)$ для всіх $t > 0$. Криві $\gamma_s : \ x = a_s(t)$, $s = \overline{0, m+1}$, $a_s \in C^1(\mathbb{R}_+)$, $a_s(t) < a_{s+1}(t)$ для всіх $t > 0$, $a_s(0) = 0$ розділяють G на $m+1$ компоненту зв'язності G^s, $s = \overline{0, m}$, занумеровані зліва направо.

В $G \setminus \cup\gamma_s$ для гіперболічної системи

$$\frac{\partial u_i^s}{\partial t} + \lambda_i^s(x,t)\frac{\partial u_i^s}{\partial x} = \Phi_i^s(x,t,u^s), \quad i = \overline{1,n}, \ \ s = \overline{0,m},$$

(в припущенні, що деякі характеристики системи, проведені через $(0,0)$, можуть попадати в $G \setminus \cup\gamma_s$) задаються умови, які замінюють граничні умови на γ_0 і γ_{m+1} та умови спряження на $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=0}^{m}\left(\sum_{k=s}^{s+1}\alpha_{is}^{kp}(t)u_i^s(a_k(t),t) + \int\limits_{a_s(t)}^{a_{s+1}(t)} \beta_{is}^{p}(y,t)u_i^s(y,t)dy\right) = h^p(t),$$

$$p = \overline{1,N}, \ \ N = \sum_{s=0}^{m}(p_s - q_s) + (m+1)n.$$

За допомогою методу характеристик доведено теорему про локальну розв'язність та деякі достатні умови глобальної розв'язності поставленої задачі. Як і в роботі [1], доведено неперервність розв'язку для всіх $t > 0$ і у випадку, коли $a_s(t)$, $s = \overline{0, m+1}$ є апріорі невідомими і задовольняють деяким додатковим умовам.

1. Андрусяк Р.В., Кирилич В.М., Мышкис А.Д. Локальная и глобальная разрешимость квазилинейной гиперболической задачи Стефана на прямой // Дифференц. уравнения. – 2006. – **42**, № 4. – С. 489-503.

Людмила Кирилова

Одеський державний економічний університет
kirilloval@bk.ru

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ НЕАВТОНОМНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ, ЯКІ АСИМПТОТИЧНО БЛИЗЬКІ ДО РІВНЯНЬ ТИПУ ЕМДЕНА-ФАУЛЕРА

Розглядається диференціальне рівняння виду

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi(y), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $p : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(-\infty < a < \omega \leq +\infty)$ – неперервна функція, $\varphi : \Delta_Y \longrightarrow]0, +\infty[$ – двічі неперервно диференційовна функція, що задовольняє умови

$$\lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \varphi(y) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } +\infty, \end{cases} \qquad \lim_{\substack{y \to Y \\ y \in \Delta_Y}} \frac{y\varphi''(y)}{\varphi'(y)} = \sigma,$$

Δ_Y – односторонній окіл Y, Y дорівнює 0 або $\pm\infty$.

Розв'язок $y : [t_y, \omega[\to \Delta_Y$ рівняння (1), $[t_y, \omega[\subset [a, \omega[$, називається $P_\omega(\lambda_0, Y)$- розв'язком, якщо він задовольняє такі умови:

$$\lim_{t \uparrow \omega} y(t) = Y, \quad \lim_{t \uparrow \omega} y'(t) = \begin{cases} \text{либо } 0, \\ \text{либо } \pm\infty, \end{cases} \qquad \lim_{t \uparrow \omega} \frac{(y'(t))^2}{y''(t)y(t)} = \lambda_0.$$

Встановлено необхідні і достатні умови існування, а також асимптотичні зображення при $t \uparrow \omega$ для всіх можливих типів $P_\omega(\lambda_0, Y)$-розв'язків і їх похідних першого порядку.

1. Кирилова Л.О. Асимптотичні властивості розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, які близькі до рівнянь типу Емдена-Фаулера // Науковий вісник Чернівецького університету. – 2004. – Вип. 228. – С. 30-35.
2. Евтухов В.М., Кириллова Л.А. Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, №8. – С. 1053-1061.

Віктор Кириченко, Олександр Ковальов

Інститут прикладної математики і механіки НАН України
vkirichenko@iamm.ac.donetsk.ua

ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ГІРОСКОПА ГЕССА ЗА ДОПОМОГОЮ ПЕРЕРІЗУ ПУАНКАРЕ

Розв'язок Гесса [1] володіє унікальними аналітичними та якісними властивостями і тому займає надзвичайно важливе місце в сучасній динаміці твердого тіла.

У даній роботі проведено аналітичні дослідження, а також комп'ютерні експерименти, що грунтуються на чисельному вивченні двовимірних відображень Пуанкаре.

Для динамічної системи, яка описує рух гіроскопа Гесса, запропоновано і вивчено спеціальний вид перерізу Пуанкаре. За допомогою зазначенного перерізу побудовано і вивчено фазовий портрет руху гіроскопа Гесса. Проведено дослідження переходу до хаосу в залежності від змінювання параметрів системи. Основними із параметрів, що варіюються, є компоненти гіраційного тензора і значення інтегралів енергії і площини. Побудовано фазові портрети для локсодромічного маятника Гесса і для випадку існування особливих точок системи на інваріантному співвідношенні Гесса.

Розглянуто розв'язки незбуреної системи в нових канонічних змінних [2], проаналізовано рух фізичного маятника, який є частковим випадком руху гіроскопа Гесса.

Аналітично обчислено інтеграл Мельникова вздовж незбуреної орбіти, що поєднує стійкий і нестійкий граничні цикли. Вивчено і описано механізм виникнення хаотичних рухів в околі розв'язку Гесса.

1. Hess W. Uber die Eulerschen Bewegungsgleichungen und uber eine partikulare Losung der Bewegung eines Korpers um einen festen Punkt // Math. Ann. – 1890. – **37**, H.2. – S. 153-181.
2. Ковалев А.М., Гашененко И.Н., Кириченко В.В. О хаотических движениях и расщеплении сепаратрис возмущенного движения Гесса // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 19-30.

Іван Кирчей

ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України
kyrchei@lms.lviv.ua

ПРАВИЛО КРАМЕРА ДЛЯ СИСТЕМИ УЗАГАЛЬНЕНИХ НОРМАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нехай $I_{k,n} := \{\, \alpha : \alpha = (\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k \,),\;\; 1 \leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_k \leq n \,\}$, та $I_{k,\,n}\{i\} := \{\, \alpha : \alpha \in I_{k,n}, i \in \alpha\}$, тоді $\left|\mathbf{A}_{\beta}^{\alpha}\right|$ – мінор матриці $\mathbf{A}$ з рядками та стовпцями, що індексується множинами α і β. Відомі наступні факти:

• Якщо $\mathbf{A} = \mathbf{P}\begin{pmatrix} \mathbf{J_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J_0} \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}$ – є жордановим зображенням матриці $\mathbf{A}$, де $\mathbf{J_0}$ - складається з нільпотентних блоків, а $\mathbf{J_1}$ – із неособливих, то $\mathbf{A}^D = \mathbf{P}\begin{pmatrix} \mathbf{J_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{P}^{-1}$ [1].

• Нехай $\mathbf{A} \in C^{n\times n}$ з $Ind\mathbf{A} = k$, тоді $\mathbf{A}^D\mathbf{f}$ є єдиним розв'язком системи узагальнених нормальних рівнянь $\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{x} = \mathbf{A}^k\mathbf{f}$ та єдиним мінімальним по $\mathbf{P}$-нормі нормальним розв'язком системи $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$, де $\mathbf{A} \in C^{n\times n}$, $\mathbf{f} \in C^n$- вектор-стовпець вільних елементів. $\mathbf{P}$-норма означається як $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{P}} = \left\|\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}\right\|$ [2].

Теорема 1. *Мінімальний по* $\mathbf{P}$ *-нормі нормальний розв'язок системи* $\mathbf{Ax} = \mathbf{f}$ *з матрицею коефіцієнтів* $\mathbf{A} \in C^{n\times n}$ *такою, що* $Ind\mathbf{A} = k$ та $rank\mathbf{A}^k = rank\mathbf{A}^{k+1} = r < n$, *покомпонентно зображається наступним чином*

$$x_i = \frac{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}\{i\}} \left|\left(\mathbf{A}_{.i}^{k+1}\left(\mathbf{g}\right)\right)_{\alpha}^{\alpha}\right|}{\sum\limits_{\alpha\in I_{r,n}} \left|\left(\mathbf{A}^{k+1}\right)_{\alpha}^{\alpha}\right|} \quad \forall i = \overline{1,n},$$

де $\mathbf{g} = \mathbf{A}^k\mathbf{f}$.

1. Ю.Е. Боярынцев. Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных линейных уравнений. – Новосибирск: Наука, 1988 – 155 с.
2. Y.M. Wei, H.B. Wu. Additional results on index splittings for Drazin inverse solutions of singular linear systems // The Electronic Journal of Linear Algebra. – 2001. – **8**. – P. 83-93.

Юрій Кишакевич

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
kylpr@drohobych.net

ДЕЯКІ ЗБУРЕННЯ УЗАГАЛЬНЕНИХ СПЕКТРАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ РІЗНИЦЕВИХ ОПЕРАТОРІВ ДРУГОГО ПОРЯДКУ НА ПІВОСІ

Нехай R узагальнена спектральна функція задачі Коші

$$\omega_{n+1}+\omega_{n-1}+b_n\omega_n=x\omega_n; \quad n=0,1,2... , \tag{1}$$

$$\omega_{-1}=0; \quad \omega_0=1,$$

де $b_n \in C$ $(n=0,1,2,...)$, тобто поліноми $\omega_n(x)$ $(n=0,1,2,...)$ ортонормальні відносно деякого адитивного і однорідного функціоналу R, заданого на лінійному просторі поліномів з комплексними коефіцієнтами:

$$\langle R|\omega_n\omega_k\rangle=\delta_{nk}; \quad n,\ k=0,1,2...$$

У роботі вивчаються умови, за яких збурення R за допомогою множення на довільний поліном, алгебричні дроби певного вигляду та додавання лінійної комбінації δ - функцій та функціоналів типу $(x-a)^{-k}\delta(x-a)$ $(k=1,2,...)$ є знову узагальненою спектральною функцією задачі Коші деякого різницевого оператора другого порядку на півосі. Якщо ці умови виконуються, то встановлюються формули, які виражають зв'язок ортонормальних поліномів відносно збурення R з поліномами $\omega_n(x)$ $(n=0,1,2,...)$, та формули, які виражають коефіцієнти збуреного різницевого оператора через коефіцієнти різницевого рівняння (1).

У монографії Г.Сеге формулами Кристофеля названо формули, які пов'язують поліноми, ортогональні на деякому відрізку відносно мір $d\sigma(x)$ і $\rho(x)d\sigma(x)$, де поліном $\rho(x)$ невід'ємний на цьому відрізку. В.Уваров дослідив зв'язок між поліномами, ортогональними відносно різних мір. Однак, збурення R за допомогою множення на алгебричний дріб або додавання лінійної комбінацій δ - функцій та функціоналів типу $(x-a)^{-k}\delta(x-a)$ $(k=1,2,...)$, які вивчаються у цій роботі, не розглядалися у самоспряженому випадку, тобто, коли R є мірою.

Григорій Кіт

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України

ЗАСТОСУВАННЯ ДВОВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ТІЛ З ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ І ТРІЩИНАМИ

Розглядаються інтегральні рівняння

$$\iint\limits_S \frac{w(\xi)}{\mid x-\xi \mid} d_\xi S = f(x), \iint\limits_S \frac{\alpha(\xi)}{\mid x-\xi \mid^3} d_\xi S - H(x)\alpha(x) = \varphi(x), x \in S, \quad (1)$$

де S – плоска однозв'язна область, обмежена гладким контуром $L(x)$, $\mid x-\xi \mid = \left[(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2\right]^{1/2}$ – віддаль між точками $x\,(x_1, x_2)$ і $\xi\,(\xi_1, \xi_2)$.

Перше рівняння (1) використовується при розв'язуванні задач стаціонарної теплопровідності або електростатики для безмежного тіла з теплоактивним або зарядженим тонким включенням, при цьому функція $w(\xi)$ описує густину теплових джерел або електричних зарядів, а $f(x)$ – температуру або електричний потенціал на включенні. Друге рівняння відповідає задачам теплопровідності або електростатики для тіла з теплопроникним або електропроникним тонким включенням (при $H = 0$ – включення термоізольоване або електроізольоване). Це рівняння має місце також при визначенні напруженого стану тіла з тонким м'яким включенням (при $H = 0$ – тріщина), причому $\alpha(x)$ – розкриття тріщини, а $\varphi(x)$ – задані зусилля.

Перше рівняння має необмежений розв'язок при довільній правій частині, а друге – обмежений. Коли область S – еліпс, а праві частини рівнянь (1) – поліноми степеня n по x_1 і x_2, то їх розв'язки записуються відповідно у вигляді

$$w(x) = \psi(x)/L(x), \alpha(x) = \omega(x)L(x), \quad (2)$$

де $L(x)$ – рівняння еліпса, а $\psi(x)$ і $\omega(x)$ – поліноми степеня n, коефіцієнти яких визначаються із системи алгебричних рівнянь.

Розглянуто ряд прикладів, коли праві частини рівнянь є поліноми третього степеня. Встановлено, при яких значеннях їх коефіцієнтів існують обмежені розв'язки першого рівняння (1) і з'ясовано, як вони впливають на розподіл температури та напружень.

Степан Кічура, Жаннета Цаповська

Львівський національний університет імені Івана Франка

РОЗВ'ЯЗАННЯ В ПРОСТОРІ ГЕЛЬДЕРА ОДНІЄЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З УМОВОЮ СПРЯЖЕННЯ ТИПУ ВЕНТЦЕЛЯ

Нехай D – обмежена область в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, з гладкою межею S, $\Gamma \in D$ – гладка замкнена поверхня, яка розділяє D на дві області D_1 і D_2 так, що $\partial D_1 = \Gamma$, $\partial D_2 = S \bigcup \Gamma$, і $\Gamma \bigcap S = \emptyset$. Покладемо $\Omega_T^{(m)} = D_m \times (0,T)$, $m = 1,2$, $S_T = S \times (0,T)$, $\Gamma_T = \Gamma \times (0,T)$, $\Omega_T = D \times (0,T)$. Розглянемо параболічну задачу спряження: знайти функцію $u(x,t) = u_m(x,t)$, $(x,t) \in \Omega_T^{(m)}$, яка задовольняє умови

$$L_m u_m(x,t) = f_m(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega_T^{(m)}, \qquad m = 1,2, \tag{1}$$

$$u_m(x,0) = \varphi_m(x), \qquad x \in D_m, \qquad m = 1,2, \tag{2}$$

$$L_1' u(x,t) \equiv u_1(x,t) - u_2(x,t) = \Phi(x,t), \qquad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{3}$$

$$L_2' u(x,t) \equiv \sum_{m=1}^{2} \mathbf{L}_m u_m(x,t) = \Theta(x,t), \qquad (x,t) \in \Gamma_T, \tag{4}$$

$$L u_2(x,t) = \psi(x,t), \qquad (x,t) \in S_T, \tag{5}$$

де L_1 і L_2 – загальні лінійні рівномірно параболічні оператори другого порядку з гельдеровими коефіцієнтами в $\Omega_T^{(1)}$ і $\Omega_T^{(2)}$, $\mathbf{L}_1$ – загальний крайовий рівномірно параболічний оператор типу Вентцеля [1] з гельдеровими коефіцієнтами на Γ_T, L_2 і L – лінійні диференціальні оператори першого порядку за просторовими змінними з гельдеровими коефіцієнтами на Γ_T і S_T відповідно.

Якщо виконані відзначені припущення, а також деякі умови щодо гладкості правих частин з рівностей (1)–(5) та відповідні умови узгодження, то доведено теорему про однозначну розв'язність задачі у гельдеровому просторі функцій. Для доведення теореми використано методи теплових та параболічних потенціалів.

1. Апушкинская Д.Е., Назаров Н.И. Начально-краевая задача с граничным условием Вентцеля для недивергентных параболических уравнений // Алгебра и анализ. – 1994. – **6**, № 6. – С. 1-29.

Іван Клевчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ У КРИТИЧНОМУ ВИПАДКУ

Розглядається система різницевих рівнянь

$$y_{n+1} = B_n y_n + f_n(y_n, z_n), \quad z_{n+1} = C_n z_n + g_n(y_n, z_n), \tag{1}$$

де $n \in \mathbb{Z}$, $y_n \in \mathbb{R}^\nu$, $z_n \in \mathbb{R}^{m-\nu}$, всі власні значення $\lambda_i^{(n)}$ матриць B_n лежать на одиничному колі ($|\lambda_i^{(n)}| = 1, 1 \le i \le \nu$), всі власні значення $\lambda_i^{(n)}$ матриць C_n лежать всередині одиничного кола ($|\lambda_i^{(n)}| < \alpha < 1$, $\nu + 1 \le i \le m$), функції f_n та g_n задовольняють умови

$$f_n(0,0) = g_n(0,0) = 0, \quad \|f_n(\overline{y}, \overline{z}) - f_n(\overline{\overline{y}}, \overline{\overline{z}})\| \le L(\|\overline{y} - \overline{\overline{y}}\| + \|\overline{z} - \overline{\overline{z}})\|,$$

$$\|g_n(\overline{y}, \overline{z}) - g_n(\overline{\overline{y}}, \overline{\overline{z}})\| \le L(\|\overline{y} - \overline{\overline{y}}\| + \|\overline{z} - \overline{\overline{z}})\|.$$

Тоді при досить малій сталій Ліпшиця L існує послідовність поверхонь $z = h_n(y)$, $y \in \mathbb{R}^\nu$, $z \in \mathbb{R}^{m-\nu}$, які задовольняють умови $h_n(0) = 0$, $\|h_n(\overline{y}) - h_n(\overline{\overline{y}})\| \le \frac{1}{2}\|\overline{y} - \overline{\overline{y}}\|$, і розв'язок системи (1) з початковими даними y_{n_0}, z_{n_0}, n_0, які задовольняють рівняння $z = h_n(y)$, буде прямувати до нуля при $n \to \infty$. Крім того, існує послідовність поверхонь $y = H_n(z)$, які задовольняють аналогічні умови.

Нехай (y_n, z_n) – довільний розв'язок системи (1). Тоді існує розв'язок (φ_n, ψ_n), що належить інтегральній поверхні $z = h_n(y)$ і такий, що

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - \varphi_n\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|z_n - \psi_n\| = 0.$$

Система (1) на інтегральних поверхнях $z = h_n(y)$ набуде вигляду

$$y_{n+1} = B_n y_n + f_n(y_n, h_n(y_n)). \tag{2}$$

Доведено принцип зведення для системи (1).

Теорема. *Якщо нульовий розв'язок системи (2) стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий, то і нульовий розв'язок системи (1) відповідно стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий.*

Досліджена також біфуркація розв'язків системи (1). Результати можна узагальнити на випадок рівнянь у банаховому просторі.

Irina Kmit

Institute for Applied Problems of Mechanics
and Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine
kmit@informatik.hu-berlin.de

PERIODIC-DIRICHLET HYPERBOLIC PROBLEMS IN THE WHOLE SCALE OF SOBOLEV-TYPE SPACES OF PERIODIC FUNCTIONS

In the domain $\{(x,t)\,|\,0 < x < 1, -\infty < t < \infty\}$ we study a couple of dissipative semilinear first-order hyperbolic equations with small periodic forcing subjected to periodic conditions in time and reflection boundary conditions in space. The model describes the dynamical behavior of distributed feedback multisection semiconductor lasers. Right hand sides f_1 and f_2 of the differential equations are assumed to be T-periodic in t and discontinuous in x. Our goal is to obtain a local existence and uniqueness result in a neighborhood of a stationary state for the problem under consideration. A natural way to achieve this consists in application of the Implicit Function Theorem. For this purpose we would need to have, first, the isomorphism property of the operator, say F, of a linearized problem, second, the C^1-smoothness property of the Nemitsky composition operators defined by the nonlinearities f_i. In [1] we constructed two scales of Banach spaces V^γ (for solutions) and W^γ (for right hand sides) with $\gamma \geq 1$ and showed that F is Fredholm from V^γ onto W^γ. Here [2] we derive a priori estimates and give an operator representation of solutions to a linearized problem in the whole scale of Sobolev-type spaces of periodic functions. Since any Fredholm operator is an isomorphism between two Banach spaces if it is injective, we therefore have the desired isomorphism property for F.

1. I.Kmit, L.Recke. Fredholm Alternative for periodic-Dirichlet problems for linear hyperbolic systems // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2007. – 20 pages, `doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.01.055` (in press).
2. I.Kmit. Linear hyperbolic problems in the whole scale of Sobolev-type spaces of periodic functions (submitted). Available at `http://arxiv.org/abs/math.AP/0702072`

Тарас Кобильник, Людмила Остапчук

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
informatyka@drohobych.net

УДОСКОНАЛЕННЯ МОДИФІКОВАНОГО МЕДОДУ LU-ФАКТОРИЗАЦІЇ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ВИЗНАЧНИКІВ ДІАГОНАЛЬНИХ МАТРИЦЬ

У роботі [1] був запропонований підхід для обчислення визначників діагональних матриць, у яких кількість ненульових під- та наддіагоналей одинакова. Розглянемо випадок, коли кількість ненульових піддіагоналей (p) та наддіагоналей (b) є різною.

З діагональних матриць A, L та U сформуємо прямокутні матриці $Q_{n\times(p+b+1)}$ та $R_{n\times(p+b+1)}$ наступним чином:

$$q_{i,\,p+j-i+1} = a_{ij}, \quad r_{i,\,p+j-i+1} = piecewise(l_{ij}, i \geq j, u_{ij}), \quad i = \overline{1,\ n},$$

$j = \overline{\max\{1, i-p\}, \min\{i+b, n\}}$. Інші елементи q_{ij} та r_{ij} дорівнюють нулю.

Тоді для обчислення визначника використовуються наступні формули:

$$r_{ij} = q_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} r_{ik} r_{i-p+(k-1), j+p-(k-1)}, \quad i = \overline{1,\, n}, \quad j = \overline{1,\, p+1},$$

$$r_{ij} = (q_{ij} - \sum_{k=j-b}^{p} r_{ik} r_{i-p+k-1, j+p-k+1})/r_{i,p+1},\ k > 0,$$

$$i-p+k-1 \geq 1, \quad j+p-k+1 \leq b+p+1,\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{p+2, p+b+1}.$$

Тоді $\det A = \prod_{i=1}^{n} r_{i,p+1}$.

Створена команда у системі комп'ютерної математики Maxima для реалізації запропоновоного алгоритму.

1. Кобильник Т., Лазурчак І., Остапчук Л. Модифікація методу *LU*-факторизації для обчислення визначників розріджених матриць // Тези доповідей Міжнародної математичної конференції ім. В.Я. Скоробогатька. – Львів: 2004. – С. 99.

Элла Ковалевская, Инна Морозова

Белорусский государственный аграрный технический университет
ekovalevsk@mail.ru, INNA.MOROZOVA@tut.by

МАЛЫЕ ЗНАМЕНАТЕЛИ, ПОРОЖДЕННЫЕ МНОГОЧЛЕНАМИ МАЛОЙ СТЕПЕНИ, И РАЗМЕРНОСТЬ ХАУСДОРФА В КОЛЬЦЕ АДЕЛЕЙ

Известно, что размерность Хаусдорфа дает дополнительную информацию о множестве нулевой меры Лебега (или Хаара). Именно, с ее помощью можно точнее описать размер множества и его сложность. Такие результаты метрической теории чисел находят свое применение в так называемой проблеме малых знаменателей [1].

Пусть $P_3 = P_3(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0 \in \mathbb{Z}[t]$, $a_3 \neq 0$, $H = \max(|a_3|, |a_2|, |a_1|, |a_0|)$. Пусть $p \geq 2$ — простое число, $\mathbb{Q}_p$ — поле p-адических чисел, $|\cdot|_p$ — p-адическая норма. Положим $\mathcal{O} = \mathbb{R}\times\mathbb{C}\times\mathbb{Q}_p$. Определим меру $\overline{\mu}$ в $\mathcal{O}$ как произведение мер Лебега μ и $\mu^{'}$ соответственно в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ и меры Хаара μ_1 в $\mathbb{Q}_p$, т. е., $\overline{\mu} = \mu\mu^{'}\mu_1$. Рассмотрим систему неравенств $|P_3(x)| < H^{-\nu}$, $|P_3(z)| < H^{-\nu}$, $|P_3(\omega)|_p < H^{-\nu}$, где $(x, z, \omega) \in \mathcal{O}$ и $\nu > 1/4$. Пусть M_3 — множество точек $(x, z, \omega) \in \mathcal{O}$, для которых эта система имеет бесконечно много решений в многочленах P_3. Ранее авторы доказали, что $\overline{\mu}\ M_3 = 0$. Теперь мы доказываем, что размерность Хаусдорфа множества M_3 равна $5/(\nu + 1)$.

Работа выполнена в рамках ГПФИ Беларуси "Математические модели".

1. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

Володимир Ковдриш

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ШИРИНА ЧЛЕНІВ НИЖНЬОГО ЦЕНТРАЛЬНОГО РЯДУ ГРУПИ $UT_\infty(\mathbb{K})$

Нехай $\mathbb{K}$ — довільне комутативне числове кільце з одиницею, $UT_\infty(\mathbb{K})$ — група верхніх унітрикутних матриць нескінченного порядку над кільцем $\mathbb{K}$, $UT_\infty^m(\mathbb{K})$ — підгрупа матриць з $UT_\infty(\mathbb{K})$, в якої над головною діагоналлю знаходиться m нульових діагоналей, $m \geq 1$, $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ — комутатор довільних двох матриць. Символом $e_{ij} (i, j = 1, 2, ...)$ позначатимемо матричну одиницю, тобто квадратну матрицю нескінченного порядку, у якої на перетині i-го рядка і j-го стовпця знаходиться одиниця, а решта елементів є нулями, символом e — одиничну матрицю нескінченного порядку.

Шириною [1, §12] вербальної підгрупи wG, породженої словом w називається таке найменше число k, що будь-який елемент з wG записується у вигляді добутку не більше ніж k значень слів $w^{\pm 1}$, якщо такого k не існує, то вважають, що wG має нескінченну ширину.

Нехай $a = e + \sum\limits_{j-i=m+1} e_{ij}$. Зрозуміло, що матриця a належить до підгрупи $UT_\infty^m(\mathbf{K})$. Справедливе таке твердження.

Теорема 1. *Для довільної матриці $b \in UT_\infty^{m+1}(\mathbb{K})$ рівняння*

$$[a, x] = b$$

має принаймні один розв'язок в групі $UT_\infty(\mathbb{K})$.

Нагадаємо, що *нижнім центральним рядом* групи G називається ряд спадних підгруп

$$\Gamma_1(G) \geq \Gamma_2(G) \geq ...,$$

визначених умовами $\Gamma_1(G) = G$, $\Gamma_{n+1} = [\Gamma_n(G), G]$, де $[A, B]$ — взаємний комутант підгруп A та B.

Теорема 2. *Довільний член нижнього центрального ряду групи $UT_\infty(\mathbb{K})$ має ширину 1.*

1. Мерзляков Ю.И. Рациональные группы. – М.: Наука, 1987. – 253 с.

Ігор Когут, Зіновій Нитребич

Національний університет „Львівська політехніка“
ikohutua@yahoo.com

ПРО ЯДРО ЗАДАЧІ З НЕЛОКАЛЬНОЮ КРАЙОВОЮ УМОВОЮ ДЛЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

У класі квазіполіномів вивчається питання побудови нетривіальних розв'язків задачі

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)U(t,x)\equiv\left[E_n\frac{\partial}{\partial t}-A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]U(t,x)=0,\quad (t,x)\in(0,h)\times\mathbb{R}^s,$$
$$U(0,x)+\mu U(h,x)=0,$$

де $A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)=\left\|a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\|_{i,j=\overline{1,n}}$, $a_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – довільний диференціальний вираз зі сталими коефіцієнтами, символом якого є ціла аналітична функція, $\mu\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $U(t,x)=(U_1(t,x),U_2(t,x),\ldots,U_n(t,x))^\tau$, $n,s\in\mathbb{N}$, τ – символ транспонування, E_n – одинична матриця порядку n.

Ці розв'язки побудовано у вигляді скінченної кількості дій за параметрами $\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_s$ диференціальних поліномів з векторними коефіцієнтами на матрицю $\exp[\nu\cdot x]B(t,\nu)$ з покладанням після дії $\nu=(\nu_1,\nu_2,...,\nu_s)=\alpha_j$, де α_j – нулі функції $\Delta(\nu)=\det\left(E_n+\mu B(h,\nu)\right)$, у якій $B(t,\nu)=\widetilde{L}^\tau\left(\frac{d}{dt},\nu\right)\Big[W(t,\nu)E_n\Big]$, $W(t,\nu)$ – розв'язок задачі Коші

$$\psi\left(\frac{d}{dt},\nu\right)W(t,\nu)=0,\qquad \frac{d^kW}{dt^k}(0,\nu)=\delta_{k,m-1},\quad k=\overline{0,m-1},$$

$\psi(\lambda,\nu)$ – мінімальний поліном матриці $A(\nu)$, $m=\deg\psi(\lambda,\cdot)$, $\widetilde{L}(\lambda,\nu)$ – приєднана матриця для матриці $L(\lambda,\nu)$.

1. Каленюк П.І., Нитребич З.М. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод. – Львів: Вид-во НУ "Львівська політехніка", 2002. – 292 с.

Peter Kogut

Dnipropetrovsk National University
p.kogut@i.ua

HOMOGENIZATION OF DIRICHLET OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH EXACT PARTIAL CONTROLLABILITY CONSTRAINTS

This lecture deals with the homogenization of optimal control problems with partial exact controllability constraints. More precisely, the main control object is a Dirichlet boundary value problem for the linear Laplacian with bounded controls in the space of Radon measures $\mathcal{M}(\Omega)$. We suppose that for every ε, where ε takes its values in a sequence of positive numbers tending to zero, there are some closed "holes"$T_i^\varepsilon, 1 \leq i \leq n(\varepsilon)$, such that on the sub-domain $S_\varepsilon = \cup T_i^\varepsilon$ the state is supposed to exactly match a certain profile Ψ_ε^i on each T_i^ε. We do not make any assumption on the holes other than meas $T_i^\varepsilon > 0 \,\forall \varepsilon > 0$. The problem is to describe the asymptotic behavior of the parametrized optimal control problem as ε tends to zero.

We would like to emphasize that in contrast to the existing approaches we do not just look for a limit of optimal control functions and for a limit of minimal values of the cost functionals. Rather, we stay with the optimal control problem in the original sense and look for a homogenized problem as some variational limit of the original one. This limiting problem should be unique (as a result of some passage to the limit), and should preserve the well known variational properties such as the convergence of both optimal solutions and minimal values of a cost function and, of course, should finally have a clearly defined structure including the limit form of a state equation, control and state constraints, and a limit cost functional. Our approach, the so-called "direct approach"of calculus of variations, is based on the concept of variational convergence of constrained minimization problems and its variational properties.

Александр Козин, Ольга Папковская, Диого Камара

Международний гуманитарний университет
Национальный политехнический университет
Государственный университет г. Конакри, Гвинейская республика

К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ИЗГИБА ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С КРИВОЛИНЕЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Обобщенный метод интегральных преобразований [1] позволяет эффективно решать задачи прикладной теории упругости с помощью ЭВМ при наличии разрывов в структуре упругих тел (наличие трещин, инородных включений и др.). Одним из узловых моментов этого метода является построение разрывных решений для основных физических величин упругих тел. Рассматривается статический изгиб прямоугольной $0 < x < a,\ 0 < x < b$ ортотропной пластины, у которой главные направления упругости параллельны направлениям сторон, и внутри которой на криволинейном отрезке $L : y = f(x)$, $(c_1 < x < c_2,\ c_3 < y < c_4)$ расположен тонкостенный дефект общей природы. Предполагается существование и единственность не только самой функции $f(x)$, но и обратной к ней функции: $x = f^{-1}(y)$. В рамках математической модели изгиба пластины Кирхгофа, которая здесь применяется, понятие тонкостенного дефекта общей природы в пластине выражается в том, что при переходе через указанный отрезок терпят скачки все основные физические величины: прогиб $w(x, y)$, углы поворота $\theta_x(x, y), \theta_y(x, y)$, изгибающие моменты $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$ и обобщенные поперечные силы $V_x(x, y)$, $V_y(x, y)$. Скачки основных физических величин при переходе через дефект учитываются как по линиям, параллельным оси Oy, так и оси Ox. Методом обобщенных интегральных преобразований построено разрешающее дифференциальное уравнение изгиба ортотропной пластины с внутренним криволинейным тонкостенным дефектом общей природы. Получено также интегральное представление функции прогибов ортотропной шарнирно-опертой пластины через данные скачки.

1. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.

Олександр Козьма

Одеський державний економічний університет
kirilloval@bk.ru

АСИМПТОТИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ ОДНОГО КЛАСУ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНИХ НЕАВТОНОМНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Розглядається диференціальне рівняння

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(t)[1 + r_i(t)]\varphi_{i0}(y)\varphi_{i1}(y'), \tag{1}$$

де $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ $(i = 1, ..., m)$, $p_i : [a, \omega[\longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = 1, ..., m;\ -\infty < a < \omega \leq +\infty)$ – неперервно диференційовні функції, $r_i : [a, \omega[\longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, ..., m)$ – неперервні функції, які задовольняють умови $\lim\limits_{t\uparrow\omega} r_i(t) = 0$ $(i = 1, ..., m)$, $\varphi_{ik} : \Delta_k \longrightarrow]0, +\infty[$ $(i = 1, ..., m;\ k = 0, 1)$ — двічі неперервно диференційовні функції, в деякому сенсі близькі до степеневих, Δ_k — або $[y_k^0, Y_k[$, або $]Y_k, y_k^0]$, $y_k^0 \in \mathbb{R}$, Y_k дорівнює або нулю, або $\pm\infty$.

Досліджується питання про існування і асимптотику розв'язків рівняння (1), кожен з яких задовольняє умови

$$y^{(k)} : [t_0, \omega[\to \Delta_k, \quad \lim_{t\to\omega} y^{(k)}(t) = Y_k\, (k = 0, 1), \quad \lim_{t\uparrow\omega} \frac{\pi_\omega(t) y''(t)}{y(t)} = \pm\infty,$$

де $t_0 \geq a$, $\pi_\omega(t) = \begin{cases} t & \text{при } \omega = +\infty, \\ t - \omega & \text{при } \omega < +\infty. \end{cases}$

У випадку, коли $\varphi_{i1}(z) \equiv 1$ $(i = 1, ..., m)$, аналогічне питання вивчалося в [1-2].

1. Евтухов В.М., Касьянова В.А. Асимптотическое поведение неограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Укр. мат. журн. – 2005. – **5**, №3. – С.338-355.

2. Касьянова В.О. Асимптотичні зображення зникаючих розв'язків істотно нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку // Наук. Вістник Чернівецького ун-ту. – 2004. – Вип. 228, Математика – С. 5-19.

Марія Колінько

Львівський національний університет імені Івана Франка

ЗАДАЧА БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ ОДНОГО ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область, причому $\partial\Omega \in C^1$. Позначимо через $Q_T = \Omega \times (-\infty, T)$, $S_T = \partial\Omega \times (-\infty, T)$, де $-\infty < T < \infty$.

В області Q_T розглянуто рівняння вигляду

$$u_t + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha \left(a_\alpha(x,t)|D^\alpha u_t|^{p-2} D^\alpha u_t\right) +$$

$$+(-1)^l \sum_{|\alpha|=l} D^\alpha \left(b_\alpha(x,t)|D^\alpha u|^{q-2} D^\alpha u\right) + \tag{1}$$

$$+c(x,t)|u|^{r-2}u = f(x,t)$$

з крайовою умовою

$$u\Big|_{S_T} = 0, \tag{2}$$

де

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n,$$

$m + l > 2$, $p, q, r \in (1, +\infty)$.

Припускаємо, що a_α, b_α, $c \in L^\infty(Q_T)$ і майже всюди в Q_T додатні та відокремлені від нуля. Одержано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку задачі (1), (2). Зокрема, виділено випадок, коли існування та єдиність розв'язку не залежить від його поведінки при $t \to -\infty$.

Руслана Колісник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЕВОЛЮЦІЙНІ РІВНЯННЯ ВИЩОГО ПОРЯДКУ З ОПЕРАТОРОМ ДРОБОВОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

У роботі розвивається теорія задачі Коші для еволюційних рівнянь вищого порядку по t (а також рівнянь, які містять дробові похідні по часовій змінній) з оператором диференціювання нескінченного порядку у просторах узагальнених функцій типу C', введених в [1].

Розглянемо рівняння

$$D_t^{\beta} u(t,x) + (-1)^{-[\beta]+1} D_t^{-[\beta]} u(t,x) = 0, \quad t \in (0,T], \quad x \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

з початковою умовою

$$D_t^{\{\beta\}} u(t,\cdot)|_{t=0} = f, \qquad (2)$$

де f – узагальнена функція з простору типу C', $\beta \in [-3,0), [\cdot], \{\cdot\}$ – ціла та дробова частини числа, D_t^{β} – оператор дробового диференціювання, який діє по змінній t [2].

Справедлива наступна теорема.

Теорема. *Задача Коші* (1), (2) *коректно розв'язна в класі узагальнених функцій з простору типу C'. Розв'язок $u(t,\cdot)$ при кожному фіксованому t належить до простору типу C і подається у вигляді*

$$u(t,x) = \Theta(t) z(t,x) * f_{-\{\beta\}}(t),$$

де $f_{\alpha}(t) = \begin{cases} \Theta(t) t^{\alpha-1} (\Gamma(\alpha))^{-1}, & \alpha > 0, \\ f_{\alpha+m}^{(m)}(t), & \alpha \le 0, \end{cases}$ *m – найменше серед натуральних чисел таке, що $m+\alpha>0$, Θ – функція Хевісайда, $z(t,x) = (f * G)(t,x)$, G – фундаментальний розв'язок задачі Коші* (1), (2).

1. Городецький В.В., Колісник Р.С. Про одне узагальнення просторів типу W// Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. – Чернівці: Рута, 2002. – Вип.134. – С. 30–37.
2. Городецький В.В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу. – Чернівці: Рута, 1998. – 225 с.

Володимир Колодяжний

Харківський національний автомобільно-дорожній університет
kolodyazhny@univer.kharkov.ua

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ АТОМАРНИМИ РАДІАЛЬНО БАЗИСНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Інтерполяція функцій $f : \Omega \subset R^n \longrightarrow R^1$ укладається в загальну схему задачі лінійної інтерполяції, яка потребує обернення матриці. У випадку багатовимірних областей побудова добре оберненої матриці виконується, в основному, двома методами: інтерполяцією тензорними добутками та наближенням методом скінчених елементів. Нехай задана функція $f : D \longrightarrow R^1$, де $D \subset R^2$ – обмежена область з достатньо гладкою границею, $f \in F(d, R^1)$ – належить деякому функціональному простору. Область D представляється у вигляді об'єднання скінченного числа трикутників $\triangle_k \subset D$, що не мають спільних внутрішніх точок: $D' \equiv \bigcup\limits_{k=1}^{N} \subseteq D$. Побудова такого набору трикутників (триангуляція області D) в загальному випадку є не простою задачею (складність якої збільшується з ростом вимірності). Пропонується альтернативний до методу скінчених елементів підхід інтерполяції, заснований на використанні атомарних радіально базисних функцій. Атомарні функції є нескінченно диференційовними з компактним носієм розв'язками функціонально-диференціальних рівнянь спеціального вигляду. Зокрема, у випадку трьох змінних розв'язується рівняння

$$\Delta u(x, y, z) = \lambda \oint\limits_{\partial\Omega} u[3(x - \xi), 3(y - \eta), 3(z - \zeta)]ds + \mu u(3x, 3y, 3z),$$

де $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$, $\partial\Omega$ — сфера радіуса $2r/3$: $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 4r^2/9$.

1. Колодяжний В.М., Рвачов В.О. Деякі властивості атомарних функцій багатьох змінних // Доп. НАН України, – 2004. – №1.

Віктор Коломієць, Олександр Коломієць, Катерина Коломієць

Київський славістичний університет
Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України
Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна НАН України
skolomon@yahoo.com

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ КРАНКА-НІКОЛСОНА ДО НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯННЯ ФОККЕРА–ПЛАНКА–КОЛМОГОРОВА ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОЇ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ З ВИПАДКОВИМ ЗБУРЕННЯМ

Розглянемо рівняння Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК)

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial a}\left[K_a W\right] + \frac{\partial}{\partial \theta}\left[K_a W\right] = $$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2}{\partial a^2}\left[D_a W\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta}\left[D_{a\theta} W\right] + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\left[D_\theta W\right]\right\}, \tag{1}$$

що відповідає системі стохастичних диференціальних рівнянь для амплітуди і фази $\frac{da}{dt} = \varepsilon A_{11} + \sqrt{\varepsilon} A_{12}\dot{w}$, $\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon B_{11} + \sqrt{\varepsilon} B_{12}\dot{w}$, одержаних із системи стохастичних диференціально-різницевих рівнянь другого порядку асимптотичним методом Крилова–Боголюбова—Митропольського. Застосовуючи різницеві схеми, одержимо систему алгебраїчних рівнянь для щільності в вузлах сітки. На кожному кроці розв'язуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса. Розроблено програму, що реалізує алгоритм розв'язання рівняння ФПК. Розглянуто приклад дослідження випадкових коливань у нелінійній системі

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + k_1 x(t) + k_2 x\left(t - \Delta_0\right) = $$
$$= \varepsilon\left(1 - x^2(t)\right)\frac{dx(t-\tau_0)}{dt} + \sqrt{\varepsilon}\rho\frac{dx(t-\tau_0)}{dt}\xi(t,\mu), \tag{2}$$

де $\xi(t,\mu)$ — стаціонарний випадковий процес, що збігається при $\mu \to 0$ до процесу білого шуму $\dot{w}(t)$.

Проведено моделювання на комп'ютері рівняння (2) і відповідного йому нестаціонарного рівняння ФПК для щільності розподілу амплітуди випадкових коливань.

Леся Комарницька

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка

ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ КОЛИВАННЯ В'ЯЗКОЇ РІДИНИ

В області $D=[0;T]\times G$, $G\subset\mathbb{R}^3$, – тор, розглядається задача

$$(D_t-\nu\Delta)^2\Delta u+\omega^2 D^2_{x_3}u=f(t,x), \tag{1}$$

$$u(t,x)|_{t=0}=\phi_1(x),\ u(t,x)|_{t=T}=\phi_2(x), \tag{2}$$

де $\nu,\ \omega\in\mathbb{R}_+$, Δ – оператор Лапласа.

Позначимо: $\|k\|=\sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}$, $k\in\mathbb{Z}^3$, A^β_δ $(\beta>0,\ \delta>0)$ – простір 2π-періодичних функцій $v(x)=\sum\limits_{|k|\geq 0}v_k\mathrm{exp}((ik,x))$ з нормою

$$\|v(x)\|^\beta_\delta=\sum_{|k|\geq 0}|v_k|\mathrm{exp}(\delta|k|^\beta),\quad |k|=|k_1|+|k_2|+|k_3|.$$

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *в просторі* $C^{(2,6)}(D)$ *необхідно і досить, щоб виконувались умови*

$$\frac{\omega T k_3}{\|k\|}\neq\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}^3.$$

Теорема 2. *Нехай існують сталі* $M\in\mathbb{R}_+$ *і* $\alpha\in\mathbb{N}$ *такі, що для всіх (крім скінченного числа) векторів* $k\in\mathbb{Z}^3$ *виконуються нерівності*

$$\left|\sin\frac{\omega T k_3}{\|k\|}\right|\geq\frac{M}{|k|^{\alpha+\varepsilon}},\ 0<\varepsilon<1, \tag{3}$$

і нехай $\phi_j(x)\in A^2_\delta,\ j=1,2,\ f(t,x)\in C([0,T],A^2_\delta)$*, де* $\delta>\nu T$*. Тоді існує розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $C^{(2,6)}(D)$*, який неперервно залежить від функцій* $\phi_j(x)$*,* $j=1,2$*, та* $f(t,x)$*.*

Доведено, що нерівність (3) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега) чисел $\dfrac{\pi}{\omega T}$ при $\alpha\geq 3$ для всіх (крім скінченного числа) векторів $k\in\mathbb{Z}^3$.

Татьяна Комлева

Одесский национальный политехнический университет
t-komleva@ukr.net

УСРЕДНЕНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ НЕЧЕТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Понятие нечеткого дифференциального уравнения было введено O. Kaleva в 1985 г. Возникшая теория получила дальнейшее развитие в работах S. Seikkala, C.X. Wu, S.J. Song, V. Lakshmikantham, S. Leela и A.S. Vatsala. Так же в работе [1] была показана возможность применения схем усреднения для такого типа уравнений.

В докладе рассматривается возможность применения метода усреднения для нечетких управляемых систем.

Определим пространство $E^n = \{u : R^n \to [0;1] \mid u(\cdot)$ удовлетворяет (I) – (IV) $\}$ с метрикой $D(u,v) = \sup\{h([u]^\alpha, [v]^\alpha) \mid 0 \le \alpha \le 1\}$, где (I) u – нормированное отображение, т.е. $u(x_0) = 1$ для некоторого $x_0 \in R^n$, (II) u – нечетко выпуклое, т.е. $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \min\{u(x); u(y)\}$ для любых $x, y \in R^n$ и $0 \le \lambda \le 1$, (III) u – полунепрерывно сверху, (IV) $[u]^0 = cl\{x \in R^n \mid u(x) > 0\}$ – компакт, $h(\cdot,\cdot)$ метрика Хаусдорфа в $conv(R^n)$ и $[u]^\alpha \in conv(R^n)$ – α-срезка $u \in E^n$ для всех $\alpha \in [0,1]$.

Для управляемых систем с терминальным критерием качества

$$u' = \varepsilon\,[f(t,u) + g(t,v)],\ u(0) = u_0,\ J(v) = \Phi(u(T,v)), \tag{1}$$

$$\overline{u}\,' = \varepsilon\,[\overline{f}\,(\overline{u}\,) + w(t)],\ \overline{u}\,(0) = u_0,\ \overline{J}\,(w) = \Phi(\overline{u}\,(T,w)), \tag{2}$$

где $f, \overline{f} : R^1 \times E^n \to E^n, g : R^1 \times R^m \to E^n$, $\Phi : E^n \to R^1$, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $v \in V \in conv(R^m), w \in W \in conv(E^n)$ – вектора управления,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t,u)dt = \overline{f}\,(u), \qquad w(t) \in W = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T g(t,V)dt,$$

получены условия, при которых решение системы (1) и усредненной системы (2) близки по функционалам качества.

1. Комлева Т.А., Плотников А.В., Плотникова Л.И. Усреднение нечетких дифференциальных уравнений // Труды Одес. нац. политех. ун-та. – 2007. – Вып. 2(27). – С. 135-139.

Оксана Кондур

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
oxikon13@rambler.ru

ПРО АНАЛІТИЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ ВИРОДЖЕНИХ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА

Розглядається рівняння вигляду

$$(S - A(t, \partial_{x_1}))u(t, x) = f(t, x),$$

в якому $x \equiv (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^n$, $x_l \equiv (x_{1l}, \dots, x_{ln_l}) \in \mathbb{R}^{n_l}$, $l \in \{1, 2, 3\}$, $n_3 \le n_2 \le n_1$, $n_1 + n_2 + n_3 = n$;

$$S \equiv \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j}\partial_{x_{3j}};$$

диференціальний вираз $\partial_t - A(t, \partial_{x_1})$ є параболічним за І.Г. Петровським.

Встановлена можливість аналітичного продовження в комплексну область за першою групою просторових змінних x_1 досить гладких розв'язків даного рівняння. При цьому використано доведені в [1] властивості фундаментального розв'язку задачі Коші для такого рівняння та модифікований метод з [2], за допомогою якого одержані аналогічні результати для параболічних за С.Д. Ейдельманом систем.

1. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2004. – 390p. – (Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 152).

2. Івасишен С.Д., Кондур О.С. Про аналітичність розв'язків $2\vec{b}$-параболічних систем // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, №2. – С. 160–167.

Іван Конет

Кам'янець-Подільський державний університет
post@kpdu.km.ua

ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ІНВАРІАНТНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З УЗАГАЛЬНЕНИМ ОПЕРАТОРОМ ЛЕЖАНДРА

У доповіді розглядаються нові класи інваріантних відносно групи обертань $O(n)$ диференціальних рівнянь (систем рівнянь) з узагальненим оператором Лежандра [1] в евклідових областях і на спеціальних ріманових многовидах [2–4]. Основні результати:

— доведено теореми про інтегральні зображення міри Дірака в евклідових областях і на спеціальних ріманових многовидах;

— запропоновано нові класи інтегральних перетворень з невідокремленими змінними типу Бохнера-Лежандра та Бохнера-Шестопала;

— доведено теореми про інтегральні зображення фундаментальних розв'язків задачі Коші для параболічних та гіперболічних рівнянь (систем рівнянь);

— доведено теореми про інтегральні зображення фундаментальних розв'язків для еліптичних рівнянь (систем рівнянь).

1. Конет І.М., Ленюк М.П. Інтегральні перетворення типу Мелера-Фока. — Чернівці: Прут, 2002. — 248 с.
2. Конет І.М., Ленюк М.П. Фундаментальні розв'язки задачі Коші для інваріантних $\Lambda_{(\mu)}$-параболічних операторів на ріманових многовидах // Науковий вісник Чернівецького університету. Математика. – Чернівці: Рута, 2006. – Вип. 288. – С. 61–73.
3. Конет І.М. Фундаментальні розв'язки задачі Коші для інваріантних $\Lambda_{(\mu)}$-гіперболічних операторів на ріманових многовидах // Нелінійні коливання. – 2005. – **8**, № 2. — С. 224–233.
4. Конет І.М. Фундаментальні розв'язки для інваріантних $\Lambda_{(\mu)}$-еліптичних операторів на ріманових многовидах // Нелинейные граничные задачи. – 2005. – Вып. 15. – С. 154–161.

Андрій Конограй

Інститут математики НАН України
a_konograi@mail.ru

КОЛМОГОРОВСЬКІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Досліджуються розглянуті в [1] класи $B^{\Omega}_{1,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних, $\Omega(t)=\omega(t_1,...,t_d)$, де $\omega(\tau)$ — задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, що задавольняє умови Барі-Стєчкіна (див., наприклад, [1]) (S) і (S_l). При певному виборі функції $\Omega(t)$ класи $B^{\Omega}_{1,\theta}$ співпадають з відомими класами Бєсова $B^{r}_{1,\theta}$.

Нехай $L_p(\pi_d)$ – простір 2π–періодичних за кожною змінною функцій $f(x)=f(x_1,\ldots,x_d)$ зі стандартною нормою. Одержано точні за порядком оцінки колмогоровських поперечників $d_M(B^{\Omega}_{1,\theta},L_q)$, які визначаються наступним чином:

$$d_M(B^{\Omega}_{1,\theta},L_q)=\inf_{L_M}\sup_{f\in B^{\Omega}_{1,\theta}}\inf_{u\in L_M}\|f-u\|_q,$$

де L_M — підпростір в L_q розмірності M.

Теорема 1. *Нехай* $1<q\le 2,\ \theta\in[1,q]$ *і* $\Omega(t)=\omega(t_1\cdot\ldots\cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha>1-\frac{1}{q}$, *а також умову* (S_l). *Тоді для будь-яких* $M,n\in\mathbb{N}$, *таких, що* $M\asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце оцінка*

$$d_M(B^{\Omega}_{1,\theta},L_q)\asymp\omega(2^{-n})2^{n(1-\frac{1}{q})}.$$

Теорема 2. *Нехай* $2\le q<\infty,\ 1\le\theta\le\infty$ *і* $\Omega(t)=\omega(t_1\cdot\ldots\cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha>1$, *а також умову* (S_l). *Тоді для будь-яких* $M,n\in\mathbb{N}$, *таких, що* $M\asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце оцінка*

$$d_M(B^{\Omega}_{1,\theta},L_q)\asymp\omega(2^{-n})2^{\frac{n}{2}}n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+},$$

де $a_+=\max\{a,0\}$.

1. Sun Youngsheng, Wang Heping. Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1997. — № 219. — P. 356-377.

Павло Кончук

Львівський Національний університет імені Івана Франка
p.kononchuk@gmail.com

РОЗВЯЗАННЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦІАЛУ ОДНІЄЇ МОДЕЛЬНОЇ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ З НЕЛОКАЛЬНОЮ УМОВОЮ СПРЯЖЕННЯ

Нехай $\mathcal{D}_1$ та $\mathcal{D}_2$ - нижній та верхній підпростори в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, тобто $\mathcal{D}_m = \{x = (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n | (-1)^m x_n > 0\}$. Позначимо $\mathcal{S} = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n = 0\}$, $\Omega_m = [0, \infty) \times \mathcal{D}_m$, $m = 1, 2$, $\Sigma = (0, \infty) \times \mathcal{S}$. Розглянемо задачу спряження: знайти функцію $u(t, x)$, $(t, x) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^n$, таку що виконуються умови:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathcal{L}u(t,x), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times \mathcal{D}_m, m = 1, 2, \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

$$u(t,x',-0) = u(t,x',+0), \qquad (t,x') \in \Sigma, \tag{3}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u(t,x') - u(t,y))\, \pi(x', dy) = 0, \quad (t,x') \in \Sigma, \tag{4}$$

де $\mathcal{L}$ – рівномірно еліптичний оператор другого порядку з обмеженими гельдеровими коефіцієнтами на $\mathbb{R}^n$, φ – обмежена гельдеровими коефіцієнтами на $\mathbb{R}^n$, $\pi(x', \cdot)$ – невід'ємна міра Бореля на $\mathbb{R}^n$.

Задача (1)-(4) виникає в теорії випадкових процесів при вивченні аналітичними методами задачі про склеювання дифузійних процесів [1] у випадку, коли у точках $\mathcal{S}$ задається лише загальна гранична умова Вентцеля [2], що відповідає за стрибки шуканого процесу. Розв'язання задачі (1)-(4), при деяких додаткових припущеннях щодо гладкості міри $\pi(x', \cdot)$ за змінною x', отримано методом граничних інтегральних рівнянь з використанням потенціалу простого шару.

1. Портенко М.І. Процеси дифузії в середовищах з мембранами. – Київ: Інститут математики НАН України, 1995. – 200 с.
2. Скубачевський А.Л. О полугруппах Феллера для многомерных диффузионных процессов// ДАН. — 1995. — **341**, № 2. — С. 173–176.

Анатолій Кореновський, Андрій Лернер, Олександр Стоколос

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова
Bar-Ilan University, Ramat Gan, Israel
DePaul University, Chicago, USA
anakor@paco.net

ПРО ОДНУ УМОВУ ТИПУ БУЗЕМАНА - ФЕЛЛЕРА

Скажемо, що абсолютно неперервна на кубі $Q_0 \subset \mathbb{R}^d$ міра μ задовольняє умову типу Буземана - Феллера, якщо для всіх $0 < \lambda < 1$

$$\varphi_\mu(\lambda) \equiv \sup_E \mu\left(\{x \in Q_0 : \ M_{Q_0,\mu}\chi_E(x) > \lambda\}\right)/\mu(E) < \infty, \qquad (1)$$

де χ_E – характеристична функція множини E, а точна верхня грань береться по всіх множинах $E \subset Q_0$, для яких $\mu(E) > 0$. При цьому максимальна функція Харді - Літтлвуда визначається наступною рівністю $M_{Q_0,\mu}f(x) = \sup_{Q \ni x} (\mu(Q))^{-1} \int_Q |f(y)|\, d\mu$, де куби $Q \subset Q_0$.

Умова (1) застосовується при дослідженні можливості підвищення показника сумовності функції, яка задовольняє ваговий аналог умови Гурова - Решетняка в термінах відповідних максимальних функцій. Цікава властивість функції $\varphi_\mu(\lambda)$ полягає в наступному. За відомою інтерполяційною теоремою Стейна - Вейса, з умови $\varphi_\mu(\lambda) \leq c\lambda^{-p}$ $(0 < \lambda < 1)$ випливає, що оператор $M_{Q_0,\mu}$ обмежений в $L^q_\mu(Q_0)$ при будь-якому $q > p$. Ми показуємо, що обмеженість $M_{Q_0,\mu}$ в $L^q_\mu(Q_0)$ можна гарантувати і за більш слабким припущенням. А саме, якщо $M \equiv \int_0^1 (\varphi_\mu(\lambda))^{1/q}\, d\lambda < \infty$ при деякому $1 \leq q < \infty$, то максимальний оператор $M_{Q_0,\mu}$ обмежений в $L^q_\mu(Q_0)$ і $\|M_{Q_0,\mu}f\|_{q,\mu} \leq M\|f\|_{q,\mu}$.

Умову (1) задовольняє достатньо широкий клас мір, зокрема міра Лебега, а в більш загальному випадку – міра μ, яка задовольняє умову подвоєння $\mu(2Q) \leq c\mu(Q)$ для кожного куба $Q \subset Q_0$. В одновимірному випадку умова (1) має місце для будь-якої абсолютно неперервної борелівської міри, навіть без умови подвоєння.

Зрозуміло, що функція $\varphi_\mu(\lambda)$ не зростає на $(0,1)$. Ми будуємо приклад такої абсолютно неперервної міри μ, що $\varphi_\mu(\lambda) = \infty$ для кожного $\lambda \in (0,1)$. Нам невідомо, чи може функція $\varphi_\mu(\lambda)$ мати як скінченні, так і нескінченні значення. Але можна показати, що існує таке число λ_d, яке залежить лише від d, що з умови $\varphi_\mu(\lambda_d) < \infty$ випливає, що $\varphi_\mu(\lambda) < \infty$ для всіх $0 < \lambda < 1$.

Олеся Коркуна, Сергій Лавренюк

Національний лісотехнічний університет України
Львівський національний університет імені Івана Франка
sp_lavreniuk@franko.lviv.ua

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙДЕЛЬМАНА В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Нехай $D_x \subset \mathbb{R}^k$ і $D_y \subset \mathbb{R}^m$ – необмежені області, причому $\partial D_x \in C^1$ і $\partial D_y \in C^1$. Позначимо через $\Omega = D_x \times D_y$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$, де $0 < T < \infty$.

В області Q_T розглянуто рівняння з дійснозначними коефіцієнтами і вільним членом вигляду

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{i,j=1}^{k} \left(a_{ij}(z,t)|u_{x_i x_j}|^{p-2} u_{x_i x_j}\right)_{x_i x_j} - \\ - \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij}(z,t) u_{z_i})_{z_j} + c(z,t)|u|^{r-2}u = f(z,t) \end{aligned} \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$u\Big|_{S_T} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial D_x \times D_y \times (0,T)} = 0 \tag{2}$$

і початковою умовою

$$u(z,0) = u_0(z), \tag{3}$$

де $z = (x,y) \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^m$, $n = k + m$, ν – зовнішня нормаль до $\partial D_x \times D_y \times (0,T)$.

Одержано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку задачі (1) – (3) незалежно від його поведінки при $|z| \to +\infty$.

Виктор Круглов

Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова

ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ОСОБЫХ ТОЧЕК

В комплексной плоскости рассматривается дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=0}^{2} t^i P_{in}(t) u^{(i)} = 0,$$

где $P_{in}(t) = A_{in}t^n + \cdots + A_{i1}t + A_{i0}$. Предполагается, что $A_{10} \neq 0$.

В окрестности точки $t = 0$ решение ищется в виде обобщенного степенного ряда $u(t) = l_0 t^\rho + l_1 t^{\rho+1} + \cdots$. Коэффициенты этого ряда удовлетворяют рекуррентному уравнению n- го порядка

$$\alpha_k^{(0)} l_k + \alpha_{k-1}^{(1)} l_{k-1} + \cdots + \alpha_1^{(k-1)} l_1 + \alpha_0^{(k)} l_0 = 0, \quad k = 1, \ldots, n;$$

$$\alpha_p^{(0)} l_p + \alpha_{p-1}^{(1)} l_{p-1} + \cdots + \alpha_{p-n}^{(n)} l_{p-n} = 0, \quad p = n+1, n+2, \ldots,$$

где

$$\alpha_m^{(j)} = A_{3j} + (\rho + m)A_{2j} + (\rho + m)(\rho + m - 1)A_{1j},$$
$$m = 0, 1, \ldots; j = 0, 1, \ldots, n.$$

Параметр ρ находится из определяющего уравнения

$$\alpha_0^{(0)} = A_{30} + \rho A_{20} + \rho(\rho - 1)A_{10} = 0.$$

Найдено явное решение данного рекуррентного уравнения. Это позволило перегруппировать члены обобщенного степенного ряда таким образом, что решение дифференциального уравнения оказалось представленным как сумма n гипергеометрических функций и $\frac{n(n-1)}{2}$ новых специальных функций вида

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left(a_m + \frac{q}{m}\right)_k \left(b_m + \frac{q}{m}\right)_k}{\left(1 + \frac{q}{m}\right)_k \left(\gamma_m + \frac{q}{m}\right)_k} t^{km}, \quad m = 2, \ldots, n; \ q = 1, \ldots, m-1,$$

где $(\alpha)_k = \alpha(\alpha + 1) \ldots (\alpha + k - 1)$, параметры a_m, b_m, γ_m связаны с коэффициентами полиномов P_{in}, а также остаточных членов этих рядов.

Євген Крутиголова

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка

ПРО ЗОБРАЖЕННЯ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ СТЕПЕНЕВО-ПОКАЗНИКОВИМИ РЯДАМИ В ПІВПЛОЩИНІ

Нехай $L(\lambda)$ – ціла функція з нулями $\lambda_\nu\,(\nu \geqslant 1)$, кратностей m_ν, яка задовольняє умову

$$L(\lambda) = O\left(1/\lambda^\alpha\right),\ \alpha > 1,\ 0 < \lambda < \infty \tag{1}$$

Візьмемо довільну функцію, аналітичну в півплощині $\mathrm{Re}z < 0$ і неперервну при $\mathrm{Re}z \leqslant 0$, для якої при $|z| \to \infty$ виконується умова

$$|f(z)| = O\left(\frac{1}{|z|^\mu}\right),\ \mu > 1 \tag{2}$$

Функції $f(z)$ співставимо ряд

$$f(z) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{m_\nu - 1} a_{\nu,k} z^k e^{\lambda_\nu z}, \tag{3}$$

де $\lambda_\nu(\nu \geqslant 1)$ – нулі функції $L(\lambda)$, яка задовольняє умову (1), $a_{\nu,k} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi_{\nu,k}(t)dt$, $\{\psi_{\nu,k}(t)\}$ – система функцій, біортогональних до системи $\{z^k e^{\lambda_\nu z}\}$. Встановлено умови, необхідні і достатні для того, щоб функцію $f(z)$, аналітичну в півплощині $\mathrm{Re}z < 0$ і неперервну при $\mathrm{Re}z \leqslant 0$, для якої виконується умова (2), можна було зобразити рядом (3) в півплощині $\mathrm{Re}z < 0$. Також справедлива

Теорема. *Нехай D – півплощина $Rez < 0$. Тоді існує послідовність комплексних чисел $\{\lambda_k\}$, $(\lambda_k) \to \infty$, $k \to \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k}{|\lambda_k|^\rho} = \tau$, $0 < \tau < \infty$, $\rho > 1$, така, що всяку функцію $f(z)$, аналітичну в D і неперервну при $Rez \leqslant 0$ можна зобразити в D рядом вигляду (3)*

1. Леонтьев А.Ф. Ряды экспонент – М.: Наука, 1976. – 536 с.
2. Крутиголова Є.К. Про умови розкладу аналітичних функцій в ряди Діріхле в півплощині // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, №1. – С. 28-34.

Анатолій Кузьменко, Володимир Войтишин

Міжнародний економіко-гуманітарний університет
імені академіка Степана Дем'янчука
anatoliypk@gmail.com

РОЗПАРАЛЕЛЮВАННЯ ОБЧИСЛЕНЬ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ОДНОГО ТИПУ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Одним із сучасних підходів до оптимізації обчислювальних процесів є використання можливості розпаралелювання обчислень. Застосування паралельних обчислень продемонструємо на прикладі крайової задачі для звичайного диференціального рівняння із розривними коефіцієнтами.

Розглянемо крайову задачу

$$-\frac{d}{dx}\left(\kappa(x)\frac{du}{dx}\right)+r(x)u=f(x),\ x\in(a,\,\xi_1)\cup(\xi_1,\,\xi_2)\cup\ldots\cup(\xi_n,\,b)\,,\quad(1)$$

$$u(a)=\varphi_a,\ \ u(b)=\varphi_b,\ \left[\kappa(x)\frac{du}{dx}\right]_{x=\xi_i}=0,\ [u]_{x=\xi_i}=0,\ i=\overline{1,n}.\qquad(2)$$

Тут $\kappa(x)\geqslant\kappa_0>0$, $r(x)\geqslant r_0>0$. Точки $\xi_i,\ i=\overline{1,n}$ є (можуть бути) точками розриву першого роду для функцій κ, r, f.

Згідно з алгоритмом декомпозиції області розв'язок крайової задачі (1)-(2) шукатимемо у вигляді $u(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}u^{(k)}(x)$, де $u^{(k)}(x)$, $x\in(a,\,b)$, знаходяться як розв'язки певних крайових задач на відрізках неперервності коефіцієнтів рівняння (1). Кожна задача із вказаних вище послідовностей задач має єдиний розв'язок. Збіжність ряду забезпечується вибором значень певних релаксаційних коефіцієнтів в задачах для $u^{(k)}(x)$. Позначимо через P_i^k задачу із названих вище послідовностей, що визначена на відрізку $[\xi_{i-1},\,\xi_i]$, $i=\overline{1,n+1}$ ($\xi_0=a$, $\xi_{n+1}=b$) на k-ій ітерації. Розв'язування задачі P_i^k на відповідному відрізку неперервності коефіцієнтів рівняння (1) вважаємо окремим обчислювальним процесом. При цьому такі обчислювальні процеси можна здійснити в паралельному режимі, синхронізуючи їх певним чином.

Людмила Кузьменко

Національний технічний університет України „КПІ“

ПРО ДЕЯКІ ІНТЕГРО-СУМАРНІ НЕРІВНОСТІ ТИПУ ГРОНУОЛЛА-БЕЛЛМАНА-БІХАРІ-ВЕНДРОФА

Наведено точні оцінки для розривних функцій, що задовольняють більш загальним інтегро-сумарним функціональним нерівностям.

Нехай $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $J_1 = [x_0, X)$, $J_2 = [y_0, Y)$ є підмножини $\mathbb{R}$, $\Delta = J_1 \times J_2$. Правильна така теорема.

Теорема. *Нехай* $a \in \mathbb{C}(\Delta, R_+)$, $b \in \mathbb{C}(\Delta^2, R_+)$ *для* $x_0 \le s \le x \le X$, $y_0 \le t \le y \le Y$, $\alpha \in \mathbb{C}^{/}\ (J_1, J_1)$, $\beta \in \mathbb{C}^{/}\ (J_2, J_2)$ *є неспадними по кожному з аргументів з* $\alpha(x) \le x$ *на* J_1, $\beta(y) \le y$ *на* J_2, $k \ge 0$, $\beta_i > 0$ *– сталі,* u *– невід'ємна функція визначена в області* $D = \{\bigcup\limits_{n,j} D_{n,j}, D_{n,j} = \{(x,y) : x \in\ [x_{n-1}, x_n[\times\ \times y \in\ [y_{j-1}, y_j[\}$, $n = 1, 2, \ldots$, $j = 1, 2, \ldots\}$, *неперервна в* D, *за винятком* $\{x_i, y_i\}$ *– точок скінченного стрибка:* $u(x_i - 0, y_i - 0) \ne u(x_i + 0, y_i + 0)\ \forall i \in \mathbb{N}$. *Тут* $(x_i, y_i) < (x_{i+1}, y_{i+1})$, *якщо* $x_i < x_{i+1}$, $y_i < y_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$, *де* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$. *Якщо*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{D} \quad u(x,y) \le k + \int\limits_{\alpha(x_0)}^{\alpha(x)} \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} [a(s,t)u(s,t) +$$

$$+ \int\limits_{\alpha(x_0)}^{s} \int\limits_{\beta(y_0)}^{t} b(s,t,\sigma,\eta)u(\sigma,\eta)d\eta d\sigma]dtds + \sum_{(x_0,y_0)<(x_i,y_i)<(x,y)} \beta_i u(x_i - 0, y_y - 0),$$

то

$$\forall (x,y) \in \mathbb{D} \quad u(x,y) \le k \prod_{(x_0,y_0)<(x_i,y_i)<(x,y)} (1 + \beta_i) exp(A(x,y)),$$

де $A(x,y) = \int\limits_{\alpha(x_0)}^{\alpha(x)} \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} [a(s,t) + \int\limits_{\alpha(x_0)}^{s} \int\limits_{\beta(y_0)}^{t} b(s,t,\sigma,\eta)d\eta d\sigma]dtds.$

Ольга Куксо, Наталья Шамукова

Институт математики НАН Беларуси, Бобруйский филиал БГЭУ
olga_kukso@tut.by, shamukova_n@mail.ru

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДИСКРИМИНАНТОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ, ОСНОВАННОМ НА ТЕОРЕМЕ ХИНЧИНА

Дискриминатом многочлена $P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ с корнями $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называется выражение $D(P) = a_n^{2n-2} \prod\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$. Нетрудно проверить, что $D(P) = a_1^2 - 4a_2 a_0$ при $n = 2$. Далее a_j, $0 \leqslant j \leqslant n$, — целые числа. Из выражения для $D(P)$ можно получить, что при $\max\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} |a_j| < Q$ верна оценка $0 \leqslant |D(P)| \leqslant c(n) Q^{2n-2}$. Используя метрическую теорему Хинчина [1] можно доказать, что при любом θ, $0 \leqslant \theta \leqslant 2n-2$, можно найти такие c_1, c_2, $c_1 < c_2$, что для любого интервала $I = [c_1 Q^\theta, c_2 Q^\theta]$ найдется многочлен $P_n(x)$ с условием $D(P) \in I_0$. Мы даем конструкцию, позволяющую получить более сильные результаты. Она основана на следующих леммах.

Лемма 1. *Пусть I обозначает интервал, $I \subset \mathbb{R}$, c_1 и c_2 – такие положительные постоянные, что* $\max(c_1, c_2) \leqslant 1$. *Для достаточно большого Q обозначим через $\mathcal{L}_{1,Q}(c_1, c_2)$ множество точек $x \in I$ таких, что система неравенств*

$$|qx - p| < c_1 Q^{-1}, \quad 1 \leqslant q \leqslant c_2 Q,$$

разрешима во взаимно простых $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Тогда для $c_1 c_2 < \lambda$, $0 < \lambda < 1/3$, имеем $\mu \mathcal{L}_{1,Q}(c_1 c_2) < 3\lambda |I|$.

Лемма 2. *Обозначим через $M_n(Q)$ множество точек $x \in I$, для которых $2n$ систем неравенств*

$$\begin{cases} \frac{Q^{-1}}{3^i (n+1)^i} < |q_i x - p_i| < \frac{Q^{-1}}{3^{i-1} (n+1)^{i-1}}, \\ 3^{i-2} (n+1)^{i-2} Q \leqslant q \leqslant 3^{i-1} (n+1)^{i-1} Q, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \end{cases}$$

разрешимы в $\{(p_i, q_i)\}_{i=1}^n$. Тогда $\mu M_n(Q) > |I|/(n+1)$.

1. Khintchine A.J. Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen // Math. Zeitschr. – 1926. – **24**. – P. 706-714.

Ярослав Кунець, Валерій Матус,
Віктор Міщенко, Василь Пороховський

ІППММ ім.Я.С. Підстригача НАН України
matus@iapmm.lviv.ua

НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА РОЗСІЯННЯ SH–ХВИЛЬ ТОНКОЮ ПРУЖНОЮ НЕОДНОРІДНІСТЮ В ПІВПРОСТОРІ

Запропоновано алгоритм визначення хвильових полів, дифрагованих тонким пружним прямолінійним включенням змінної товщини, що знаходиться у пружному півпросторі. Припускається, що композит збуджується імпульсом SH-хвиль, а поверхня півпростору вільна від напружень, або жорстко защемлена. Тонкостінна неоднорідність моделюється з допомогою асимптотично точних співвідношень, записаних на серединній поверхні включення [1].

Використовуючи інтегральне перетворення Фур'є за часом, отримуємо відповідну стаціонарну задачу розсіяння пружних хвиль. З допомогою методики, викладеної у [2], задача зводиться до розв'язання сингулярного інтегрального рівняння з використанням методу ортогональних поліномів. У результаті отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь безмежного порядку, яку розв'язуємо методом редукції. Доведено квазірегулярність цієї системи рівнянь, а, отже, і стійкість запропонованого числово-аналітичного алгоритму.

Наведений алгоритм дозволив проаналізувати часові залежності коефіцієнтів інтенсивності напружень поблизу країв неоднорідності та амплітуд розсіяння імпульсів хвиль різного профілю при різних геометричних та механічних параметрах включення.

1. Emets V.F., Kunets Ya.I., Matus V.V. Scattering of SH waves an elastic thin-walled rigidly supported inclusion // Archive of Applied Mechanics. – 2004. – **73**. – P. 769-780.
2. Кит Г. С., Кунец Я. И., Мищенко В. А. Взаимодействие импульсов SH-волн с тонкими упругими мягкими неоднородностями // Вісник Донецького ун-ту. Сер. А. – 2002. – С. 109-113.

Сергій Курєннов

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського

РОЗВИНЕННЯ ТЕОРІЇ КЛЕЙОВИХ З'ЄДНАНЬ

Одним з поширених типів з'єднань деталей із композиційних матеріалів є клейове (клеєболтове чи клеєшитфтове) з'єднання. Базою для проектування з'єднань є розрахунок напруженого стану. Але методики розрахунку мають високий ступень ідеалізації і не враховують такі фактори, як нерівномірність навантаження по ширині з'єднання, наявність поперечних деформацій, які обумовлені коефіцієнтами Пуассона, деформації зсуву в площині з'єднання (наприклад у випадках, коли осі анізотропії шарів не співпадають з напрямком навантаження), прогин з'єднання та ін., що приводить до системного погіршення якості проектування.

Створена нова модель клейового з'єднання, яка побудована в рамках лінійної теорії пластин. Задача розрахунку напруженого стану в з'єднанні зведена до системи семи диференційних рівнянь рівноваги в частинних похідних відносно прогину з'єднання і дотичних і нормальних напружень в шарах, що з'єднуються [1]. Використання лінійної теорії обумовлено малими прогинами, що має місце в значної кількості інженерних конструкцій.

Розроблена методика дозволяє вивчити досі не досліджені фактори і поширена на проектування з'єднань і ідентифікації дефектів.

Обернена задача ідентифікації недосконалостей в клейовому прошарку на першому етапі зводиться до пошуку податливостей на зсув в вузлах сітки, які б забезпечували відомі деформації реперних точках (точках розташування тензодатчиків), що приводить до системи лінійних рівнянь. На другому етапі, отримавши інформацію про кількість дефектів і зони їх розміщення і маючи апріорну інформацію про форму найбільш поширених типів дефектів (еліпс, крайове відшарування і т.п.), наявні дефекти класифікуються. Функціонал нев'язкі розрахованих і заданих деформацій мінімізується на множині координат центрів і геометричних параметрів (розміри півосей, ширина відшарування і т.п.) дефектів.

1. Курєннов С.С. Двумерная модель односрезного нахлесточного соединения // Авіац.-косм. техніка і технологія: Зб. наук. праць. – Харків: Нац. аерокосм. ун-т, 2005. – 9 (25). – С. 106-109.

Людмила Кусик

Одесский национальный морской университет
ludakusik@mail.ru

АСИМПТОТИЧЕКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$y'' = \alpha_0 p(t)\varphi_0(y)|y'|^{\sigma_1}\psi(t, y, y'), \tag{1}$$

где $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$, $\sigma_1 \in \mathbf{R}$, $p \in \mathbf{C}([a, \omega[;]0, +\infty[)$ $(-\infty < a < \omega \le +\infty)$, $\varphi_0 \in \mathbf{C^2}(\Delta_{Y_0};]0, +\infty[)$, $\psi \in \mathbf{C}([a, \omega[\times D;]0, +\infty[)$, $D = \Delta_{Y_0} \times \Delta_{Y_1}$, Δ_{Y_i} $(i = 0, 1)$ – односторонняя окрестность Y_i , а каждое $Y_i \in \{0, \pm\infty\}$ ($i \in \{0, 1\}$). Предполагаем также, что выполнены условия:

$$\lim_{\substack{y \longrightarrow Y_o \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \frac{y\varphi_0'(y)}{\varphi_0(y)} = \sigma_0 \ (\sigma_0 \in \mathbf{R}), \quad \limsup_{\substack{y \longrightarrow Y_o \\ y \in \Delta_{Y_0}}} \left|\frac{y\varphi_0''(y)}{\varphi_0'(y)}\right| < +\infty,$$

$\sigma_0 + \sigma_1 \ne 1$ и $\psi(t, y, z) \to 1$ при $(t, y, z) \to (\omega, Y_0, Y_1)$ $((t, y, z) \in [a, \omega[\times D)$.

Решение y уравнения (1), заданное на некотором промежутке $[t_0, \omega[\subset [a, \omega[$, называется $P_\omega(Y_0, Y_1, \lambda_0)$- решением, если для него выполнены условия:

$y^{(i)}(t) \in \Delta Y_i$ при $t \in [t_0, \omega[$ $(i = 0, 1)$, $\lim\limits_{t\uparrow\omega} y^{(i)}(t) = Y_i$ $(i = 0, 1)$

и

$$\lim_{t\uparrow\omega} \frac{(y'(t))^2}{y(t)y''(t))} = \lambda_0.$$

Получены необходимые и достаточные условия существования, а также асимптотические представления $P_\omega(Y_0, Y_1, 1)$-решений уравнения (1) при $t \uparrow \omega$ в случае, когда $\psi(t, y, y') \not\equiv 1$. Данная работа является продолжением исследований [1].

1. Евтухов В.М., Кириллова Л.А. Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, № 8. – С. 1053-1061.

Андрій Кутень, Анатолій Обшта

Національний університет „Львівська політехніка“

АНАЛІТИКО-ІТЕРАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО ДОСЛІДЖЕННЯ ЕЛЕКТРОМАГНІТНО-АКУСТИЧНОГО КОНТРОЛЮ АНОМАЛІЙ СТРУМОПРОВІДНИХ МАТЕРІАЛІВ

Розроблено аналітико-ітераційний підхід до дослідження тривимірних моделей ЕМА контролю струмопровідних матеріалів, що ґрунтується на використанні методу узагальнених потенціалів дослідження різноконтурних задач та агрегаційно-ітеративних методах розв'язання інтегральних та операторних рівнянь [1, 2]. Фізична модель ЕМА методу базується на використанні електрично сканувального трансформаторного вихрострумового перетворювача з обертовим магнітним полем [3]. В основу ЕМА контролю аномалій струмопровідних матеріалів на базі сформульованої фізичної моделі покладено математичні задачі, які базуються на трьох групах рівнянь: Максвела, матеріальних рівняннях та рівняннях пружності. Ці групи рівнянь є основою наближених систем рівнянь для математичного опису явищ прямого та зворотного ЕМА перетворень.

1. Обшта А. Ф. Метод узагальнених потенціалів та електромагнітний контроль якості струмопровідних матеріалів. // Зб. наук. праць ІПМЕ НАН України ім. Г. Є. Пухова. – К.: ІПМЕ НАН України ім. Г. Є. Пухова, 2005. – Вип. 29 – С. 113–121.
2. Обшта А. Ф. Агрегаційно-ітеративні аналоги методу Мамедова розрахунку моделей просторових віброобразів складних енергетичних вузлів. // Збірник наукових праць: Моделювання та інформаційні технології. – К.: ІПМЕ НАН України. ім. Г. Є. Пухова, 2004. – Вип. 28 – С. 43–51.
3. Декл. патент України UA 40300A G 01 N 29/04 Пристрій для електросканувального електромагнітно-акустичного контролю струмопровідних матеріалів / Обшта А. Ф., Притуляк Я. Г., Костюк І. В., Варецький Я. Ю., Тасінкевич Ю. Г.; ДУ „ЛП“. – Заявл. 28.11.2000; Опубл. 16.07.2001; Бюл. №6. – 4 с.

Роман Кушнір, Анатолій Ясінський

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України
kushnir@iapmm.lviv.ua

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО ЦИЛІНДРА ЗА НЕПОВНОЇ ІНФОРМАЦІЇ ПРО ТЕПЛОВЕ НАВАНТАЖЕННЯ

Діагностику і контроль теплового і термонапруженого станів деталей працюючого теплоенергообладнання через обмеження доступу до їх граничної поверхні часто доводиться здійснювати за умов неповної інформації про теплове навантаження, що зумовлює недоозначеність відповідних задач теплопровідності і термопружності. Для розв'язання таких задач потрібно використати додаткову інформацію. Якщо вихідну задачу доозначити інформацією про поведінку параметрів теплового процесу (температури, теплового потоку) в деяких точках деталі, то задачу ідентифікації теплового навантаження можна звести до обернених задач теплопровідності, які є некоректними і розв'язання яких передбачає побудову регуляризуючих алгоритмів. Якщо ж вихідну задачу доозначити інформацією про поведінку параметрів механічного процесу (переміщень, деформацій, напружень), то в результаті отримаємо обернену задачу термопружності. У роботі досліджено задачу ідентифікації закону зміни за часом температури однієї з граничних поверхонь неперервно неоднорідного за радіальною координатою довгого порожнистого циліндра, його теплового і термонапруженого станів за температурою і деформаціями зовнішньої граничної поверхні. Показано, що, використовуючи цю інформацію, задачу ідентифікації можна звести до оберненої задачі термопружності. На основі методів безпосереднього інтегрування диференціальних рівнянь задачі термопружності, скінченних різниць і прогонки для складних систем побудовано числовий алгоритм розв'язання оберненої задачі. Доведено стійкість і коректність побудованого алгоритму. Одержаний розв'язок оберненої задачі дає змогу ідентифікувати невідому температуру внутрішньої граничної поверхні протягом усього процесу теплового навантаження циліндра. З використанням розв'язку прямої задачі термопружності проведено числову апробацію методики розв'язання задачі ідентифікації.

Михайло Ленюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА ДИФУЗІЇ РЕЧОВИНИ З М'ЯКОЇ ФАЗИ В ТВЕРДУ ФАЗУ ОБМЕЖЕНОГО ОБ'ЄМУ

Задача про визначення концентрації речовини при її дифузії з м'якої фази в оточуючу тверду фазу обмеженого об'єму математично призводить до побудови обмеженого в області $D = \{(t,x) : t \in (0,\infty), x \in (0,l)\}$ розв'язку рівняння дифузії

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x) \tag{1}$$

при заданій початковій умові

$$u|_{t=0} = g(x) \tag{2}$$

та крайових умовах

$$\left[\left(\alpha_{11}^0 + \delta_{11}^0 \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \beta_{11}^0 + \gamma_{11}^0 \frac{\partial}{\partial t}\right] u\Bigg|_{x=0} = \omega_1(t),$$

$$\left[\left(\alpha_{11}^1 + \delta_{11}^1 \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \beta_{11}^1 + \gamma_{11}^1 \frac{\partial}{\partial t}\right] u\Bigg|_{x=l} = \omega_2(t). \tag{3}$$

Інтегральне зображення аналітичного розв'язку даної задачі дифузії одержимо методом інтегрального перетворення Фур'є зі спектральним параметром на відрізку $[0,l]$:

$$u(t,x) = \int_0^t \int_0^l H(t-\tau,x,\xi)[f(\tau,\xi) + g(\xi)\delta_+(\tau)]d\xi d\tau +$$

$$+ \int_0^t [W_1(t-\tau,x)\omega_1(\tau) + W_2(t-\tau,x)\omega_2(\tau)]d\tau, \tag{4}$$

$\delta_+(\tau)$ – дельта-функція, зосереджена в точці $\tau = +0$.

Павло Ленюк

Чернівецький факультет національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут“

ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ (ФУР'Є, БЕССЕЛЯ)-ЛЕЖАНДРА З НЕПЕРЕРВНИМ СПЕКТРОМ

Розглянемо диференціальні оператори Фур'є $L_1 \equiv d^2/dr^2$, Бесселя $L_2 \equiv B_{\nu,\alpha} = d^2/dr^2 + \frac{2\alpha+1}{r} d/dr - \frac{\nu^2-\alpha^2}{r^2}$, де $\nu \geq \alpha \geq -1/2$, та Лежандра $L_3 \equiv \Lambda_{(\mu)} = d^2/dr^2 + \operatorname{cth} r d/dr + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\frac{\mu_1^2}{1-\operatorname{ch} r} + \frac{\mu_2^2}{1+\operatorname{ch} r})$, де $(\mu) = (\mu_1, \mu_2)$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq 0$.

За допомогою одиничної функції Гевісайда $\theta(r)$ побудуємо гібридний диференціальний оператор

$$L = \sum_{m=1}^{2} \theta(r-R_{m-1})\theta(R_m-r)a_m^2(L_1; L_2)_m + \theta(r-R_2)\theta(R_3-r)a_3^2 L_3. \quad (1)$$

Тут $(L_1; L_2)_m$ – послідовність L_1, L_2 або L_2, L_1. Число R_0 може дорівнювати $(-\infty)$ у послідовності L_1, L_2. У цьому випадку гібридний диференціальний оператор L має дві особливі точки: $r = -\infty$ та $r = +\infty$. В усіх інших випадках L має одну особливу точку ($R_0 > -\infty$, $R_3 = \infty$). При цьому $0 < R_1 < R_2 < R_3 \leq \infty$.

Методом дельта-видної послідовності (ядро Коші або ядро Діріхле) одержано інтегральне зображення вектор-функції $g(r) = \{g_1(r); g_2(r); g_3(r)\}$ через відповідну спектральну функцію, спектральну густину та вагову функцію. Кожне таке інтегральне зображення дозволяє виписати пряме й обернене гібридне інтегральне перетворення, породжене відповідною комбінацією операторів L_1, L_2 та L_3. При цьому побудовано алгебру гібридного диференціального оператора L. Це дало можливість одержати інтегральні зображення розв'язків відповідних сингулярних типових задач математичної фізики (статики, квазістатики та динаміки).

1. Ленюк М.П., Ленюк П.М. Гибридные интегральные преобразования (Лежандра-Бесселя-Фурье, Лежандра-Фурье-Бесселя). – Черновцы, 1992. – 65 с. – Деп. в Укр. ИНТЭИ, 743. – Ук. 92.

Евгений Леончик

Одесский национальный университет им. И.И. Мечникова
leonchik@ukr.net

ОБ УСЛОВИИ МАКЕНХАУПТА В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Пусть положительная функция f отделена от нуля на кубе Q_0 из $\mathbb{R}^d$, то есть $\operatorname{ess\,inf}_{x\in Q_0} f(x) > 0$. Говорят, что f удовлетворяет условию Макенхаупта при некоторых $q \neq 0$ и $C > 1$ ($f \in A_q(C)$), если для всех кубов $Q \subset Q_0$ выполнено неравенство [1]

$$\left(|Q|^{-1}\int_Q f^q(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C \operatorname*{ess\,inf}_{x\in Q} f(x), \qquad q \neq 0. \tag{1}$$

Одно из основных свойств функций из $A_1(C)$ состоит в том, что найдется такое $p_0 = p_0(C,d) > 1$, для которого $f \in L_p(Q_0)$ при любом $p < p_0$ [1]. Другими словами, функция из A_1 допускает повышение показателя суммируемости. В работе [2] в одномерном случае при $q = 1$ установлено значение постоянной $p_0 = C(C-1)^{-1}$, которое, вообще говоря, не может быть увеличено. В случае $d \geq 2$ вопрос о точном значении p_0 остается открытым.

Через $A_q^*(C)$ обозначается класс функций аналогичный $A_q(C)$, но выполнение условия (1) требуется по всем многомерным прямоугольникам из Q_0, а не только по кубам. Очевидно, что $A_q^*(C) = A_q(C)$ при $d = 1$ и $A_q^*(C) \subset A_q(C)$ при $d \geq 2$.

В работе получена поточечная оценка невозрастающей равноизмеримой перестановки функции $f \in A_1^*(C)$. Используя эту оценку, доказана следующая

Теорема. *Пусть функция $f \in A_q^*(C)$, $q \neq 0$. Тогда $f \in L_p(Q_0)$ при всех $p < qC^q(C^q-1)^{-1}$, причем значение $qC^q(C^q-1)^{-1} > 0$, вообще говоря, увеличить нельзя.*

1. Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – **165**. – P. 207–226.
2. Bojarski B., Sbordone C., Wik I. The Muckenhoupt class $A_1(\mathbb{R})$ // Studia Math. – 1992. – **101** (2). – P. 155–163.

Оксана Лисецька

Національний технічний університет України "КПІ"

ІНТЕГРАЛЬНІ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ФУНКЦІЇ ТРІКОМІ

Розглянемо узагальнену (за Райтом) конфлюентну гіпергеометричну функцію Трікомі у вигляді:

$$\Psi^{\tau,\beta} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int\limits_0^\infty t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}\ H_{1,2}^{1,1}\left[\ xt^\tau \left|\ \begin{matrix} (1-a,\beta) \\ (0,1,(1-a,\tau) \end{matrix} \right.\ \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \int\limits_0^\infty t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}\ {}_1\Psi_1\left[\ \begin{matrix} (a,\beta) \\ (a,\tau) \end{matrix} \ \middle|\ -xt^\tau\ \right] dt, \qquad (1)$$

де $Rea > Re(c-1) > 0,\ \tau, \beta \in R,\ \tau > 0,\ \tau - \beta < 1;\ a,\ c \in \mathbf{C}$, $\Gamma(a)-$ класична гамма-функція, ${}_1\Psi_1-$функція Фокса-Райта [1].

Для даної функції доведено низку функціональних, диференціальних та інтегральних співвідношень, зокрема, справедлива

Теорема. *При виконанні умов існування* ${}_{\tau,\beta}$*-узагальненої конфлюентної гіпергеометричної функції* $\Psi^{\tau,\beta}(a,c;z)$ *мають місце співвідношення:*

$$\int \Psi^{\tau,\beta}(a,c;x)dx = -\frac{\Gamma(a-\beta)\Gamma(a-\beta-c+\tau+1)}{\Gamma(a)\Gamma(a-c+1)}\Psi^{\tau,\beta}(a-\beta,c-\tau;x) + C,$$

$$\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{-a-c}\Psi^{\tau,\beta}(a,c;z^{\tau+\beta}(1-t)^{-\tau})dt = B(a,1-c)\Psi^{\tau,\beta}(a,a+c,z^{\tau+\beta}),$$

$$\int\limits_0^z \Psi^{\tau,\beta}(a+\beta,c+\tau;t)dt = A\cdot\Gamma(1-c) - A\cdot\Gamma(a-c+2)\Psi^{\tau,\beta}(a+1,c;z) -$$

$$-\frac{z\beta}{a}\Psi^{\tau,\beta}(a+\beta,c+\tau;z),$$

де $C = const$, $\Gamma(a)$ *і* $B(a,c)$ *– відповідно класичні гамма- і бета-функції,* $A = \Gamma(a)/\left(\Gamma(a+\beta)\Gamma(a+\beta-c-\tau+1)\right)$.

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. – М.: Наука, 1965. – 296 с.

Надія Лінчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
nesslin@mail.ru

СТРУКТУРА ІНВАРІАНТНИХ ПІДПРОСТОРІВ СТЕПЕНЯ ОПЕРАТОРА ІНТЕГРУВАННЯ

Нехай G – довільна область комплексної площини. Через $\mathcal{H}(G)$ позначимо простір усіх функцій, аналітичних в G, що наділений топологією компактної збіжності. Якщо G – довільна область комплексної площини, яка зіркова відносно початку координат, то оператор інтегрування $\mathcal{J}$ лінійно і неперевно діє в $\mathcal{H}(G)$ за правилом $(\mathcal{J}f)(z) = \int\limits_0^z f(t)dt$. В працях М.К. Нікольського, М.І. Нагнибіди, М.Ю. Царькова, В.А. Ткаченко досліджувалася характеристика всіх замкнутих підпросторів простору $\mathcal{H}(G)$, які інваріантні відносно операторів звичайного та узагальненого інтегрування, що діють в різних просторах аналітичних функцій.

Нехай m – фіксоване натуральне число і $\omega = exp\left(\frac{2\pi i}{m}\right)$. Область G називається ω–інваріантною відносно початку координат, якщо $\omega G = G$. Нехай G зіркова відносно точки $z = 0$ і ω–інваріантна відносно початку координат. Через $\mathcal{H}_k(G)$, $k = \overline{0, m-1}$ позначимо замкнуті підпростори простору $\mathcal{H}(G)$, які визначаються наступним чином

$$\mathcal{H}_k(G) = \{f \in \mathcal{H}(G) : f(\omega z) = \omega^k f(z),\ z \in G\}.$$

Теорема. *Нехай G – довільна зіркова відносно точки $z = 0$, ω–інваріантна відносно початку координат область в $\mathbb{C}$. Для того, щоб M був замкнутим підпростором простору $\mathcal{H}_k(G)$, інваріантним відносно оператора $\mathcal{J}^m$ необхідно і достатньо, щоб він представлявся у вигляді $M = \mathcal{J}^{n_k m}\mathcal{H}_k(G)$, де n_k – деяке ціле невід'ємне число або символ ∞ (у випадку $n_k = \infty$ покладаємо $M = 0$).*

Наслідок. *Загальний вигляд замкнутих підпросторів простору $\mathcal{H}(G)$, інваріантних відносно оператора $\mathcal{J}^m$, задається формулою $M = T(\mathcal{J}^{n_0 m}\mathcal{H}_0(G) \oplus \mathcal{J}^{n_1 m}\mathcal{H}_1(G)) \oplus \ldots \oplus \mathcal{J}^{n_{m-1} m}\mathcal{H}_{m-1}(G))$, де T – деякий ізоморфізм простору $\mathcal{H}(G)$, що комутує з $\mathcal{J}^m$, а n_k $(k = \overline{0, n-1})$ – деякі цілі невід'ємні числа або символи ∞.*

Степан Лінчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
nesslin@mail.ru

ЗАСТОСОВНІСТЬ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ ДО ПРОСТОРУ $[\rho, \sigma]$

Через $[\rho, \sigma]$ позначатимемо простір цілих функцій порядок яких менший за ρ, або ж дорівнює ρ, але в цьому випадку тип не перевищує σ. Для $\varepsilon > 0$ формулою $||f||_\varepsilon = \max\limits_{z\in\mathbb{C}}(|f(z)|exp(-(\sigma+\varepsilon)|z|^\rho))$ визначається норма на просторі $[\rho, \sigma]$. Топологія на просторі $[\rho, \sigma]$ задається сім'єю норм $\{||\cdot||_\varepsilon : 0 < \varepsilon < \infty\}$. У повідомленні вивчаються умови застосовності інтегральних операторів нескінченного порядку відносно узагальненого інтегрування.

Теорема 1. *Нехай оператор узагальненого інтегрування $\mathcal{J}_\alpha$ побудований за послідовністю комплексних чисел $(\alpha)_{n=0}^{\infty}$ і неперервно діє в $[\rho, \sigma]$, а $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ – деяка послідовність комплексних чисел. Для того, щоб числовий ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(\mathcal{J}_\alpha^n f)(z)$ збігався для довільної функції $f \in [\rho, \sigma]$ в кожній точці $z \in \mathbb{C}$ необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова*

$$\forall z \in \mathbb{C}\ \exists \varepsilon > 0\ \exists C > 0\ \forall n, k = 0, 1, \ldots$$

$$|c_n| \left|\frac{\alpha_{n+k}}{\alpha_k}\right| |z|^{n+k} \le C||z^k||_\varepsilon. \tag{1}$$

У випадку, коли оператор узагальненого інтегрування $\mathcal{J}_\alpha$ збігається зі звичайним інтегруванням $\mathcal{J}$, умова (1) рівносильна тому, що $\lim\limits_{n\to\infty}(n^{-1}\sqrt[n]{|c_n|}) = 0$.

Теорема 2. *Нехай $(\psi_n(z))_{n=0}^{\infty}$ – послідовність функцій з простору $[\rho, 0]$. Для застосовності інтегрального оператора нескінченного порядку $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \psi_n(z)(\mathcal{J}_\alpha^n f)(z)$ до простору $[\rho, \sigma]$ за топологією $[\rho, \sigma]$ необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \varepsilon_1 > 0\ \exists C > 0\ \forall n, k = 0, 1, \ldots$$

$$\left|\frac{\alpha_{n+k}}{\alpha_k}\right| ||\psi_n(z) z^{n+k}||_\varepsilon \le C||z^k||_{\varepsilon_1}.$$

Владислав Літовченко

ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ СИСТЕМ

Нехай $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_m := \{1, \ldots, m\}$, $r \in \mathbb{N}_m \cup \{0\}$; $\Omega_j(\cdot)$ і $M_j(\cdot)$, $j \in \mathbb{N}_n$, – опуклі, гладкі, монотонно зростаючі, невід'ємні та необмежені на $[0;+\infty)$, парні на $\mathbb{R}$ функції. Покладемо $\Omega(x)=\{\Omega_j(x_j), j \in \mathbb{N}_n\}$, $M(x)=\{M_j(x_j), j \in \mathbb{N}_n\}$, $x \in \mathbb{R}^n$, і позначимо через $\overset{r}{W}{}^{M}_{\Omega}$ сукупність усіх парних за першими r компонентами аргументу функцій φ, які продовжуються аналітично на весь $\mathbb{C}^n$, і таких, що для кожної з них $\exists\{c, \delta_1, \delta_2\} \subset (0;+\infty)\ \ \forall z \in \mathbb{C}^n:\ \ |\varphi(z)| \le c \exp\{-\sum_{j=1}^{n}(\Omega(\delta_1 \mathrm{Re} z_j) - M(\delta_2 \mathrm{Im} z_j))\}$. Розглянемо систему

$$\partial_t u(t,x) = (\mathbb{B}_{\mathcal{A}_t} u)(t,x), \quad t \in (0;T], x \in \mathbb{R}^n : x_j \ge 0, j \in \mathbb{N}_r, \qquad (1)$$

де $\mathbb{B}_{\mathcal{A}_t}(\cdot) = \left(F_B^{-1}[a_{ij}(t,\xi)F_B[\cdot]]\right)_{i,j=1}^{m}$ – матричний ПДО з символом $\mathcal{A}_t(\cdot)=\ (a_{ij}(t,\cdot))_{i,j=1}^{m}$; кожен елемент цієї матриці є неперервною за t функцією на $[0;T]$, парною за першими r компонентами x і цілою аналітичною в $\mathbb{C}^n$; $F_B[\cdot]$ – оператор, який за першими r компонентами аргументу діє як перетворення Бесселя, а за рештою як перетворення Фур'є. Вважатимемо, що: 1) кожен елемент матрицанта $\Theta(t;\cdot,\tau)$ системи (1) в образі Фур'є-Бесселя належить до $\overset{r}{W}{}^{M}_{\Omega}$ і є диференційовним за t у $\overset{r}{W}{}^{M}_{\Omega}$; 2) елементи матриці $\mathcal{A}_t$ – мультиплікатори в $\overset{r}{W}{}^{M}_{\Omega}$. Якщо для системи (1) задати крайові та початкову умови

$$\partial_{x_l} u\Big|_{x_l=0} = 0, \quad l \in \mathbb{N}_r;\ \ u(t,\cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in (\overset{r}{W}{}^{\widetilde{\Omega}}_{\widetilde{M}})', \qquad (2)$$

(тут $\widetilde{(\cdot)}$ – взаємодвоїстість з $(\cdot)$ за Юнгом, а Φ' – топологічна спряженість з Φ), то розв'язком задачі Коші (1), (2) називатимемо таку вектор-функцію u, яка диференційовна за t на $(0;T]$, належить до $\overset{r}{W}{}^{\widetilde{\Omega}}_{\widetilde{M}}$ при кожному фіксованому t з $(0;T]$, задовольняє систему (1) та крайові умови з (2) у звичайному розумінні, а початкову умову з (2) – у сенсі збіжності в просторі $(\overset{r}{W}{}^{\widetilde{\Omega}}_{\widetilde{M}})'$.

Теорема. *Задача Коші* (1), (2) *коректно розв'язна тоді й тільки тоді, коли кожна компонента початкової функції – згортувач у просторі* $(\overset{r}{W}{}^{\widetilde{\Omega}}_{\widetilde{M}})'$.

Юрій Ловейкін

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
yuriyl@ua.fm

ПРО ЗБУРЕННЯ ІНВАРІАНТНИХ ТОРІВ УМОВНО ІНТЕГРОВНИХ ЛОКАЛЬНО ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ НА ЦЕНТРАЛЬНИХ МНОГОВИДАХ

На гладкому симплектичному многовиді $(M^{2(n+k)}, \omega^2)$ розглядається умовно інтегровна локально гамільтонова система з багатозначним гамільтоніаном $H_0 : M^{2(n+k)} \to \mathbb{R}$. Умовна інтегровність системи означає, що її інваріантні тори розшаровують не відкриту область фазового простору, а лише деякий підмноговид.

Припустимо, що в околі цього підмноговида існують координати (y, φ, z), де $y{=}(y_1, \ldots, y_s)$, $\varphi{=}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)|\mathrm{mod}2\pi$, $z{=}(z_1, \ldots, z_{2k})$, $s{+}r = 2n$, в яких дужки Пуассона, породжені симплектичною структурою ω^2, задаються рівностями $\{\varphi, y\}{=}\sigma$, $\{\varphi, \varphi\}{=}\chi$, $\{z, z\}{=}I$, де σ, χ, I – матриці розміру $r{\times}s$, $r{\times}r$ і $2k{\times}2k$ відповідно, а всі не виписані дужки Пуассона рівні нулю; гамільтоніан $H_0(y, \varphi, z){=}\bar{H}_0(y, \varphi, z){+}\beta_0{\cdot}\varphi$, де $\bar{H}_0$ – однозначна складова гамільтоніана, задовольняє умови: $\bar{H}_0{}'_z|_{z=0}{=}0$, $\bar{H}_0|_{z=0}$ та не залежить від змінних φ; лінеаризована в околі многовиду $z = 0$ локально гамільтонова система має властивість гіперболічності.

Нехай система зазнає збурення вигляду $H_0 \mapsto H_0 + \mu H_1$, де μ – малий параметр. При накладанні додаткових умов на гамільтоніан H_0 збурена система має центральний многовид, заданий рівнянням $z = \mu Z(y, \varphi, \mu)$. Цей многовид – гіперболічний центральний многовид, причому для нього можна гарантувати лише скінченну гладкість.

Система індукована вихідною збуреною системою на центральному многовиді також є локально гамільтоновою, але лише скінченно диференційовною. Для з'ясування питання про існування інваріантних торів, що несуть на собі квазіперіодичні рухи, використаний метод згладжування, запропонований Ю. Мозером. В результаті маємо, що локально гамільтонова система на центральному многовиді має інваріантні тори і рухи на цих торах квазіперіодичні з вектором базисних частот $\sigma H_0{}'|_{z=0,y=0} + \chi\beta_0 + O(\mu)$.

Використана техніка центрального многовиду, на відміну від інших робіт, не вимагає виконання умови звідності інваріантних торів.

Віра Лозинська, Ольга М'яус

ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України
vlozynska@yahoo.com

ОПЕРАТОРНЕ ЧИСЛЕННЯ ЕЛІПТИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ

Розглянемо простір $L_p(\Omega)$ $(1 < p < \infty)$, Ω – обмежена множина. Оператор A– регулярний еліптичний оператор порядку $2m$:
$A : \mathcal{C}^1 \ni u \longmapsto \sum_{|\alpha|\le 2m} a_\alpha(t) D^\alpha u(t) \in L_p(\Omega), \quad a_\alpha(t) \in C^\infty(\overline{\Omega})$.
Розглянемо простір

$$E := \bigcap\nolimits_{m,a} \bigcup\nolimits_{\nu} E_\nu^{(m,a)} = \lim \mathrm{pr}_{m,a} \Big(\lim \mathrm{ind}_{\nu \to +\infty} E_\nu^{(m,a)} \Big),$$

де $\|\varphi\|_{E_\nu^{(m,a)}} = \sup\limits_{k\in \mathrm{Z}_+} \dfrac{\|D^k\varphi\|_{L_1^{(m,a)}(\mathrm{R})}}{\nu^k}$, $\|\varphi\|_{L_1^{(m,a)}(\mathrm{R})} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |t^m \omega(at)\varphi(t)| dt.$

Спряжений простір до E позначимо через E' і наділимо слабкою топологією спряженого простору. Перетворення Фур'є здійснює лінійний ізоморфізм $\mathcal{F} : E \ni \varphi(t) \longrightarrow \widehat{\varphi}(\xi) \in \widehat{E}$. Двоїстість $< E' \mid E >$ дозволяє визначити спряжене відображення до оберненого $2\pi(\mathcal{F}^{-1})'$: $E' \ni f \longrightarrow \widehat{f} \in \widehat{E}'$.

Спектральні підпростори S_m оператора A [1] співпадають з кореневими векторами еліптичного оператора $S_m = \bigoplus_{j\le m} R(\lambda_j)$. Нехай топологія в підпросторі $R(A) = \bigcup\limits_m \bigoplus_{j\le m} R(\lambda_j)$ індукується з простору $L_p(\Omega)$ і в алгебрі $\mathcal{L}(R(A))$ задана сильна операторна топологія.

Теорема. *Відображення $\widehat{E}'(\mathbb{R}) \ni \widehat{f} \longrightarrow \widehat{f}(A) \in \mathcal{L}(R(A))$ здійснює неперервний гомоморфізм алгебри $\widehat{E}'(\mathbb{R})$ в алгебру $\mathcal{L}(R(A))$, при цьому $\widehat{(D^k f)}(A) = i^k A^k \widehat{f}(A)$, $\widehat{(it)^k f}(A) = D^k \widehat{f}(A)$. Оператори $\widehat{f}(A)$ над простором $L_p(\Omega)$ допускають замикання з областю визначення*

$$\Big\{ x = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \in L_p(\Omega) : \; x_m \in \bigoplus_{j\le m} R(\lambda_j), \; \sum_{m=1}^{\infty} \|\widehat{f}(A) x_m\| < \infty \Big\}.$$

1. Любич Ю.И., Мацаев В.И. Об операторах с отделимым спектром // Матем. сборник – 1962. – **56**, № 4 – С. 433–468.

Галина Лопушанська

Львівський національний університет імені Івана Франка

РОЗВ'ЯЗКИ ІЗ СИЛЬНИМИ СТЕПЕНЕВИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Нехай Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею S класу C^∞, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультиіндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$.

Для довільної фіксованої точки $\hat{x} \in S$ позначимо через $\varrho(x, \hat{x}) (x \in \overline{\Omega})$ нескінченно диференційовну функцію, яка додатна в $\overline{\Omega} \setminus \{\hat{x}\}$, має порядок $|x - \hat{x}|$ біля $\hat{x}$, $\varrho(\hat{x}, \hat{x}) = 0$, $\varrho(x, \hat{x}) \geq 1$, $x \in \overline{\Omega}$. Покладемо:

$Z_k(S, \hat{x}) = \{\varphi \in C^\infty(S \setminus \hat{x}) : \quad \varrho^{|\alpha|-k}(\cdot, \hat{x}) D^\alpha \varphi \in C(S) \quad \forall \alpha$, якщо k неціле, та $\frac{D^{k-|\alpha|}\varphi}{ln\varrho(\cdot, \hat{x})} \in C^\infty(S)$, якщо $|\alpha| = k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Для $\mu_0 \in L_\infty(\Omega)$, $q_0 > 0$, $\mu_j \in L_\infty(S)$, $q_j > 0$ та $F_j \in Z'_{p_j}(S, \hat{x})$, $j = \overline{1, m}$, розглядаємо нормальну еліптичну крайову задачу

$$A(x, D)u(x) \equiv \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u(x) = \mu(x) |u(x)|^{q_0}, \ x \in \Omega,$$

$$B_j(x, D)u(x) \equiv \sum_{|\alpha| \leq m_j} b_{j\alpha}(x) D^\alpha u(x) = F_j(x) + \mu_j(x) |u(x)|^{q_j}, \ x \in S,$$

$$j = \overline{1, m},$$

за припущення, що відповідна їй лінійна однорідна крайова задача має лише тривіальний розв'язок, $a_\alpha \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $b_{j\alpha} \in C^\infty(S)$, $j = \overline{1, m}$.

Доведено, що при $0 < q_0 < \frac{n}{n-1-\hat{m}}$, $0 < q_j < \frac{n-1)}{n-1-\hat{m}}$, $j = \overline{1, m}$, якщо $2m < n$ або $2m \geq n$ та $\hat{m} = \min\limits_{1 \leq j \leq m} m_j < n - 1$, при всіх $q_j \in (0, 1)$, $j = \overline{0, m}$, якщо $2m \geq n$ та $\hat{m} \geq n - 1$, при $p_0 = \max\limits_{1 \leq j \leq m} (p_j - m_j) < 1 - n + \min\{\frac{n-1}{\tilde{q}}, \frac{n}{q_0}\}$, $-\min\{\frac{n-1}{\tilde{q}}, \frac{n}{q_0}\} < l \leq 1 - n + \min\{\hat{m}, -p_0\}$, де $\tilde{q} = \max\limits_{1 \leq j \leq m} q_j$, та за деякого додаткового припущення у випадку $\min\limits_{1 \leq j \leq m} q_j \geq 1$ існує розв'язок задачі у просторі

$$C_l^M(\overline{\Omega}, \hat{x}) = \{v \in C(\overline{\Omega} \setminus \hat{x}) : \varrho^{-l}(\cdot, \hat{x}) v \in C(\overline{\Omega})$$
$$(||v||'_{C_l^M(\overline{\Omega}, \hat{x})} = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \varrho^{-l}(x, \hat{x}) |v(x)| < +\infty)\}.$$

Андрій Лопушанський

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
a_lopushanskyy@franko.lviv.ua

ПРО ЕКСПОНЕНТУ ДИФЕРЕНЦІЮВАНЬ ЗА НЕКОМУТАТИВНИМИ НАПРЯМАМИ

Пару комплексних банахових просторів V_0 і V_1 з неперервним та щільним вкладенням $E_{10} : V_1 \to V_0$ позначаємо V. Сукупність усіх таких обмежених операторів $T : V_0 \to V_0$, що $T(V_1) \subset V_1$, утворює банахову алгебру $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ над V відносно рівномірної операторної норми $||T||_{\mathcal{L}(\mathcal{V})} := \max\limits_{j=0,1} ||T||_{\mathcal{L}(\mathcal{V}_|)}$.

Куту $\omega_0 \in (\pi/2, \pi)$ співставимо в комплексній площині $\mathbb{C}$ замкнений сектор $\Lambda := \{re^{i\omega} : r \geq 0\, \omega \in [-\omega_0, \omega_0]\}$ і відповідний відкритий конус секторіальних операторів від'ємного типу

$$\mathcal{A} := \left\{ A \in \mathcal{L}(V_1; V_0) : \sup_{\lambda \in \Lambda} \left\| \left(\lambda E_{10} - A\right)^{-1} \right\|_{\mathcal{L}(V_0;V_1)} = K(A) < \infty \right\}.$$

Формула $\varphi(A) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \varphi(\lambda)\, R(\lambda, A)\, d\lambda$, де $R(\lambda, A) = E_{10}(\lambda E_{10} - A)^{-1} \in \mathcal{L}(V_0)$, де контур Γ залишає зліва спектр оператора A, однозначно визначає гомоморфізм алгебри скалярних аналітичних функцій на комутативну алгебру $H\big(\mathcal{A}\big)$ функцій операторного аргументу $\varphi : \mathcal{A} \ni A \longmapsto \varphi(A) \in \mathcal{L}(V)$ з „поточково“ визначеними алгебричними операціями множення $\varphi(A) \cdot \psi(A) = (\varphi \cdot \psi)(A)$ та додавання і множення на скаляри.

Похідною функції $\varphi(A) \in H\big(\mathcal{A}\big)$ на проміжному просторі U банахової пари V називаємо визначену для кожного оператора $A \in \mathcal{A}$ таку функцію $\varphi' : \mathcal{A} \ni A \longrightarrow \varphi'(A) \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(U; V_0); \mathcal{L}(V_0))$, що $\lim\limits_{\|X_1\|_{\mathcal{L}(U;V_0)} \to 0} \|\varphi(A + X_1) - \varphi(A) - \varphi'(A)[X_1]\|_{\mathcal{L}(V_0)} = 0$.

Диференціюванням у напрямі заданного оператора $X \in \mathcal{L}(U; V_0)$ називаємо визначений на $H(\mathcal{A})$ лінійний оператор $D_X : H(\mathcal{A}) \ni \varphi(A) \longmapsto \varphi'(A)\big[X\big] \in \mathcal{L}(V_0), A \in \mathcal{A}$. На $H(\mathcal{A})$ визначаємо лінійні оператори $D_X^k : H(\mathcal{A}) \ni \varphi(A) \longmapsto \varphi^{(k)}(A)\big[\underbrace{X, \ldots, X}_{k}\big] \in \mathcal{L}(V_0), k \in \mathbb{N}$ та експоненту $e^{D_{tX}} : \big[0, \delta_{A,X}\big] \ni t \longmapsto e^{D_{tX}}\, \varphi(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_{tX}^k}{k!}\, \varphi(A)$. Вивчено властивості цієї експоненти та отримано ряд застосувань.

Ірина Лусте

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

МОДЕЛЬ ДВОХ ПОТОКІВ РАДІАЦІЙНОЇ ТЕПЛОПЕРЕДАЧІ ТА ПРИМУСОВОЇ КОНВЕКЦІЇ В ГРАНИЧНОМУ ШАРІ НА АДІАБАТИЧНІЙ ПЛАСТИНІ

Досліджено вплив теплової радіації для ламінарного потоку поглинаючої, випромінюючої, розсіюючої рідини на адіабатичній пластині. Сумісна дія радіації та примусової конвекції у граничному шарі описується сукупністю інтегро-диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0, \tag{1}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{2}$$

$$\rho C_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right)=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right)-K_a\left[(4\sigma T^4-2\varepsilon_w E_2(\tau)\times\right.$$
$$\left.\times\sigma T_\omega^4)-4(1-\varepsilon_w)E_2(\tau)\int\limits_0^\infty \sigma T^4 E_2(\tau')d\tau'-2\int\limits_0^\infty \sigma T^4 E_1(|\tau-\tau'|)d\tau'\right]. \tag{3}$$

Точні розв'язки можна отримати лише для окремих випадків, тому виникає потреба в апроксимуючих моделях. В роботі сформульовано три методи розв'язання: тонке оптичне наближення, спрощене розв'язання для оптично товстої межі та так звана модель двох потоків. Ці підходи дають змогу звести рівняння (1)-(3) до сукупності диференціальних рівнянь із частинними похідними.

Метод скінченних різниць використано для перетворення отриманих рівнянь у систему звичайних диференціальних рівнянь, яка розв'язана чисельними методами.

Порівняння розподілів температури у граничному шарі з результатами точних розв'язків свідчить, що модель двох потоків є більш простою та доволі точною для врахування взаємодії радіації з ламінарним граничним потоком.

Ростислав Луцишин

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка

ДОСЛІДЖЕННЯ ВНУТРІШНЬОГО КОНТАКТУ ДЕЯКИХ, БЛИЗЬКИХ ДО КОЛА, КОНТУРІВ ПРИ СИМЕТРИЧНИХ УМОВАХ ВЗАЄМНОГО РОЗМІЩЕННЯ

В інженерній практиці часто необхідно досліджувати контактну взаємодію деталей, одна з яких знаходиться всередині іншої, а межі цих деталей, внаслідок різних технічних причин незначно відмінні від кола, що передбачено технічними умовами. Першим етапом дослідження цієї проблеми механіки є геометрична задача про знаходження точок контакту деталей.

В цій роботі розглядаються випадки: 1) поступального переміщення однієї деталі в отворі другої при умові збігу їх осей симетрії; 2) обертального руху однієї деталі всередині другої при дотриманні умови їх концентричності.

Розглянуто взаємодію таких контурів: еліпси, овали, тригранники, чотиригранники в різній їх комбінації.

Виходячи з умов рівності координат точок дотику заданих контурів та умови співдотичності в цих точках, задача зводиться до системи трьох тригонометричних або алгебраїчних рівнянь, степені яких залежать від складності контурів. Пропонуються алгоритми наближеного розв'язування цих систем. Наведено приклади.

Антон Лучка

Інститут математики НАН України

МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ІСНУВАННЯ ТА ПОБУДОВИ ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглядається задача

$$x' + P(t)x = f(t), \quad x(0) = \gamma, \quad x(t+T) = x(t), \tag{1}$$

в якій періодичні періоду T неперервні $m \times m$-матриця P та функція f і $\gamma \in \mathbb{R}^m$ задані.

Задача (1) трактується як задача Коші для системи диференціальних рівнянь з обмеженнями, методи дослідження якої відомі. Згідно з цими методами питання сумісності задачі (1) зводиться до існування розв'язків інтегрального рівняння. При цьому використовується простіша задача з параметром

$$x' + A(t)x + C(t)\lambda = y(t), \quad x(0) = \gamma, \quad x(t+T) = x(t), \tag{2}$$

і припускається, що неперервну періодичну матрицю A та неперервну матрицю C вибрано таким чином, що задача (2) має єдиний розв'язок

$$x(t) = h(t) + \int_0^T G(t,s)y(s)ds, \quad \lambda = \sigma + \int_0^T \Gamma(s)y(s)ds. \tag{3}$$

За такого припущення з допомогою формул (2), (3) встановлюється рівносильність задачі (1) інтегральному рівнянню

$$y(t) = g(t) + \int_0^T (C(t)\Gamma(s) + B(t)G(t,s)y(s))ds, \tag{4}$$

де $B(t) = A(t) - P(t)$, для якого одиниця – власне значення. Застосувавши до рівняння (4) альтернативу Фредгольма, отримаємо умову існування розв'язків задачі (1).

У доповіді висвітлюється також суть ітераційного та проекційно-ітеративного методів стосовно задачі (1).

Володимир Лучко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ВИЩОГО ПОРЯДКУ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

При математичному моделюванні деяких процесів, що піддаються імпульсній дії в різні моменти часу виникають диференціальні рівняння з імпульсною дією. Теорія систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією глибоко вивчена у праці А.М. Самойленка і О.М.Перестюка [1] та інших авторів. Для лінійних параболічних систем з імпульсною дією встановлена коректність задачі Коші в нормованих просторах Діні у праці [2]. В даній роботі встановлено умови існування та єдиності періодичного розв'язку параболічного рівняння високого порядку з імпульсною дією.

Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial^m U(t,x)}{\partial t^m} = \sum_{2bk_0+|k|\le 2bm} A_{k_0k}(t) D_t^{k_0} D_x^k U(t,x) + f(t,x), \tag{1}$$

де $t \neq \tau_i$, $t \geq 0$, $x \in \Re^n$, $k_0 \leq m-1$, та імпульсні умови

$$\begin{cases} u(\tau_i+0,x) - u(\tau_i-0,x) = B_i^{(0)} u(\tau_i-0,x) + a_1(x), \\ u_t'(\tau_i+0,x) - {u'}_t(\tau_i-0,x) = B_i^{(1)} {u'}_t(\tau_i-0,x) + a_2(x), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_t^{(m-1)}(\tau_i+0,x) - u_t^{(m-1)}(\tau_i-0,x) = B_i^{(m-1)} u_t^{(m-1)}(\tau_i-0,x) + a_m(x), \end{cases} \tag{2}$$

де задані неперервні функції $A_{k_0k}(t)$, $f(t,x)$ – ω-періодичні за аргументом t, $B_i^{(j)}$ – сталі, $a_i(x)$ – задані неперервні функції, моменти τ_i такі, що $B_{i+p}^{(j)} = B_i^{(j)}$, $\tau_{i+p} = \tau_i + \omega$.

1. *Самойленко А.М., Перестюк М.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища школа, 1987. – 258 с.
2. *Матійчук М.І., Лучко В.М.* Задача Коші для параболічних систем з імпульсною дією// Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 11. – С. 1525–1535.

Віктор Мазуренко

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
mazvic@ukr.net

ПРО A-ІНТЕГРОВНІ З КВАДРАТОМ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МІРАМИ

Для коректної [1] системи диференціальних рівнянь із мірами

$$JY' = [B'(x) + \lambda A'(x)]Y, \tag{1}$$

де J – косоермітова унітарна $p{\times}p$ матриця, $Y(x)$ – p-вимірна вектор-функція, $B(x), A(x)$ – ермітові $p{\times}p$ матриці-функції з елементами з класу $BV^+_{loc}[0,\infty)$, їх узагальнені похідні $B'(x), A'(x)$ суть розподіли Шварца нульового порядку (міри Стільтьєса), $\lambda \in \mathbb{C}$ – параметр, досліджено анонсовану в [2] проблему λ-інваріантності рангів радіусів граничного круга та їх зв'язок з числом лінійно незалежних розв'язків системи (1), A-інтегровних з квадратом на півосі, тобто таких, що $\int_0^\infty Y^*(x)dA(x)Y(x) < \infty$. У випадку граничного круга усі розв'язки системи (1) володіють цією властивістю.

Теорема. *Нехай для деякого $\lambda \in \mathbb{C}$ в усіх точках $x_s (0 \le x_s < \infty)$ розривів матриць $B(x)$ і $A(x)$ виконується умова $\det\Big\{E - J\big[\triangle B(x_s) + \lambda\triangle A(x_s)\big]\Big\} = 1$ і функція $\mathrm{tr} JA^c(x)$, де $A^c(x)$ – неперервна компонента матриці $A(x)$, є сталою на інтервалі $[0,\infty)$. Якщо за таких умов усі розв'язки системи (1) мають на цьому інтервалі A-інтегровний квадрат для деякого λ, то це має місце для всіх λ.*

У випадку граничної точки справджується

Теорема. *Нехай матриця J/i має k^- від'ємних і k^+ додатних власних значень. Тоді система (1) на інтервалі $[0,\infty)$ має принаймні k^- лінійно незалежних розв'язків, A-інтегровних з квадратом, коли $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$, і щонайменше k^+ таких розв'язків, коли $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$.*

1. Мазуренко В.В., Таций Р.М. О разрешимости неоднородной граничной задачи для дифференциальной системы с мерами // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, №3. – С. 328-336.
2. Мазуренко В.В. Про матричні круги Вейля для системи диференціальних рівнянь з мірами // Диференціальні рівняння та їх застосування: Тези доповідей. – Чернівці: Рута, 2006. – С. 98.

Володимир Макаров

Інститут математики НАН України
makarov@imath.kiev.ua

ІНТЕРПОЛЮВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ІНТЕГРАЛЬНИМИ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ

Доповідь присвячена висвітленню результатів з нового напрямку обчислювальної математики, який виник під впливом ідей В.Я.Скоробогатько – теорії інтерполювання нелінійних функціоналів інтегральними ланцюговими дробами. Основний наголос робиться на ролі континуальності інтерполяційних вузлів, яку вона відіграє при дослідженні властивостей інтегральних ланцюгових інтерполянтів (єдиність, інваріантність та інше).

Ганна Малицька

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
malitska@list.ru

ПРО ПРИНЦИП МАКСИМУМУ І ТЕОРЕМИ ПОРІВНЯННЯ ДЛЯ РІВНЯНЬ ТИПУ КОЛМОГОРОВА

Нехай D – $(n+1)$-вимірна область точок $(t,X), t\in(0,T], X\in\mathbb{R}^n, X=(x_1,...,x_r), x_i=(x_{i1},...,x_{in_i}), n=\sum\limits_{i=1}^{r} n_i, n_{i+1}\le n_i, n_i\in\mathbb{N}, x_i\in\mathbb{R}^{n_i}$;

$$Lu(t,X)=\partial_t u(t,X)-\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=1}^{n_{i+1}} x_{ij}\partial_{x_{i+1,j}}u(t,X)-\sum_{k,j=1}^{n_1}\partial_{x_{1k}}\partial_{x_{1j}}u(t,X)-$$

$$-\sum_{k=1}^{n_1} a_k(t,X)\partial_{x_{1k}}u(t,X)-a_0(t,X)u(t,X),$$

або

$$Lu(t,X)=\partial_t u(t,X)-Mu(t,X),\quad M=L-\partial_t;$$

(A) : $\sum\limits_{k,j=1}^{n_1} a_{kj}(t,X)\xi_k\xi_j>0, \xi\ne 0, \xi=(\xi_1,...,\xi_{n_1})\in\mathbb{R}^{n_1}$;
(B) : $a_{kj}(t,X), a_k(t,X), a_0(t,X)$ – неперервні і обмежені в D;
(C) : $a_0(t,X)\le 0$ в D.

Будемо вважати, що $u(t,X), \partial_t u(t,X), \partial_{x_j}u(t,X), \partial_{x_{1k}}\partial_{x_{1j}}u(t,X)$ – неперервні в D, $P^0=(t^0,X^0)\in D$, через $C(P^0)$ позначимо компоненту, утворену $D\cap\{t=t^0\}$, що містить P^0;

Теорема 1. *Якщо: 1) $Lu(t,X)\ge 0 (Lu(t,X)\le 0)$ в D; 2) виконуються умови (A),(B),(C); 3) $u(t,X)$ має додатний максимум (від'ємний мінімум), в P^0, то $u(P)=u(P^0)$ для всіх $P\in C(P^0)$.*

Нехай D – обмежена область в $\mathbb{R}^{n+1}$, межа $\partial D=B\cup B_T\cup S$, B – область, що міститься в гіперплощині $t=0$, B_T-область, що міститься в гіперплощині $t=T (T>0)$, S – многовид, $D_{t_0}=D\cap\{t=t_0\}$.

Теорема 2. *Якщо: 1) $\partial_t\upsilon>M\upsilon, \partial_t\omega\le M\omega$ в D; 2) $\upsilon>\omega$ на $\overline{B}\cup S$, то $\upsilon>\omega$ в D.*

Теорема 3. *Якщо: 1) $\partial_t\upsilon>M\upsilon, \partial_t\omega\le M\omega$ в D; 2) $\upsilon>\omega$ на $\overline{B}$; 3) $\partial_\tau\upsilon+\beta(t,X,\upsilon)<\partial_\tau\omega+\beta(t,X,\omega)$ на S, де $\beta(t,X,\omega)$ – будь-яка функція, τ – напрям, що йде всередину D_t+B_t, то $\upsilon>\omega$ в D.*

Тарас Мандзак, Ярема Савула

Львівський національний університет імені Івана Франка
t_mandzak@franko.lviv.ua, savula@franko.lviv.ua

ПОЛІВИМІРНА ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ АДВЕКЦІЇ-ДИФУЗІЇ У СЕРЕДОВИЩІ З ТОНКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

У процесі дослідження середовищ ґрунтів з чужорідними відкладеннями, гірських порід з тріщинами, різноманітних тканин людського організму та в інших споріднених випадках маємо справу з наявністю відносно тонких включених неоднорідностей (включень), що характеризуються малою товщиною та відмінними від оточуючого середовища фізичними параметрами. Числовий аналіз класичних початково-крайових задач адвекції-дифузії у таких середовищах наштовхується на значні труднощі дискретизації та адекватної апроксимації. Математичному моделюванню впливу тонких включень на процеси адвекції-дифузії присвячені праці Дейнеки В. С., Кіта Г. С., Підстригача Я. С., Сергієнка І. В., Скопецького В. В., Сулима Г. Т. та інших. Альтернативний підхід, що полягає у побудові полівимірних крайових задач математичних моделей, тобто таких, які описуються рівняннями математичної фізики різної вимірності за просторовими оординатами у середовищі та включеному тонкому шарі, розвинено у працях [1, 2] у напрямку врахування домінуючої адвективної складової переносу. Полівимірна задача адвекції-дифузії у середовищі з включенням сформульована у диференціальній і варіаційній формах, доведено властивості відповідних білінійних форм, отримано результати тестових числових розрахунків із застосуванням одно та двовимірних апроксимацій експоненційної підгонки, проведено порівняльний аналіз результатів.

1. Мандзак Т., Савула Я. Слабке формулювання одної крайової задачі зниженої вимірності // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. Випуск 11, 2006. – С. 69-74.
2. Савула Я.Г., Мандзак Т.І. Гетерогенна крайова задача математичної моделі адвекції-дифузії у середовищі з включенням // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології, 2006. – Вип. 3. – С. 150-158.

Ростислав Мартиняк, Мар'ян Дмитрів

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
labmtd@iapmm.lviv.ua

ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ НЕОДНОРІДНОГО ПРЯМОКУТНИКА ЗА КОНТАКТУ З ГЛАДКИМ ШТАМПОМ

Досліджується безфрикційна взаємодія пружного неоднорідного ізотропного прямокутного тіла і абсолютно жорсткого штампа (індентора), форма якого описується парною функцією $g(x_1)$. Прикладену до індентора силу P вважаємо такою, що верхня сторона тіла повністю прилягає до нього. Нижня грань прямокутника гладкозащемлена, бічні – незавантажені. Пружні характеристики тіла – модуль Юнга і коефіцієнт Пуасона – є неперервними функціями координат x_1 і x_2, парними відносно x_1.

Для числового розв'язання сформульованої контактної задачі теорії пружності застосовано метод скінченних елементів. Область пружного тіла дискретизували чотирикутниками з лінійними і квадратичними апроксимаціями. Побудовано скінченноелементну об'єктно-орієнтовану модель для цього класу задач з використанням .Net Framework 2.0.

На цій основі розглянуто контакт прямокутника з плоским ($g(x_1)$ $= 0$) і параболічним ($g(x_1) = dx^2$, $d << 1$) штампами. Досліджено розподіл напружень у разі різних залежностей коефіцієнта Пуассона ν і модуля Юнга E від координат (експоненційної, поліноміальної, тригонометричної). Проаналізовано вплив неоднорідності матеріалу на контактну жорсткість системи k, що характеризує зв'язок осідання ідентора $(b - c)$ з прикладеною до нього силою $P : P = k(b - c)$. Визначено критичну силу P_c, що розмежовує діапазон навантажень на два, коли контакт верхньої грані прямокутника з індентором є повним $(P > P_c)$ і коли відбувається розшарування між тілами $(P < P_c)$. Дослідження останнього випадку потребує модифікації постановки задачі з урахуванням того, що індентор контактуватиме з верхньою гранню тіла на деякій середній ділянці, величина якої заздалегідь невідома і залежить від величини прикладеної сили P.

Лариса Масловская, Оксана Масловская

Одесский национальный университет им.И.И.Мечникова
nasko1@yandex.ru

МЕТОД ШТРАФА СТЫКОВКИ СЕТОК В СМЕШАННОМ МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В методе конечных элементов для эффективного решения краевых задач часто используются нестыкующиеся сетки.

Стыковка обычно производится по линиям или поверхностям, которые разделяют область на подобласти и называются интерфейсами. Стыковка по интерфейсу – это удовлетворение некоторых условий непрерывности при переходе через интерфейс. Прямые процедуры стыковки можно назвать mortar-методами. Основные mortar-методы можно разделить на две группы : использующие множители Лагранжа и основанные на технике Нитше, а также их модификации.

В работе [1] мы впервые использовали метод штрафа стыковки сеток для уравнений второго порядка. Здесь мы обосновываем возможность использования метода штрафа для смешанных методов конечных элементов. Рассмотрена схема Германна-Джонсона для бигармонического уравнения. Основная идея состоит в построении возмущенной задачи с двумя параметрами, которые играют роль штрафов. Проведена дискретизация возмущенной задачи методом конечных элементов. Получены оценки для нормы разности между решением дискретной возмущенной задачи и решением исходной задачи, зависящие от шага и штрафов. Даны рекомендации для выбора штрафов в зависимости от шага.

Следует отметить, что в методе штрафа для уравнений второго порядка при аппроксимации решения сплайнами первой степени при определенном выборе штрафа скорость сходимости в норме H^1 имеет порядок h [1], то есть она такая же, как и в методе конечных элементов на стыкующейся сетке. Как показано в предлагаемой работе, это свойство не сохраняется для смешанного метода конечных элементов, хотя потеря в скорости сходимости для сплайнов низших степеней меньше, чем для сплайнов более высоких степеней.

1. Масловская Л.В., Масловская О.М. Метод штрафа для стыковки сеток в методе конечных элементов// Известия ВУЗОВ. Математика. – 2006. – № 10 – С. 33 – 43.

Володимир Маслюченко, Дмитро Кукульняк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ЗВ'ЯЗОК МІЖ ПОДВІЙНИМИ І ПОВТОРНИМИ ІНТЕГРАЛАМИ

Тут під інтегровністю будемо розуміти інтегровність за Ріманом. Нехай $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ – обмежена функція. Позначимо $\overline{\int}_0^1 f(x)dx = \inf\limits_{T\in\mathcal{T}} \overline{\sigma}(f,T)$ і $\underline{\int}_0^1 f(x)dx = \sup\limits_{T\in\mathcal{T}} \underline{\sigma}(f,T)$, де $\overline{\sigma}(f,T)$ і $\underline{\sigma}(f,T)$ – відповідно верхня та нижня суми Дарбу функції f на проміжку $[0,1]$, що відповідають розбиттю T відрізка $[0,1]$, а $\mathcal{T}$ – сукупність всіх розбиттів відрізка $[0,1]$. Для $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ позначимо $u_f(x) = \overline{\int}_0^1 f(x,y)dy$, $l_f(x) = \underline{\int}_0^1 f(x,y)dy$, $U_f(y) = \overline{\int}_0^1 f(x,y)dx$, $L_f(y) = \underline{\int}_0^1 f(x,y)dx$. Покладемо $X_{\overline{R}}(f) = \{x \in [0,1] : f^x = f(x,\cdot)$ – не інтегровна на [0,1]$\}$ і $Y_{\overline{R}}(f) = \{y \in [0,1] : f_y = f(\cdot,y)$– не інтегровна на [0,1]$\}$.

Символ $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$ будемо розуміти наступним чином: при фіксованому $x \in [0,1]$ обчислюється інтеграл $F(x) = \int_0^1 f(x,y)dy$, потім ця функція інтегрується на $[0,1]$. Якщо для деякого $x \in [0,1]$ інтеграл $F(x)$ не існує, то значення $F(x)$ береться довільним чином з проміжку $[l_f(x), u_f(x)]$. Аналогічний сенс має і символ $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$, де значення функції $G(y) = \int_0^1 f(x,y)dx$ у випадку, коли інтеграл не існує, береться довільним чином з проміжку $[L_f(x), U_f(x)]$. Відомо [1, с. 132], що з інтегровності f на $[0,1]^2$ випливає інтегровність функцій $F(x)$ і $G(x)$ на проміжку $[0,1]$ і рівність

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx.$$

При цьому [1, с. 133] множини $X_{\overline{R}}(f)$ і $Y_{\overline{R}}(f)$ мають нульову лінійну лебеґову міру. Виявляється, що ці множини можна охарактеризувати наступним чином.

Теорема. *Нехай A і B – підмножини $[0,1]$. Для того щоб існувала функція $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, така, що $f \in R[0,1]^2$, $X_{\overline{R}}(f) = A$ і $Y_{\overline{R}}(f) = B$ необхідно і досить, щоб множини A і B містилися в деяких F_σ-множинах нульової міри на відрізку $[0,1]$.*

1. Зорич В. А. Математический анализ. Т. 2. – М.: Наука, 1984. – 640 с.

Олександр Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

КОЛИВАННЯ МАЙЖЕ НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

В багатьох роботах автора а також інших математиків (П. Костирко, З. Ґранде, Й. Еверт, З. Дужинський, С. Панамарьов) розв'язувалась задача про характеризацію коливань функцій з певного класу (наприклад для класів нарізно неперервних функцій, квазінеперервних функцій, функцій першого та другого класів Бера та ін.). В даному повідомленні сформульовано перші результати вивчення коливань майже неперервних функцій. Характеризацію множин точок розриву майже неперервних функцій було отримано в [1].

Функція $f : X \to Y$ називається *майже неперервною* (*квазінеперервною*), якщо для довільної відкритої в Y множини G виконується включення $f^{-1}(G) \subseteq \operatorname{int} \overline{f^{-1}(G)}$ (відповідно, $f^{-1}(G) \subseteq \overline{\operatorname{int} f^{-1}(G)}$). Верхня та нижня функції Бера функції $f : X \to \mathbb{R}$ визначаються формулами $f^*(x) = \inf\limits_{x \in \operatorname{int} U} \sup f(U)$ та $f_*(x) = \sup\limits_{x \in \operatorname{int} U} \inf f(U)$. Як відомо, коливання функції f дорівнює $\omega_f = f^* - f_*$.

Теорема 1. *Нехай X – топологічний простір і $f : X \to \mathbb{R}$ – майже неперервна функція. Тоді верхня та нижня функції Бера f^* та f_* є квазінеперервними.*

Топологічний простір називається *зліченно розкладним*, якщо він подається у вигляді диз'юнктного об'єднання послідовності всюди щільних множин.

Теорема 2. *Нехай X – зліченно розкладний простір, $g : X \to [0, +\infty]$ – напівнеперервна зверху квазінеперервна функція. Тоді існує така майже неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$, що $\omega_f = g$.*

Зауважимо, що різниця квазінеперервних функцій не зобов'язана бути квазінеперервною. Більше того, квазінеперервність функції g в попередній теоремі не є необхідною, бо існує майже неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, коливання якої не є квазінеперервним.

1. Банах Т.О., Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Пшеничко М.І. Точки розриву майже неперервних функцій // Мат. студії. – 2000. – **14**, № 1. – С. 89–96.

Михайло Матійчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ЗІ СПЕЦІАЛЬНИМ ПАРАБОЛІЧНИМ ОПЕРАТОРОМ ДРОБОВОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

На поверхні $S^+ = S \times (0, \infty)$ розглянемо сингулярне параболічне рівняння

$$\Lambda(D)u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^b(\Delta_{x'} + B_{x_n})u = f(t,x), \quad (b \geq 1), \tag{1}$$

де $\Delta_{x'}$ – оператор Лапласа-Бельтрамі на поверхні S в E_{n-1} із класу $C^{(2b+\omega)}, B_{x_n} = D^2_{x_n} + \frac{k}{x_n}D_x, \quad k \geq 0, x_n \geq 0$.

За допомогою фундаментального розв'язку $G(t,x,\xi)$ будуються оператором дробового інтегрування та диференціювання

$$\Im^\alpha_\Lambda u(t,x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \int\limits_S G(t-\tau, x, \xi) u(\tau, \xi) dS,$$

$$D^\alpha_\Lambda u = \Lambda(D) \Im^{1-\alpha}_\Lambda u(t,x), \quad t \in (0,T), \ \alpha \in (0,1).$$

Вивчається задача Коші для рівняння

$$D^\alpha_\Lambda u(t,x) - \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} u(0,x) = \sum_{|k| \leq 2b(\alpha)} A_k D^k u + f(t,x), \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in S^+. \tag{3}$$

Будується функція Гріна і вивчається властивості розв'язку задачі (2)–(3).

1. Матійчук М.І. Параболічні сингулярні крайові задачі. – К.: Ін-т матем. НАН України, 1999. – 176 с.
2. Analytic methods in the theory of differential and preudo-differential equations of parabolic type / S.D.Eidelman, S.D.Ivasyshen, A.N.Kochubei. – Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2004. – 390 p.

Олександр Махней

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
makhney1@yahoo.com

ФУНКЦІЯ ҐРІНА КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З МІРАМИ ТА ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Розглянемо крайову задачу

$$L_n(\mathbf{y}) \equiv \mathbf{y}^{(n)} + A_1(x)\mathbf{y}^{(n-1)} + A_2(x)\mathbf{y}^{(n-2)} + \ldots + A_n(x)\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y} + \mathbf{f}', \quad (1)$$

$$U_\nu(\mathbf{y}) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \Gamma_{\nu j}\mathbf{y}^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \Delta_{\nu j}\mathbf{y}^{(j)}(b) = 0, \quad \nu = \overline{1,n}, \qquad (2)$$

де $A_i = B_i'$, $B_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ – матриці-функції l-го порядку, елементами яких є неперервні праворуч функції обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації, матриця-функція $B_1(x)$ є неперервною на $[a,b]$, $\mathbf{y}(x)$ – вектор-стовпець, $\mathbf{f}(x)$ – вектор, всі компоненти якого є функціями обмеженої на проміжку $[a,b]$ варіації. Тут штрихом позначено узагальнене диференціювання, і тому елементи матриць $A_i(x)$ є мірами.

Встановлено, що розв'язок крайової задачі (1), (2), за припущення, що λ не є її власним значенням, можна подати у вигляді $\mathbf{y}(x) = \int_a^b G(x,t,\lambda)d\mathbf{f}(t)$, де матриця-функція Ґріна $G(x,t,\lambda)$, аналогічно функції Ґріна в класичному розумінні (див., напр., [1]), має такі властивості: похідні за першою змінною $G^{(k)}(x,t,\lambda)$ $(k = \overline{0,n-2})$ є неперервними функціями двох змінних x, t; функція $G^{(n-1)}(x,t,\lambda)$ має обмежену на проміжку $[a,b]$ варіацію за першою змінною; функція $G(x,t,\lambda)$ за x задовольняє однорідне матричне рівняння, відповідне рівнянню (1) та крайові умови (2); при $x = t$ функція $G(x,t,\lambda)$ задовольняє умови стрибка, аналогічні [2]; при $x \neq t$, якщо λ не є власним значенням відповідної крайової задачі, функції Ґріна спряжених крайових задач пов'язані між собою рівністю $G(x,t,\lambda) = H^*(t,x,\lambda)$.

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
2. Махней О. В. Функція Гріна сингулярного диференціального оператора та її властивості // Матем. студії. – 2002. – **18**, № 2. – С. 147-156.

Роман Мацюк

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
matsyuk@lms.lviv.ua

ПРО ВАРІЯЦІЙНІСТЬ ГЕОДЕЗІЙНИХ КІЛ У 2–ВИМІРНІЙ ПСЕВДОРІМАНІВСЬКІЙ ГЕОМЕТРІЇ

У пласко́му 2–вимірному просторі-часі існує, в досить вузькому розумінні, єдине (векторне) інваріянтне рівняння третього порядку, яке описує усі лінії постійної кривини Френе, k_1, і яке задовільняє умову варіяційности:

$$\mathcal{E}_i = \frac{e_{ij}\ddot{u}^j}{\|\mathbf{u}\|^3} - 3\,\frac{(\dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{u})}{\|u\|^5}e_{ij}\dot{u}^j + m\,\frac{\|\mathbf{u}\|^2\dot{u}_i - (\dot{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{u})u_i}{\|\mathbf{u}\|^3} = 0 \qquad (1)$$

з локальною функцією Ляґранжа

$$L = \frac{e_{ij}\dot{u}^i\dot{u}^j}{\|\mathbf{u}\|^3} - m\,\|\mathbf{u}\|\,. \qquad (2)$$

Ми задались питанням, як надати рівнянню (1) „загально-коваріянтного“ вигляду зі збереженням властивості *варіяційнсти.* З цією метою зауважимо, що перший доданок функції Ляґранжа (2) можна уяснити собі, як функцію $\sqrt{k_1}$, котра, як відомо, не залежить від параметризації кривої, а другий доданок означує параметрично-інваріянтне варіяційне завдання. Скористаємо з такої властивості:

Якщо функція L_{II} є параметрично-незалежною, а функція L_{I} означує параметрично-незалежне варіяційне завдання, то L_{II} є сталою вздовж екстремалей варіяційного завдання з функцією Ляґранжа $L = L_{\mathrm{II}} + L_{\mathrm{I}}$.

Тому „загально-коваріянтне“ узагальнення рівняння (1) визначиться, як розв'язок варіяційного завдання

$$\int (k_1 - m\,\|\mathbf{u}\|)dt\,.$$

Іван Медвідь

Львівський національний університет імені Івана Франка
johnmedvid@yahoo.com

ПАРАБОЛІЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ ФІЛЬТРАЦІЇ-АБСОРБЦІЇ БЕЗ УМОВ НА НЕСКІНЧЕННОСТІ

Нехай $n \geqslant 2$, $1 \leqslant m < n$ – натуральні числа, Ω_1 – необмежена область в $\mathbb{R}^m$, Ω_2 – обмежена область в $\mathbb{R}^{n-m}$. Покладемо $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Припустимо, що множина $\Omega \cap \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1^2 + \ldots + x_m^2 < i^2\}$ є областю і поверхня $\partial\big(\Omega \cap \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1^2 + \ldots + x_m^2 < i^2\}\big)$ є регулярною для кожного $i \in \mathbb{N}$. Нехай $p_i > 2$, $i = \overline{1, n}$; $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_m$, $p_{m+1} \leqslant p_{m+2} \leqslant \ldots \leqslant p_n$; $r > 1$.

В області $Q_T = \Omega \times (0, T)$ розглянуто мішану задачу для параболічного рівняння

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \big(a_i(x,t)|u_{x_i}|^{p_i-2}u_{x_i}\big)_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u +$$

$$+ |u|^{r-2}u = f(x,t), \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad 0 < t < T. \tag{3}$$

Встановлено достатні умови існування розв'язку задачі (1)-(3) без умов на нескінченності.

Оксана Медвідь

ІППММ ім.Я.С.Підстригача НАНУ
medvid@lms.lviv.ua

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ НАВАНТАЖЕНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Нелокальні крайові задачі для навантажених диференціальних рівнянь (тобто рівнянь, які поряд зі значеннями невідомої функції та її похідних в довільній точці області містять також їхні значення на многовидах нижчої розмірності) знаходять своє застосування в багатьох прикладних задачах. Умови розв'язності нелокальних дво- та багатоточкових задач для лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними, навантажених на скінченній кількості гладких гіперповерхонь, встановлено в роботах В.М.Борок, М.Т.Дженалієва, В.С.Ільківа, М.М.Симотюка.

Доповідь присвячено викладу результатів, отриманих при дослідженні такої задачі:

$$\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n}+\sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}(D)\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j} = F(t,x)+\sum_{j=1}^{m} B_j(D)u(t,x)|_{t=\tau_j}, \quad (1)$$

$$\int_0^T t^{j-1}u(t,x)dt = \varphi_j(x), \quad j=\overline{1,n}, \quad (2)$$

де $(t,x)\in(0,T)\times\Omega_p$, $\Omega_p=(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, $D=(-i\partial/\partial x_1,\ldots,-i\partial/\partial x_p)$, $A_j(\xi_1,\ldots,\xi_p)$, $j=\overline{1,n}$, $B_j(\xi_1,\ldots,\xi_p)$, $j=\overline{1,m}$, — многочлени з комплексними коефіцієнтами, τ_j, $j=\overline{1,m}$, — різні точки відрізка $[0,T]$.

Розв'язність задачі (1), (2) пов'язана із проблемою малих знаменників, для оцінки знизу яких використано результати розділу 2 з [1].

Дослідження частково підтримані Державним фондом фундаментальних досліджень України (проект № 14.1/017).

1. Симотюк М.М. Багатоточкові задачі для лінійних диференціальних та псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними // Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2005. – 193 с.

Ігор Мединський, Степан Івасишен

Національний університет "Львівська політехніка"
ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України

ПРО ГЛОБАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ДЕЯКИХ КВАЗІЛІНІЙНИХ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглядається в шарі $\Pi \equiv (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$ задача Коші

$$\begin{aligned}(Au)(t,x) &= f(t, u(t,x)), \quad (t,x) \in \Pi,\\ u(t,x)|_{t=0} &= \varphi(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,\end{aligned} \tag{1}$$

де

$$A \equiv \partial_t - \sum_{j=1}^{n_3} x_{1j}\partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_2} x_{2j}\partial_{x_{3j}} - \sum_{j,k=1}^{n_1} a_{jk}\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1k}} - \sum_{j=1}^{n_1} b_j\partial_{x_{1j}} - c$$

– ультрапараболічний диференціальний вираз типу Колмогорова, в якому n_1, n_2, n_3 — натуральні числа такі, що $n_1 \geq n_2 \geq n_3$, $n \equiv n_1 + n_2 + n_3$, $x_1 \equiv (x_{11}, ..., x_{1n_1}) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2 \equiv (x_{21}, ..., x_{2n_2}) \in \mathbb{R}^{n_2}$, $x_3 \equiv (x_{31}, ..., x_{3n_3}) \in \mathbb{R}^{n_3}$, числа a_{jk}, b_j, $\{j,k\} \subset \{1, ..., n\}$, і c є дійсними, причому матриця $(a_{jk})_{j,k=1}^{n_1}$ є симетричною і має додатні власні числа.

Функція $f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задовольняє умову

$$\exists\ C > 0\ \forall\ t \in [0, \infty)\ \forall\ \{u, u_1, u_2\} \subset \mathbb{R} : |f(t,u)| \leq C|u|^{1+\beta},$$

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leq C|u_1 - u_2| \max\{|u_1|^\beta, |u_2|^\beta\},$$

де β — додатна стала.

Знайдені умови на початкову функцію φ і праву частину f, за яких існує єдиний розв'язок задачі (1), визначений в шарі Π. При одержанні результатів використовується загальна теорема про існування глобального розв'язку з [1] та властивості відповідних потенціалів, породжених фундаментальним розв'язком рівняння $Au = 0$.

1. Івасишен С. Д., Мединський І.П. Про глобальні розв'язки задачі Коші для квазілінійних параболічних рівнянь // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, №2. – С. 31-38.

Сергій Ментинський

Національний університет „Львівська політехніка“
sergement@polynet.lviv.ua

ДВОСТОРОННІ НАБЛИЖЕННЯ ДО ПЕРІОДИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Повідомлення присвячене дослідженню одного двостороннього алгоритму відшукання періодичних розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$x'(t) = f(t, x), \tag{1}$$

де $f : (-\infty; +\infty) \times [a ; b] \to E$ – неперервна за сукупністю аргументів, періодична за t з періодом T функція, a, $b \in E$, E – напівупорядкований простір. Шукаємо розв'язки системи (1), котрі задовольняють умову

$$x(t_0) = x(t_0 + T) = x_0, \quad a \le x(t) \le b, \quad t \in (-\infty; +\infty). \tag{2}$$

Для дослідження використано чисельно-аналітичний метод із [1] та підхід до побудови двосторонніх методів із [2]. Двосторонні наближення до розв'язку задачі (1), (2) шукаємо за припущення, що праву частину рівняння (1) можна подати у вигляді B-монотонної (див. [3]) за змінними y, z функції $F(t, y, z)$, для якої $F(t, x, x) \equiv f(t, x)$. Встановлені умови монотонності та рівномірної щодо $t \in [0, T]$ збіжності до розв'язку задачі послідовностей верхніх та нижніх наближень.

1. Самойленко А.М., Ронто Н.И. Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 277 с.
2. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. – Киев: Наук. думка. – 1980. – 268 с.
3. Покорный Ю.В. О B-положиетльных и B-монотонных операторах // Проблемы математического анализа сложных систем.- Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та. – 1967. – вып. 1. – с. 58-63.

Вадим Мироник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ЛОКАЛЬНУ РІВНІСТЬ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ

Для рядів Фур'є сумовних на $[0, 2\pi]$ функцій добре відомий принцип локалізації Рімана: збіжність або розбіжність ряду Фур'є функції $f \in L_1([0, 2\pi])$ в точці залежить тільки від поведінки f в околі цієї точки.

Тригонометричні ряди з необмежено зростаючими коефіцієнтами дістали природну інтерпретацію у рамках теорії узагальнених функцій. Теорія ультрарозподілів і гіперфункцій, розвинена в працях Кете, Комацу, М.Л.Горбачука, В.І.Горбачук [1], дозволяє вивчати тригонометричні ряди з коефіцієнтами, які зростають швидше за будь-який степінь.

У багатьох просторах узагальнених функцій має зміст поняття „функціонали F_1 і F_2 збігаються на відкритій множині Q", тобто можна говорити про „локальну" рівність узагальнених функцій. Це дає можливість сформулювати проблему локалізації для рядів Фур'є узагальнених періодичних функцій. Особливо широкий клас таких узагальнених функцій вдалося виділити для методів підсумовування Абеля-Пуассона та Гаусса-Вейєрштрасса. В.І.Горбачук та М.Л.Горбачук довели [1], що в цьому випадку принцип локалізації справджується у класі рядів Фур'є ультрарозподілів Жевре.

Особливу увагу зображенню розподілів і вивченню їхніх властивостей приділяє у своїх працях Г.Бремерман. Теорема Бремермана про аналітичне зображення узагальнених функцій з простору $\mathcal{E}'$ перенесена Т.І.Готинчан на випадок класу $(S^1_\alpha)'$, $\alpha > 0$. За допомогою цієї теореми та безпосередніх наслідків з неї Т.І.Готинчан у співавторстві з В.В.Городецьким обґрунтували поняття „аналітичний функціонал рівний нулю на відкритій множині $Q \subset \mathbb{R}$" у випадку неперіодичних класів квазіаналітичних функцій типу S. Нами одержано такі ж результати у випадку певних класів аналітичних періодичних функцій.

1. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Тригонометрические ряды и обобщенные периодические функции // Докл. АН СССР. – 1981. – **257**, № 4.– С. 799–803.

Михайло Митрофанов

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України

АПРОКСИМАЦІЯ РІВНОМІРНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ В КОМПЛЕКСНИХ БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Нехай X є комплексним банаховим простором, Y — довільним банаховим простором. Визначимо відображення $B_{km} : X^{k+m} \to Y$ таким чином: $B_{km}(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+m})$ буде ненульовою k–лінійною формою відносно $x_i \in X,\ 1 \le i \le k \in \mathbb{N}$ і m–антилінійною формою відносно x_{k+j}.

Означення 1. Відображення B_n, $B_n : X^n \to Y$ називається квазі-n-лінійним, якщо воно подається у вигляді:

$$B_n(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+m}) = \sum_{k+m=n} c_{km} B_{km}(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+m}),$$

де $k + m = n$ та c_{km} приймає значення 0 або 1, але хочаб одне c_{km} відмінне від нуля.

Означення 2. Відображення F_n, $F_n : X \to Y$ називається n-однорідним квазіполіномом, якщо існує квазі-n-лінійне відображення B_n таке, що $F_n(x) = B_n(x, ..., x)$. У випадку $n = 0$, F_0 є константою в Y.

Означення 3. Відображення $F : X \to Y$ називається квазіаналітичним, якщо для кожної точки $x \in X$, існує окіл $V \subset X$, $x \in V$, такий що $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$, де F_n є n-однорідними неперервними квазіполіномами і ряд $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ збігається рівномірно в околі V за нормою простору Y.

Теорема. *Нехай X є сепарабельним. Поповнення простору $\tilde{H}(X, Y)$ квазіаналітичних функцій з простору X в простір Y є ізоморфним простору $C_U(X, Y)$ рівномірно неперервних функції з X в Y, якщо на просторі X існує розділяюча квазіаналітична функція Q.*

1. Mujica J. Complex Analysis in Banach Spaces. – North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford, 1986. – 434 p.
2. Boiso M. C., Hajek P. Analytic Approximations of Uniformly Continuous Functions in Real Banach Spaces // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2001. – 256. – P.80-98.

Володимир Михайлець, Надія Рева

Інститут математики НАН України
mikhailets@imath.kiev.ua, reva@imath.kiev.ua

ПРО ГРАНИЧНИЙ ПЕРЕХІД В ЛІНІЙНИХ СИСТЕМАХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Нехай $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$, а Y — єдиний розв'язок системи

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \quad Y(t_0) = I_m, \quad t, t_0 \in [a, b], \tag{1_0}$$

де коефіцієнт $A(\cdot) \in L_p([a,b], \mathbb{C}^{m\times m}) =: L_p^{m\times m}$, а I_m — одинична $(m \times m)$-матриця.

Дослідимо питання про коректність задачі (1_0) в просторі Соболєва $W_p^1([a,b], \mathbb{C}^{m\times m}) =: W_{1,p}^{m\times m}$ з нормою $\| \cdot \|_{1,p}$, яка сильніша за досліджену раніше (W.Reid, Z.Opial, А.Ю.Левін) рівномірну. Введемо метричні простори матриць-функцій

$$\mathcal{Y}_{p,t_0} := \{Y(t) \in W_{1,p}^{m\times m} : Y(t_0) = I_m, \det Y(t) \neq 0\},$$

$$d_{p,t_0}(Y, Y_0) := \|Y(\cdot) - Y_0(\cdot)\|_{1,p}.$$

Теорема 1. *Нелінійне відображення* $A(\cdot) \mapsto Y(\cdot)$ *в задачі* (1_0) *є гомеоморфізмом банахового простору* $L_p^{m\times m}$ *на метричний простір* $\mathcal{Y}_{p,t_0}$ *при кожному* p *та* t_0.

Розглянемо тепер сім'ю неоднорідних задач Коші

$$Y_\varepsilon'(t) = A_\varepsilon(t)Y_\varepsilon(t) + F_\varepsilon(t), \quad Y_\varepsilon(t_\varepsilon) = C_\varepsilon, \tag{2_ε}$$

де $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$; $A_\varepsilon(\cdot), F_\varepsilon(\cdot) \in L_p^{m\times m}$; $C_\varepsilon \in \mathbb{C}^{m\times m}$; $t, t_\varepsilon \in [a, b]$.

Теорема 2. *Якщо при* $\varepsilon \to 0$ *та* $p \in [1, \infty]$ *виконані умови* :

$$\| A_\varepsilon(\cdot) - A_0(\cdot)\|_p \to 0, \quad \| F_\varepsilon(\cdot) - F_0(\cdot)\|_p \to 0, \quad C_\varepsilon \to C_0, \quad t_\varepsilon \to t_0,$$

то розв'язки задач (2_ε) *належать класу* $W_{1,p}^{m\times m}$, *а*

$$\| Y_\varepsilon(\cdot) - Y_0(\cdot)\|_{1,p} \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{3}$$

Теорема 1 показує, що норма $\| \cdot \|_{1,p}$ в (3) є оптимальною. Аналог теореми 2 є правильним і для лінійних систем диференціальних рівнянь *довільного* порядку, а також для однозначно розв'язних неоднорідних *двоточкових* крайових задач.

Володимир Михайлюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО РОЗРИВИ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ НА ДОБУТКАХ КОМПАКТІВ

З теореми Наміоки [1] випливає, що для довільних компактних просторів X,Y і нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ множина $D(f)$ точок розриву функції f міститься в добутку $A \times B$ множин A і B першої категорії в X і Y відповідно. У зв'язку з цим у [2] сформульовано задачу про опис множин точок розриву нарізно неперервних функцій на добутках двох компактних просторів.

Теорема 1. *Нехай X, Y – повні за Чехом простори, $(E_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовність сепарабельних компактних досконалих проективно ніде не щільних G_δ-множин E_n в $X \times Y$ і $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ така, що $D(f) = E$.*

Теорема 2. *Нехай X, Y – повні за Чехом простори, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$, $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ – послідовності ніде не щільних компактних G_δ-множин A_n і B_n в просторах X і Y відповідно, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ і $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Тоді існує нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ така, що $\mathrm{pr}_X D(f) = A$ і $\mathrm{pr}_Y D(f) = B$.*

Теорема 3. *Існують компакти Еберлейна X і Y, функціонально замкнені ніде не щільні в X і Y відповідно множини A і B такі, що $D(f) \neq A \times B$ для довільної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$.*

Теорема 4. *Існують сепарабельні компакти Валдівіа X і Y, функціонально замкнені сепарабельні ніде не щільні в X і Y відповідно множини E і F такі, що $D(f) \neq E \times F$ для довільної нарізно неперервної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$.*

1. Namioka I. Separate continuity and joint continuity // Pacif. J. Math. – 1974. – **51**, No. 2. – P. 515–531.

2. Piotrowski Z. Separate and joint continuity // Real. Anal. Exch. – 1985-86. – **11**, No. 2. – P. 283–322.

Богдан Михальчук

Луцький державний технічний університет
mbr@abbyy.ua

НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ РОЗВ'ЯЗНОСТІ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНОЇ ЗАДАЧІ В КЛАСІ ІЛД

Дана доповідь присвячена необхідним та достатнім умовам існування інтерполяційного інтегрального ланцюгового дробу (ІІЛД).

Нехай маємо достатньо гладкий функцонал $F(x(\cdot)) : Q[0,1] \to \mathrm{R}^1$ та n - поверховий інтегральний ланцюговий дріб (ІЛД) вигляду

$$Q_n(x(\cdot)) = \\ = K_0 + \int\limits_0^1 \cfrac{K_1(z_1)[x(z_1) - x_0(z_1)]dz_1}{1 + \int\limits_{z_1}^1 \cfrac{K_2(z_1,z_2)[x(z_2)-x_1(z_2)]dz_2}{1 + \ddots + \int\limits_{z_{n-1}}^1 K_n(z_1,...,z_n)[x(z_n) - x_{n-1}(z_n)]dz_n}}$$

В роботах [1], [2] знайдено необхідні (формули для знаходження ядер) та достатні (правило підстановки) умови для того, щоб ІЛД наведеного вигляду був інтерполяційним для функціоналу $F(x(\cdot))$ на континуальній множині вузлів $x^n(z, \vec{\xi^n})$, $\forall \vec{\xi^n} \in \bar{\Omega}_n$

$$x^n(z, \vec{\xi^n}) = \sum_{i=0}^{n} H(z - \xi_i)[x_i(z) - x_{i-1}(z)],$$

$\vec{\xi^n} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \bar{\Omega}_n, \bar{\Omega}_n = \left\{(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in R^1 : 0 \le \xi_1 \le \ldots \le \xi_n \le 1\right\}$, $H(z)-$ функція Хевісайда, $x_{-1}(z) \equiv 0, \quad \xi_0 = 0.$

1. Михальчук Б.Р. Інтерполяція нелінійних функціоналів за допомогою інтегральних ланцюгових дробів // Укр. мат. журн. — 1999. — **51**, №3. — С.364-375.
2. Макаров В.Л., Хлобистов В.В., Михальчук Б.Р. Інтерполяційні інтегральні ланцюгові дроби // Укр. мат. журн. — 2003. — **55**, №4. — С.479-488.

Viktor Mykhas'kiv, Oksana Khay, Mykola Hrylytskyj

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, NAS of Ukraine
Lviv Department of Dnipropetrovsk Nat. Univ. of Railroad Transport
tex@iapmm.lviv.ua

APPLICATION OF KUPRADZE FUNDAMENTAL SOLUTIONS IN 3-D TIME-HARMONIC PROBLEMS OF THIN INCLUSION THEORY

In this work the boundary integral equations method is extended to the 3-D time-harmonic problems of wave propagation in an infinite elastic solid containing a plane rigid inclusion of specified mass, which supposes translation and rotation. The displacement and stress components in such a composite are given in terms of surface integrals, where the Kupradze fundamental solutions are the kernels and the jumps of interfacial stresses across the inclusion are the unknown densities. Then the boundary integral equations for these functions are deduced by satisfying the conditions of displacement linearity in the inclusion place. For the completeness the equations of motion of the inclusion as a rigid unity are added to the obtained integral equations with polar kernels. Accounting the dynamic stress concentration in the vicinity of a circular inclusion is provided by multiplicative square-root extraction from the functions, which are to be found. The subsequent regularization of equations bases on the mapping of integration domain into the rectangular domain. The collocation technique in a frequency domain is applied to construct the discrete analogues of problems as the systems of linear algebraic equations. The dependence of the displacement of the inclusion as a rigid unit and also the stress concentration in its neighbourhood on the wave number is investigated for two cases of the diffraction by a disk-shaped inclusion of a plane longitudinal wave with a wave front that is parallel and perpendicular to it.

This research was supported by INTAS (under Project No. 05–1000008–7979). The financial support is gratefully acknowledged.

Zoryana Mozhyrovska

Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics NASU

SPECTRAL PROPERTIES OF COMPOSITION OPERATORS

Let E be a separable complex Hilbert space with the orthonormal basis (e_k), inner product $(\cdot \mid \cdot)$. Denote by E^∞ the symmetric Fock space which is the ℓ_2-sum of the symmetric tensor products $\otimes_s^n E$ of E for $n = 0, 1, \ldots, \infty$. Notice that the vectors $e_{i_1} \otimes_s \cdots \otimes_s e_{i_n}$, $n = 0, 1, \ldots, \infty$ in E^∞ generate an orthogonal basis and

$$\|e_{i_1}^{k_1} \otimes_s \cdots \otimes_s e_{i_n}^{k_n}\|^2 = \frac{k_1! \cdots k_n!}{(k_1 + \cdots + k_n)!},$$

where $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n$ [1].

Let $\eta : E \to E^\infty$ be the canonic embedding which is defined by the formula $\eta(x) = 1 + x + \cdots + \underbrace{x \otimes \cdots \otimes x}_{n} + \cdots$. In [2] and [3] there was shown that for every element w from $(E^\infty)^* := \mathcal{H}_\eta^2(E)$ there exists an analytic function f on E such that $f(x) = w(\eta(x)) = \langle \eta \mid w \rangle$, where $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ is inner product in $\mathcal{H}_\eta^2(E)$.

For mapping $F : E \to E$ we define the operator $T_F : \mathcal{H}_\eta^2(E) \to \mathcal{H}_\eta^2(E)$, $T_F(f) = f \circ F$.

Theorem *Let F be a linear operator, T_F is normal operator on $\mathcal{H}_\eta^2(E)$. Then there exists a decomposition of unit $\underbrace{\mathcal{E}_\lambda \otimes \cdots \otimes \mathcal{E}_\lambda}_{n}$ in $E^{\otimes n}$, so that $T_F = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\sigma(F)} \cdots \int\limits_{\sigma(F)} \lambda_1 \cdots \lambda_n d\mathcal{E}(\lambda_1) \otimes \cdots \otimes d\mathcal{E}(\lambda_n)$.*

1. Березанский Ю.М., Кондратьев Ю.Г. Спектральные методы в бесконечномерном анализе. – Киев: Наук. думка, 1988. – 680 с.
2. Загороднюк А.В., Лопушанський О.В. Класи функцій H_2 в одиничній кулі гільбертового простору // Доповіді НАН України. – 2001. – №5. – С.13–18.
3. Lopushansky O.V., Zagorodnyuk A.V. Hilbert spaces of analytic functions of infinitely many variables // Annales Polonici Mathematici. – 2003. – **81** (2). – P. 111–122.

Ирина Молчанюк

Одесская государственная академия строительства и архитектуры
i-molchanyuk@ukr.net

СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ НЕЧЕТКОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим следующее дифференциальное включение

$$\dot{x} \in A(t)x + B(t)u + C(t)V \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

где $x \in R^n$ – фазовый вектор; $u(t) \in U(t)$ – вектор управления; $U(\cdot) : R^1 \to Conv(R^m)$ – многозначное отображение; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ - матрицы размерностей $(n \times n)$, $(n \times m)$, $(n \times k)$ соответственно; $v \in R^k$ – нечеткое внешнее воздействие (помеха); $v(t) \in V$ – нечеткое множество с характеристической функцией $\mu(x)$, $\mu(\cdot) : R^k \to [0,1]$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) матрицы $A(t)$ $B(t)$, $C(t)$, измеримы на R^1; 2) существуют константы $a > 0, b > 0, c > 0$, такие, что $\|A(t)\| \le a$, $\|B(t)\| \le b$, $\|C(t)\| \le c$ для почти всех $t \in R^1$; 3) многозначное отображение $U(t)$ измеримо на R^1; 4) сущесвует константа $g > 0$ такая, что $\|U(t)\| \le g$ для почти всех $t \in R^1$; 5) характеристическая функция $\mu(\cdot) : R^1 \to [0,1]$ удовлетворяет условиям: а) модальная, т.е. существует хотя бы одно $y_0 \in R^k$ такое, что $\mu(y_0) = 1$; б) $\mu(y)$ непрерывна по y; в) для любого $\varepsilon > 0$ и $y \in \{y \in R^k \mid 0 < \mu(y) < 1\}$ существуют $y_1, y_2 \in R^k$ такие, что $\|y - y_1\| < \varepsilon, \|y - y_2\| < \varepsilon$ и $\mu(y_1) < \mu(y) < \mu(y_2)$; г)множество $[V]^0 = cl\{y | \mu(y) > 0\}$ компактно.

Обозначим через $[X(u)]^\alpha$ пучок траекторий системы (1), соответствующих допустимому управлению $u(\cdot)$, а через $[X(\cdot, u)]^\alpha$- соответствующее сечение пучка $[X(u)]^\alpha$ в момент времени $t > 0$.

В докладе рассматриваются свойства пучка траекторий системы (1): общий вид сечения пучка, его компактность, абсолютная неприрывность при допустимых управлениях [1].

1. Молчанюк И.В., Плотников А.В. Линейные системы управления с нечеткими параметрами // Нелінійні коливання – 2006. – **9**, №1. – С. 61-66.

А.З. Мохонько, Л.І. Куземко

Національний університет „Львівська політехніка“
lubzja@litech.net

ПРО АЛГЕБРОЇДНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З АЛГЕБРОЇДНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Доведена наступна теорема.

Теорема. *Нехай дано диференціальне рівняння*

$$y^{(n)}+a_{n-1}(z)\,y^{(n-1)}+\ldots+a_{\mu+1}(z)\,y^{(\mu+1)}+a_{\mu}(z)\,y^{(\mu)}+\ldots+a_0(z)\,y=0, \tag{1}$$

де $a_j(z), z\in C, j=0,1,\ldots,n-1,$ *– алгеброїдні функції. Якщо функції* $a_{n-1}(z),\ldots,\ a_{\mu+1}(z)$, *такі що*

$$\begin{array}{c} m(r,a_{n-1})=o(\ln r)\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ m(r,a_{\mu+1})=o(\ln r)\,, \end{array}$$

а функція $a_\mu(z)$ *така, що*

$$m(r,a_\mu)\neq o(\ln r)\,,$$

то рівняння (1) має не більше ніж μ *лінійно незалежних алгеброїдних розв'язків порядку* $\rho\leq 1/2$.

Ця теорема уточнює і узагальнює відомий результат М. Фрей для однозначних мероморфних розв'язків рівняння (1) з однозначними коефіцієнтами.

Леся Мочурад, Борис Остудін

Львівський національний університет імені Івана Франка
kom@franko.lviv.ua

ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ В ЕЛЕКТРОННІЙ ОПТИЦІ З АБЕЛЕВОЮ ГРУПОЮ СИМЕТРІЇ СКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Відомо, що синтез електронно-оптичних систем складної структури практично неможливо реалізувати без етапу попереднього чисельного моделювання і аналізу, оскільки останє дає змогу реально переглянути десятки варіантів шуканої конструкції та обрати найкращий. На цьому етапі виникає проблема чисельного розв'язування досить складних зовнішніх граничних задач теорії потенціалу на незамкнених поверхнях.

Для математичного моделювання проблеми у так званому плоскому випадку припустимо, що $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{\nu} \Gamma_j$ об'єднання скінченної кількості ν простих, кусково-гладких, замкнених або розімкнених дуг на площині $0x_1x_2$. Потрібно розв'язати таку класичну (з точки зору запасу гладкості шуканої функції $u(x)$) задачу Діріхле для рівняння Лапласа:

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \backslash \Gamma, \quad x = (x_1, x_2), \tag{1}$$

$$u(x) = g(x), \quad x \in \Gamma, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^2} |u(x)| < \infty. \tag{2}$$

Два уточнення щодо формулювання проблеми. По-перше, функція $g(x)$ відома, виражає граничні значення потенціалу на відповідних ділянках межі ($g(x) = g_i \equiv \mathrm{const}$ майже для всіх $i \in \{1, 2, ..., v\}$). По-друге, вважаємо, що розв'язок задачі (1)-(2) задовольняє певні умови в околі особливих точок кривої Γ (умови на "ребрі").

На прикладі розв'язування цієї задачі проаналізовано методику, в основі якої лежить метод інтегральних рівнянь, декомпозиція складних областей, апарат функцій Гріна та врахування симетрії окремих елементів межі. Проведене дослідження ілюструє загальний підхід до розв'язування складної задачі математичної фізики, який має на меті максимально використати всі особливості досліджуваної проблеми.

Оксана Мулява, Мирослав Шеремета

Київський національний університет харчових технологій
Львівський національний університет імені Івана Франка
tftj@franko.lviv.ua

ПРО НАЛЕЖНІСТЬ АБСОЛЮТНО ЗБІЖНИХ У ПІВПЛОЩИНІ РЯДІВ ДІРІХЛЕ ДО КЛАСУ ЗБІЖНОСТІ

Нехай $\Lambda = (\lambda_n)_{n=0}^{\infty}$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел ($\lambda_0 = 0$), а $S^0(\Lambda)$ – клас рядів Діріхле $F(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$, $s = \sigma + it$, з абсцисою абсолютної збіжності $\sigma_a = 0$. Для $\sigma < 0$ нехай $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, а $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}$ – максимальний член ряду. Якщо функція F має ненульовий скінченний порядок ϱ, то за означенням вона належить до класу збіжності тоді і тільки тоді, коли

$$\int\limits_{-1}^{0} |\sigma|^{\varrho-1} \ln M(\sigma, F) d\sigma < +\infty. \tag{1}$$

Правильне таке твердження.

Теорема. *Умова* $\ln\ln n = o(\ln \lambda_n)$ $(n \to \infty)$ *є необхідною і достатньою для того, щоб для всіх* $\varrho > 0$ *і* $F \in S^0(\Lambda)$ *співвідношення* (1) *і*

$$\int\limits_{-1}^{0} |\sigma|^{\varrho-1} \ln \mu(\sigma, F) d\sigma < +\infty.$$

були рівносильними.

Aleksandr Murach

Institute of Mathematics of NASU
murach@imath.kiev.ua

ELLIPTIC SYSTEMS IN REFINED SCALE OF SPACES

The talk deals with applications of some function spaces of generalized smoothness to the theory of elliptic linear partial differential equations. We consider a Hilbert scale of the isotropic spaces of Hörmander–Volevich–Paneyah

$$H^{s,\varphi} := H_2^{\langle\cdot\rangle^s \varphi(\langle\cdot\rangle)}, \quad \langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2},$$

parametrized by means of two parameters. The first parameter is a real number, the second one is a function φ slowly varying at $+\infty$ in the Karamata's sense. For example,

$$\varphi(t) = (\log t)^{r_1} (\log\log t)^{r_2} \ldots (\log \ldots \log t)^{r_n}, \ \{r_1, \ldots, r_n\} \subset \mathbb{R},\, n \in \mathbb{N}.$$

The scale is refined with respect to the Sobolev scale $\{H^s\} \equiv \{H^{s,1}\}$.

We consider a linear elliptic system on a closed smooth manifold. The following questions are studied [1–3]:

- local refined regularity of solutions;
- refined a priori estimates of solutions;
- Fredholm property of the system in the refined scale;
- elliptic systems with a parameter.

1. Mikhailets V. A., Murach A. A. An elliptic operator in the refined scale of spaces on a closed manifold // Reports Nat. Acad. Sci. Ukraine. – 2006. – № 10. – C. 27 – 33.
2. Murach A. A. Elliptic systems of differential equations in the sense of Petrovskij in the refined scale of spaces on a closed manifold // Ibid. – 2007. – № 5.
3. Murach A. A. Elliptic pseudodifferential operators in the refined scale of spaces over a closed manifold // Ukr. Math. J. – 2007. – **59**, № 6.

Роман Мусій, Любомир Гошко, Наталія Мельник, Йосип Шимчак

ІППММ ім. Я.С.Підстригача НАН України
Національний університет „Львівська політехніка“
Політехніка Опольська, Польща

ЗАДАЧІ ТЕРМОМЕХАНІКИ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ТІЛ ЗА ДІЇ ІМПУЛЬСНИХ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ПОЛІВ З МОДУЛЯЦІЄЮ АМПЛІТУДИ

Сформульовано задачі математичної фізики, що описують електромагнітні, теплові і механічні процеси в електропровідних тілах за дії імпульсних електромагнітних полів (ЕМП) з модуляцією амплітуди. Розглянуто ЕМП, що належать до класу імпульсних "неруйнівних", дія яких ще не призводить до виникнення ударних хвиль. При цьому у вихідній математичній моделі враховано експериментально встановлений у фізиці надсильних ЕМП і термомеханіці динамічних систем адіабатичний характер процесів нагріву і деформування за дії розглядуваних імпульсних ЕМП та неістотність впливу рухомості середовища на характеристики ЕМП.

Дію ЕМП на матеріальний континуум зведено до двох факторів впливу – джоулевих тепловиділень і пондеромоторних сил. За ключові функції вибрано вектор напруженості магнітного поля, температуру і тензор напружень.

Для тіл канонічної форми запропоновано наближену методику розв'язування складових задач електродинаміки параболічного типу та термопружності параболічного та гіперболічного типів, що ґрунтується на кубічній апроксимації розподілів всіх ключових функцій за відповідною координатною змінною – товщинною для порожнистих циліндричних і сферичних тіл та тіл з плоскопаралельними границями і радіальною – для суцільних циліндрів і куль.

З використанням методики отримано клас розв'язків задач про термомеханічну поведінку циліндричних тіл за дії однорідних за координатами імпульсних ЕМП з модулюючими сигнлами типів одиночного імпульса і згасної синусоїди. На основі проведеного аналізу виявлено нові дані про залежність термомеханічної поведінки циліндричних тіл від параметрів ЕМП та характеристик матеріалу.

Тарас Нагірний, Костянтин Червінка

Центр математичного модулювання ІППММ
ім. Я.С. Підстригача НАН України
Львівський національний університет імені Івана Франка
k.tchervinka@gmail.com

ДО МЕТОДИКИ ВИЗНАЧЕННЯ ЕНЕРГІЇ ВЗАЄМОДІЇ НА ПОВЕРХНІ ДЕФОРМІВНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

Одним із параметрів моделі деформівного твердого тіла за локально градієнтного підходу в термомеханіці [1] є хімічний потенціал η, збурення якого ототожнюється із збуренням енергії взаємодії. Під час постановки задач математичної фізики необхідно задавати умови на хімічний потенціал на поверхні тіла $\eta|_\Sigma = \eta_a$. При цьому виникає питання умов, із яких це поверхневе значення може бути визначеним.

Як таку умову пропонується використати умову балансу маси для тіла, оскільки у відліковій та актуальній конфігураціях маса повинна співпадати

$$\int_V \varrho \, dV = \int_{V_*} \varrho_* \, dV_*,$$

де V, ϱ – об'єм та густина тіла у актуальний, а V_*, ϱ_* – у початковий моменти часу. Перехід від початкової до актуальної конфігурацій може бути здійснений за допомогою тензора деформації $\hat{e}$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial V_*} \, dV_* \approx (1 + e) \, dV_*,$$

де e – кульова складова $\hat{e}$. Тому із співвідношення

$$\int_{V_*} [\varrho \, (1 + e) - \varrho_*] \, dV_* = 0$$

можна визначити поверхневе значення збурення хімічного потенціалу η_a як функцію геометричних та матеріальних характеристик тіла, а також граничних значень та умов на інші фізико-механічні поля.

1. Бурак Я.Й., Чапля Є.Я., Нагірний Т.С. та інші. Фізико-математичне моделювання складних систем. – Львів: СПОЛОМ, 2004. – 264 с.

Василь Нестеренко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ПРО ВЛАСТИВІСТЬ ГАНА

Властивість відображень $f : X \times Y \to Z$, для яких існує залишкова в X множина A така, що $A \times Y \subseteq C(f)$, називається *властивістю Гана.* Ж. Кальбрі та Ж. Труалік одержали теорему, яка вказує на те, що відображення з класу $CC(X \times Y, Z)$ нарізно неперервних відображень мають властивість Гана, коли X — топологічний простір, простір Y задовольняє другу аксіому зліченності, Z — метризовний простір. В. Маслюченко переніс цей результат на випадок відображень з класів $\overline{C}C$, KC і $\overline{K}C$. Пізніше В. Маслюченко і В. Нестеренко розширили результат Кальбрі-Труаліка на функції з класу K_hC горизонтально квазінеперервних і неперервних відносно другої змінної відображень. У зв'язку з цими результатами виник новий клас просторів. Ми кажемо, що топологічний простір Y є *простором Гана*, якщо для довільного топологічного простору X і довільного метризовного простору Z кожне відображення f з $\overline{C}C(X \times Y, Z)$, класу всіх відображень $f : X \times Y \to Z$, які неперервні відносно другої змінної і неперервні відносно першої змінної при значеннях другої змінної, що пробігає деяку всюди щільну множину в Y, має властивість Гана. Зрозуміло, що кожний простір, який задовольняє другу аксіому зліченності, є простором Гана. Навпаки, взагалі кажучи, не вірно.

Встановлено, що відображення $f : X \times Y \to Z$ з класу $K_hC(X \times Y, Z)$ або з класу всіх відображень, які неперервні відносно другої змінної і квазінеперервні за сукупністю змінних, мають властивість Гана, коли простір Y не задовольняє другій аксіомі зліченності, а є простором Гана з деякими додатковими властивостями.

Теорема 1. *Нехай X — топологічний простір, Y — сепарабельний з першою аксіомою зліченності простір Гана, Z — метризовний простір і $f \in K_hC(X \times Y, Z)$. Тоді f має властивість Гана.*

Теорема 2. *Нехай простір X задовольняє другу аксіому зліченності, Y — берівський простір, який є простором Гана і кожна всюди щільна множина є сепарабельною, Z — метризовний сепарабельний простір і відображення $f : X \times Y \to Z$ квазінеперервне за сукупністю змінних і неперервне відносно другої змінної. Тоді відображення f має властивість Гана.*

Ольга Нестеренко

Інститут математики НАН України

ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ З ОБМЕЖЕННЯМИ

Розглядається інтегро-диференціальне рівняння

$$(Ly)(x) = f(x) + \xi(x)\lambda + \int_a^b H(x,t)(My)(t)dt \tag{1}$$

і ставиться задача знаходження такої функції $y \in W_2^m[a,b]$ та параметра $\lambda \in \mathbb{R}^n$, які задовольняють рівняння (1) майже скрізь, крайові умови та обмеження

$$U(y) = \gamma, \quad \int_a^b S(x)y(x)dx = \alpha. \tag{2}$$

В рівнянні (1) та формулах (2) $\gamma \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}^n$,

$$(Ly)(x) = y^{(m)}(x) + \sum_{s=1}^{m} p_s(x)y^{(m-s)}(x), \quad (My)(x) = \sum_{s=0}^{l} q_s(x)y^{(l-s)}(x),$$

коефіцієнти $\{p_m, q_l\} \subset L_2[a,b]$, $f \in L_2[a,b]$. $(1 \times n)$-матриця $\xi(x)$, $(n \times 1)$-матриця $S(x)$, елементи яких лінійно-незалежні функції сумовні з квадратом на відрізку $[a,b]$, стала $(m \times 1)$-матриця U, ядро $H(x,t)$ сумовне з квадратом за сукупністю змінних.

В доповіді висвітлюються умови існування розв'язку задачі та ітераційний процес:

$$z_k(x) = f(x) + (By_{k-1})(x) + \int_a^b H(x,t)(My_{k-1})(t)dt,$$

$$(Ay)(x) = \xi(x)\lambda_k + z_k(x), \quad U(y_k) = \gamma, \quad \int_a^b S(x)y_k(x)dx = \alpha,$$

де $(Ay)(x) = y^{(m)}(x) + \sum\limits_{s=1}^{m} c_s(x)y^{(m-s)}(x)$, $(By)(x) = (Ay)(x) - (Ly)(x)$, а також умови збіжності запропонованого методу.

Ольга Нікітіна

Чернівецький факультет національного технічного університету „Харківський політехнічний інститут“

МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЇ ТЕПЛА В ОБМЕЖЕНИХ ТОРОЇДАЛЬНИХ ОБЛАСТЯХ З М'ЯКИМИ МЕЖАМИ

Моделювання дифузії тепла в обмежених кусково-однорідних тороїдальних областях з м'якими межами призводить до побудови обмеженого в області $D = \{(t,r) : t \in (0,\infty), r \in \bigcup\limits_{j=1}^{n+1}(R_{j-1}, R_j);\ R_0 > 0, R_{n+1} = R > 0\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь теплопровідності $\Lambda_{(\mu)}$-параболічного типу

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \gamma_j^2 u_j - a_j^2 \Lambda_{(\mu)_j}[u_j] = f_j(t,r), \quad j = \overline{1, n+1}, \tag{1}$$

за початковими умовами

$$u_j(t,r)|_{t=0} = g_j(r), r \in (R_{j-1}, R_j), j = \overline{1, n+1}, \tag{2}$$

однорідними умовами спряження

$$\left(L_{j1}^k[u_k] - L_{j2}^k[u_{k+1}]\right)\Big|_{r=R_k} = 0; \quad j = 1,2, k = \overline{1,n} \tag{3}$$

та крайовими умовами

$$\left(L_{11}^0[u_1(t,r)]\right)\Big|_{r=R_0} = \omega_0(t), \left(L_{22}^{n+1}[u_{n+1}(t,r)]\right)\Big|_{r=R} = \omega_{n+1}(t). \tag{4}$$

У системі (1) беруть участь узагальнені диференціальні оператори Лежандра $\Lambda_{(\mu)_j}$, а в умовах спряження та в крайових умовах – диференціальні оператори

$$L_{jm}^k = \left(\alpha_{jm}^k + \delta_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \beta_{jm}^k + \gamma_{jm}^k \frac{\partial}{\partial t}; j, m = 1, 2, k = \overline{0, n+1}.$$

За певних умов на коефіцієнти задачі (1)–(4) одержано єдине інтегральне зображення її розв'язку методом спеціально побудованого скінченного інтегрального перетворення Лежандра зі спектральним параметром на кусково-однорідному сегменті.

Алексей Николаев, Константин Барахов

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского

ЗАДАЧА КРУЧЕНИЯ КРУГОВЫМ ДИСКОМ ПРОСТРАНСТВА С ТРЕЩИНОЙ В ВИДЕ СФЕРИЧЕСКОГО СЕГМЕНТА

Рассматривается задача кручения жестким круговым диском упругого пространства с трещиной в виде сферического сегмента. Если радиус диска меньше радиуса сферического сегмента, то задача решается обобщенным методом Фурье (ОМФ). В случае, когда радиус диска больше радиуса сегмента, при произвольных граничных условиях на границах области система разрешающих уравнений ОМФ не регулярна. В работах [1,2] путем совместного применения метода потенциала и ОМФ получено решение задач теории упругости и теории потенциала для сферического сегмента и конуса, сферического сегмента и кругового диска, и сферического сегмента и цилиндра. На этом подходе и основана данная работа. Искомое поле перемещений представляется в виде линейной суперпозиции потенциала простого слоя сегмента и решения для диска в сжатых сфероидальных координатах. Граничные условия на диске удовлетворяются с использованием формулы сложения фундаментального решения уравнения Лапласа, которая выражает его через базисные гармонические функции в сжатых сфероидальных координатах. А на сегменте – путем точного решения интегрального уравнения типа потенциала простого слоя при помощи операторов интегрирования и дифференцирования дробного порядка, а также с использованием методики парных уравнений в рядах по функциям Лежандра. Задача сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с бесконечно гладким ядром.

1. Ніколаєв О. Г., Барахов К. П. Деякі типи фізичних полів в конусі з неоднорідністю у вигляді сферичного сегмента // Мат. методи та физ.-мех. поля. – 2005. – **48**, №4. – С. 191-198.
2. А.Г. Николаев, К.П. Барахов, Задача кручения жестким сферическим сегментом упругого пространства с жестким круговым диском // Теорет. и прикладная механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 14-19.

Алексей Николаев, Константин Корольков

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского
k405@ai.kharkov.com

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ЦИЛИНДРА СО СФЕРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Обобщенный метод Фурье решения краевых задач теории упругости распространен на существенно неосесимметричные пространственные многосвязные области, ограниченные поверхностями параболического цилиндра и сферой. С этой целью построены новые точные решения уравнения Ламе для односвязных областей, ограниченных поверхностью параболического цилиндра. От известных решений, полученные отличаются другим выбором вспомогательных гармонических функций и формой представления в виде базисных векторных решений, выраженных через векторные дифференциальные операторы первого порядка.

При построении существенно использованы интегральные представления базисных решений уравнения Лапласа для параболического цилиндра в виде интеграла по вещественной оси от ядра специального вида. Доказана базисность построенных решений.

С использованием теорем сложения базисных гармонических функций в координатах параболического цилиндра и сферических координатах получены подобные теоремы сложения для базисных решений уравнения Ламе.

Развитый математический аппарат обобщенного метода Фурье использован для исследования напряженно-деформированного состояния параболического цилиндра со сферической полостью.

Для примера рассмотрен случай, когда граница параболического цилиндра закреплена, а к поверхности сферы приложена произвольная осесимметричная нагрузка.

Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Исследованы условия разрешимости этой системы. Приведен численный анализ напряженно-деформированного состояния в зависимости от геометрических параметров задачи.

Алексей Николаев, Юнна Щербакова

Национальный аэрокосмический университет им. Н.Е. Жуковского

ОСНОВНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОГО ПАРАБОЛОИДА СО СФЕРОИДАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ

Обобщенный метод Фурье (ОМФ) развит на трансверсально изотропные многосвязные тела, ограниченные координатными поверхностями параболоидальной, вытянутой и сжатой сфероидальных систем координат. С этой целью построены новые базисные решения системы уравнений равновесия трансверсально изотропной среды в перемещениях для односвязных областей, ограниченных поверхностью параболоида вращения. В отличие от известных, полученные решения строятся при помощи других комбинаций базисных гармонических функций в параболоидальных координатах и представляются в виде базисных векторных функций. Отдельно рассмотрены случаи простых и кратных корней алгебраического уравнения совместности.

Для построенных решений доказана базисность в смысле определения, данная в работе [1].

При помощи математического аппарата ОМФ исследованы первая и вторая осесимметричные основные краевые задачи теории упругости для трансверсально изотропного параболоида со сфероидальной полостью.

В качестве примера численной реализации метода решена задача о круговой трещине нормального отрыва, центр которой расположен на оси трансверсально изотропного параболоида. Поверхность параболоида предполагается свободной от усилий, а ось анизотропии совпадающей с осью параболоида. Проведен численный анализ напряжений на поверхностях тела, а также коэффициента интенсивности напряжений на границе трещины в зависимости от геометрических параметров задачи.

1. Николаев А.Г. Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей // Доповіді НАН України. – 1998. – №2. — С.78–83.

Андрій Новосядло

Львівський національний університет імені Івана Франка
nandrew183@gmail.com

МОДЕЛЬНА ЗАДАЧА З НЕКЛАСИЧНОЮ КРАЙОВОЮ УМОВОЮ ВЕНТЦЕЛЯ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Нехай $D = \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, ..., x_n) : x_n > 0\}$ – область в $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, $S = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ - межа області D і $\overline{D} = D \bigcup S$ – замикання D. В області $(t, x) \in (0, \infty) \times D$ розглядається початково-крайова задача для лінійного параболічного рівняння другого порядку:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = Lu(t,x), \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times D, \tag{1}$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in \overline{D}, \tag{2}$$

$$L_0 u(t,x) + q(x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x_n} = 0, \qquad (t,x) \in (0,\infty) \times S, \tag{3}$$

де L, L_0 – лінійні рівномірно еліптичні оператори другого порядку з обмеженими та гельдеровими коефіцієнтами, які залежать лише від просторових змінних, а $q(x)$, $x \in S$, – обмежена рівномірно неперервна за Гельдером функція, до того ж $\inf\limits_{x \in S} q(x) > 0$.

Класичний розв'язок задачі (1)-(3) вперше знайдено нами методом граничних інтегральних рівнянь з використанням звичайного потенціалу простого шару. Відзначимо, що раніше задача (1)-(3) при додаткових обмеженнях щодо коефіцієнтів рівняння (1) досліджувалася методом потенціалу в [1], а в [2] подібна задача у більш загальній постановці вивчалася за допомогою методу регуляризації.

1. Копитко Б.І. Напівгрупи операторів, що описують дифузійний процес із загальними граничними умовами //Доповіді АН України. Математика. – 1995. № 9. – С. 15-18.
2. Базалий Б.В. Об одной модельной задаче со вторыми производными по геометрическим переменным в граничном условии для параболического уравнения второго порядка // Мат. заметки. – 1998. – **63**, вып. 3. – С. 468-473.

Олексій Онишко[1], Богдан Боженко [2,3], Аніда Станік-Беслер[2]

[1]ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
[2]Політехніка Опольська, Польща
[3]Центр математичного модулювання ІППММ
ім. Я.С. Підстригача НАН України

ВАРІАНТ МОДЕЛІ ДЛЯ ОПИСУ ТЕРМОМЕХАНІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ДЕФОРМІВНИХ ТВЕРДИХ ТІЛАХ З ЕФЕКТОМ ПАМ'ЯТІ ФОРМИ

При побудові моделей для кількісного опису термомеханічних процесів в деформівних твердих тілах з урахуванням впливу полів немеханічної природи за функцію термодинамічного стану часто приймають вільну енергію Гельмгольца. Такий підхід був застосований авторами при формулюванні моделі опису поведінки тіл з пам'яттю форми при термосиловому навантаженні та при подальшій модифікації її з метою окремого виділення зв'язку кульової та девіаторної частин тензорів напружень і деформацій зі змінами структури. За параметри стану, що відображають теплові процеси, вибрали температуру та ентропію, фазове перетворення характеризували відносним вмістом мартенситу та спорідненістю перетворення, механічні впливи, пов'язані із зміною об'єму, враховували через перші інваріанти тензорів напружень і деформацій, механічні впливи, пов'язані із зміною форми тіла — відповідно через інтенсивності напружень і деформацій. Вільна енергія тоді є функцією параметрів, що описують деформацію, температури та відносного вмісту мартенситу. Проте при використанні такої моделі для розв'язання конкретних задач постає проблема визначення характеристик матеріалу, пов'язаних зі зміною структури. Цю проблему простіше розв'язати, якщо за функцію термодинамічного стану взяти термодинамічний потенціал Гіббса, який є функцією не деформацій, а напружень. На його основі з відповідних рівнянь стану, балансових співвідношень, кінетичного рівняння, умов активного протікання структурних змін та співвідношень Коші, отримана нелінійна система диференціальних рівнянь моделі для області, в якій відбувається фазове перетворення. Ця система з відповідними крайовими умовами дозволяє оцінити напружений стан тіл з неоднорідним фазовим складом під дією заданого термомеханічного навантаження з урахуванням його впливу на фазові зміни.

Василь Осадчук, Тарас Николишин

Національний університет „Львівська політехніка”
ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України

A-ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ЗАДАЧІ ПРО ГРАНИЧНУ РІВНОВАГУ ВИГОТОВЛЕНОЇ З ФУНКЦІОНАЛЬНО ГРАДІЄНТНИХ МАТЕРІАЛІВ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З ТРІЩИНАМИ

Оболонкові елементи конструкцій часто працюють за умов, коли їх зовнішня та внутрішня поверхні контактують з середовищами, які мають неоднакові фізико-хімічні властивості. В таких випадках для їх виготовлення використовують функціонально градієнтні матеріали (ФГМ), тобто композитні матеріали мікроскопічної неоднорідності з неперервно-змінними механічними властивостями за товщиною стінки елемента конструкції. Вперше задачу про визначення температурних напружень в тонкостінних елементах конструкції, виготовлених з таких матеріалів, розв'язав Коїзумі в 1993 р. В запропонованій роботі досліджено граничну рівновагу виготовленої з ФГМ оболонки за наявності в ній двох колінеарних тріщин.

Використавши δ_c-модель, задачу про пружно-пластичний напружений стан кругової циліндричної оболонки з двома тріщинами на основі методу дисторсій [1] зведено до розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь (СІР) з невідомими границями інтегрування.Праві частини отриманої системи СІР є розривні функції, які містять невідомі величини зусиль і моментів, що діють в пластичних зонах. Запропоновано алгоритм , що передбачає сумісне розв'язування отриманих СІР з умовами пластичності та умовами обмеженості напружень біля тріщин.

Як приклад розглянуто граничну рівновагу оболонки з алюмінієвою зовнішньою поверхнею та германієвою – внутрішньою, під дією внутрішнього тиску. На основі числового аналізу встановлено, що закон розподілу модуля пружності по товщині стінки мало впливає на розкриття вершин тріщин, на відміну від значень модулів пружності матеріалів зовнішньої та внутрішньої поверхонь оболонки.

1. Осадчук В.А. Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Київ, 1985. – 224 с.

Михайло Пагіря

Ужгородський національний університет
pahirya@tn.uz.ua

ЗАДАЧА НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЛАНЦЮГОВИМИ ДРОБАМИ

Нехай $f(x) \in \mathbf{C}[\alpha, \beta]$. Вибрано множину $X = \{x_i : x_i \in [\alpha, \beta], i = 0, \ldots, n, x_i \neq x_j\}$. Наближення функції $f(x) \approx g(x; c_0, \ldots, c_n)$, де $c_0, \ldots, c_n$— параметри, вибирається у вигляді скінченого функціонального інтерполяційного ланцюгового дробу (ФІЛД)

$$D_n(x) = b_0(x) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \frac{a_k(x)}{b_k(x)}\,, \tag{1}$$

де $a_k(x), b_k(x)$ — функції, $a_k(x) \not\equiv 0, b_k(x) \neq 0$ для всіх $x \in [\alpha, \beta]$, який задовольняє інтерполяційну умову

$$D_n(x_i) = b_0(x_i) + \mathop{\mathrm{D}}_{k=1}^{n} \frac{a_k(x_i)}{b_k(x_i)} = y_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Досліджено апроксимуючі властивості різних за формою ФІЛД (1). Вказано формули обчислення невідомих параметрів ФІЛД через значення функції у вузлах сітки X та отримано оцінки залишкових членів побудованих ланцюгових дробів. Наведено числові експерименти, які ілюструють отримані теоретичні результати для деяких функцій.

1. Пагіря М.М. Задача інтерполяції функцій ланцюговими дробами // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. — 2005. — Вип. 10–11. — С. 77–87.

Оксана Панат

Львівський національний університет імені Івана Франка
office@dndi-syste.lviv.ua

КОМПАКТНІСТЬ НОСІЯ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО НЕЛІНІЙНОГО ЕВОЛЮЦІЙНОГО РІВНЯННЯ

Нехай $m, n \in \mathbb{N}$; $T > 0$ – фіксоване число; Ω – область в просторі $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$. Позначимо через Q_T циліндр $\Omega \times (0, T)$. Нехай ν – зовнішня нормаль до поверхні $\partial\Omega \times (0, T)$.

В області Q_T розглядаємо еволюційне рівняння

$$\begin{aligned} u_{tt} + (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha(a_\alpha(x,t)|D^\alpha u_t|^{p-2} D^\alpha u_t) + \\ +(-1)^l \sum_{|\alpha|=l} D^\alpha(b_\alpha(x,t)|D^\alpha u_t|^{p-2} D^\alpha u_t) + \\ +(-1)^l \sum_{|\alpha|=l} D^\alpha(c_\alpha(x,t)|D^\alpha u|^{p-2} D^\alpha u) + \\ +g(x,t)|u_t|^{r(x)-2} u_t = f(x,t), \end{aligned} \tag{1}$$

$m > l \geq 1, p > 2, \overline{r} > 1$, з початковими

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),\ \ x \in \Omega, \tag{2}$$

і крайовими

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial \nu^s}\right|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0,\ \ s = 0, ..., m-1, \tag{3}$$

умовами.

Тут $D^\alpha = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$; $\overline{r} = \operatorname{ess\,inf}_{\Omega} r(x)$. Припускаємо, що всі функції дійсні.

Використовуючи методику з [1], за певних умов на вихідні дані доведено компактність носія розв'язку u задачі (1)-(3).

1. F. Bernis. Qualitative properties for some nonlinear higher order degenerate parabolic equations // Houston J. of Mathematics. – 1988. – **14**, № 3. – P. 319–351.

Галина Пасічник

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
pasichnyk@mail.ru

ПРО ЗАДАЧУ КОШІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОГО РІВНЯННЯ КОЛМОГОРОВА ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

У доповіді наводяться результати досліджень фундаментальних розв'язків та питання розв'язності задачі Коші для деяких розглянутих в монографії [1] вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова у припущенні, що коефіцієнти молоших членів рівнянь можуть зростати на нескінченності.

У дослідженні основним є поняття дисипативності рівнянь, аналогічне з [2] – [3].

1. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in theory of differential of parabolic type. — Baseletc.: Birkhauser, 2004. — 390 p. — (Operator Theory: Adv. and Appl. Vol. 152).
2. Эйдельман С.Д. Параболические системы. – М.: 1964. – 443 с.
3. Малицкая А.П. О вырождающихся параболических уравнениях с возрастающими коэффициентами // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 2. – С. 176-181
4. Ейдельман С. Д., Малицька Г.П. Про рівняння дифузії з інерцією, коефіцієнти яких ростуть // Доп. АН УРСР. Сер А. – 1974. – № 2. – С. 106-110.

Богдан Пахолок

Національний університет „Львівська політехніка“

ПРО ПОВЕДІНКУ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МІРАМИ

Ролзглядаються питання поведінки розв'язків диференціальної системи

$$Y'(t) = (A'(t) + B'(t))Y(t) + F(t, Y(t)) \tag{1}$$

залежно від поведінки розв'язків незбуреної системи

$$X'(t) = A'(t)X(t), \tag{2}$$

де $n \times n$ матриці $A(t), B(t), X(t), Y(t)$ є неперервними справа матрицями-функціями локально обмеженої на $I = [t_0, \infty)$ варіації. Похідні і рівності в (1), (2) розуміються в сенсі теорії узагальнених функцій Л. Шварца. До систем такого вигляду зводяться лінійні диференціальні та квазідиференціальні рівняння з узагальненими функціями у коефіцієнтах. За певних додаткових умов на матриці $A(t), B(t), F(t, Y(t))$ досліджуються питання різних видів стійкості розв'язків вказаних рівнянь: асимптотичної, експоненційної, варіаційної, стійкості стосовно постійно діючих збурень. Результати доповіді доповнюють і узагальнюють окремі твердження, проанонсовані раніше в [1].

1. Пахолок Б.Б. Про стійкість розв'язків диференціальних і квазідиференціальних рівнянь // Матеріали XI міжн. наук. конф. ім. акад. М.Кравчука, 18–20 травня 2006 р. – С. 545.

Олена Пелагенко

Київський національний університет технологій та дизайну
ljenchik@bigmir.net

УМОВИ ТИПУ СІДОНА-ТЕЛЯКОВСЬКОГО

Нехай V — замкнений обмежений поліедр в R^m, зірковий відносно початку координат; $nV = \{x \in R^m : \ x/n \in V\}$; $L_1(T^m)$ — простір інтегровних на T^m 2π-періодичих функцій. Метою роботи є дослідження збіжності тригонометричних рядів виду

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l \in kV \setminus (k-1)V} e^{i(l,x)}, \tag{1}$$

коефіцієнти яких $a_k \to 0, \ k \to \infty$ і задовольняють умови типу Сідона-Теляковського: існують числа A_k такі, що 1) $A_k \to 0, k \to \infty$; 2) $|\triangle a_k| \leq A_k \ \forall \ k \geq 0$; 3) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)|\triangle A_k| < \infty$.

Теорема. *Нехай коефіцієнти a_k ряду (1) задовольняють умови 1) — 3). Тоді ряд (1) збігається майже скрізь на T^m до функции $f \in L_1(T^m)$, є її рядом Фур'є і справедлива оцінка*

$$\int_{T^m} \left| a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sum_{l \in kV \setminus (k-1)V} e^{i(l,x)} \right| dx \leq C \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)|\triangle A_k|.$$

Якщо покласти $a_k := \lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq n-p-1, \\ \frac{n-k+1}{p+1}, & n-p \leq k \leq n, \\ 0, & k \geq n+1, \end{cases}$ де $n, p > 0$, $\frac{n}{p} = O(1)$, і $A_k^{(n)} := \triangle \lambda_k^{(n)}$, то a_k задовольняють умови теореми, а ряд (1) є ядром Валле Пуссена порядку n з індексом $n-p$, а тому, $||V_n^{n-p}(f)||_1 \leq C$.

1. Кузнецова О.И. Константы Лебега и аппроксимативные свойства линейных средних кратных рядов Фурье: Дис. …канд. физ.-мат. наук. – Донецк, 1985. – 115 с.
2. Подкорытов А.Н. Порядок констант Лебега сумм Фурье по полиэдрам // Вестн. ЛГУ. Матем., мех., астрон. – 1982. – **7.** – С. 110-111.

Роман Пелещак, Микола Дорошенко, Юрій Галь, Любов Лазурчак

Національний університет „Львівська політехніка“
Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
informatyka@drohobych.net

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯННЯ ШРЕДІНГЕРА З ДВОВИМІРНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ СКІНЧЕННО-РІЗНИЦЕВИМ МЕТОДОМ

Рівняння Шредінгера має аналітичні розв'язки для обмеженого класу потенціалів [1].

Для випадку з двовимірним потенціалом розглядається рівняння

$$[-\alpha\nabla^2_{\rho,\varphi,z} - \frac{V_0}{\rho}\cos\varphi]\varphi_\lambda(\rho,\varphi,z) = \lambda\varphi_\lambda(\rho,\varphi,z). \tag{1}$$

Власні функції $\psi_\lambda(\rho,\varphi,z)$ представляються у вигляді ряду Фур'є по φ

$$\psi_\lambda(\rho,\varphi,z) = e^{ih_z z}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_m(\rho)^{e^{im\varphi}}, \tag{2}$$

коефіцієнтами розкладу якого є множина радіальних власних функцій $R_m(\rho)$.

Відповідна система різницевих рівнянь має вигляд:

$$\frac{f_m^{(i+1)} - 2f_m^{(i)} + f_m^{(i-1)}}{h^2} + \frac{1}{t_i}(f_{m-1}^{(i)} + f_{m+1}^{(i)}) - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{t_i^2}f_m^{(i)} = -\frac{a^2}{\alpha}\lambda_\| f_m^{(i)},$$

$$f_k^{(0)} = f_k^{(n)} = 0; \quad k = m-1,\ m,\ m+1; \quad m \in \mathbb{Z},$$

$$t_i = t_0 + ih,\ a^2 = \frac{2\alpha}{V_0},\ i = \overline{1, n-1},$$

де $\lambda_\|$ - власні значення двовимірної задачі.

Власні значення різницевого оператора знаходяться з умови рівності нулю характеристичного многочлена, складеного з коефіцієнтів системи різницевих рівнянь.

1. Poliatzky N.A. Method for solving the Schrodinger equation // J. Phys. A.: Math.Gen. – 1992. – 25. – P.3649-3666.

Володимир Пелих

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
pelykh@lms.lviv.ua

УМОВИ ВІДСУТНОСТІ НУЛІВ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ РІВНЯНЬ І ТЕНЗОРНЕ ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ ПРО ДОДАТНУ ВИЗНАЧЕНІСТЬ ГРАВІТАЦІЙНОЇ ЕНЕРГІЇ

Можливість існування тензорного методу доведення гіпотези Айнштайна про додатну визначеність повної гравітаційної енергії у загальній теорії відносності заперечувалась різними авторами виходячи з існування нулів розв'язків (вузлів) тривимірного рівняння Дірака або рівняння Сена-Віттена. Для розв'язання проблеми існування вузлових точок рівняння Сена-Віттена на максимальних гіперповерхнях ми використовуємо результати В.Я.Скоробогатька. На поверхнях, близьких до максимальних, умови відсутності вузлових точок отримуються при зверненні до теореми Я.Б.Лопатинського.

Ми пропонуємо коректне тензорне доведення гіпотези Айнштайна для більш широких класів гіперповерхонь, грунтуючись на розвинутому нами методі дослідження вузлових точок еліптичних систем рівнянь, які є $SU(2)$-коваріантними та загальноковаріантними (подвійно-коваріантними). Частковими випадками таких систем рівнянь є рівняння Дірака та Сена-Віттена.

Для подвійно-коваріантних систем рівнянь нами також отримано більш загальні умови однозначної розв'язності задачі Діріхле в області довільного внутрішнього діаметра та отримано узагальнення принцип максимуму раніше запропонованого Біцадзе.

Галина Перун

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СТОХАСТИЧНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ПУАССОНІВСЬКИМИ ЗБУРЕННЯМИ ТА ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Нехай (Ω, F, P) – ймовірнісний простір з потоком σ-алгебр $\{F_t, t \geq 0\}$, де $F_t \subset F$. Випадкова функція $u(t,x,\omega)$ визначена на $[0,T] \times E_n \times \Omega$, F_t-вимірна відносно σ-алгебри борелівських множин при всіх (t,x) та з імовірністю 1 є розв'язком задачі Коші

$$d_t u(t,x,\omega) = \left[\sum_{|k|\leq 2b} A_k(t) D_x^k u(t,x,\omega)\right] dt + u(t,x,\omega) \int_Z \gamma(t,x)\tilde{\nu}(dt,dz), \quad (1)$$

$$u(0,x,\omega) = \varphi(x,\omega), \quad x \in E_n, \quad \omega \in \Omega, \quad (2)$$

який справджує умову стрибка [1] при $t = \tau_i$, $(i = 1,2,\ldots,N)$, $\tau_1 > 0$,

$$\Delta_t u(t,x,\omega)|_{t=\tau_i} = u(\tau_i + 0, x, \omega) - u(\tau_i - 0, x, \omega) = \\ = B_i u(\tau_i - 0, x, \omega) \equiv B_i u. \quad (3)$$

Тут $\gamma(t,z,\omega), z \in Z, Z \subset E_1, \omega \in \Omega; \tilde{\nu}(dt,dv)$ – центрована пуассонівська міра [2]. Вважаємо, що стохастичний інтеграл у правій частині рівняння (1) існує. Задачу розв'язуємо за допомогою інтегрального перетворення Фур'є. Згідно з методикою роботи [2] виписуємо розв'язок задачі Коші для звичайного стохастичного рівняння з пуассонівськими збуреннями. З його допомогою будуємо матрицант [1]. Спеціальна умова параболічності [3] забезпечує існування оберненого перетворення Фур'є.

Встановлена теорема про коректну розв'язність задачі (1)–(3).

1. А.Самойленко, М.Перестюк. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Вища школа, 1987. – 258 с.
2. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Стохастичні динамічні системи із скінченною післядією. – Чернівці: Зелена Буковина, 2000. – 556 с.
3. С.Д. Эйдельман. Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 444 с.

Роман Петришин

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
rompetr@chnu.cv.ua

УСЕРЕДНЕННЯ БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ ДЛЯ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Розглянемо багаточастотну систему $n+m$ диференціальних рівнянь зі сталим запізненням Δ вигляду

$$\frac{dx}{d\tau}=a(x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\xi,\tau),\ \frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+b(x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\xi,\tau),\ \tau\in[0,L],\quad (1)$$

в якій $x=x(\tau)\in R^n$, $\varphi=\varphi(\tau)\in R^m$, $x_\Delta=x(\tau-\Delta)$, $\varphi_\Delta=\varphi(\tau-\Delta)$, ε – малий додатний параметр, $\xi\in R^s$ – невідомий параметр, і відповідну їй крайову умову

$$x(\tau)=\sum_{k=1}^{r}A_kx(\tau_k)+f(\tau),\varphi(\tau)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\Omega(t)dt+\sum_{k=1}^{r}B_k\varphi(\tau_k)+g(\tau),\tau\in[-\Delta,0],$$

$$\int_0^L h(x,x_\Delta,\varphi,\varphi_\Delta,\xi,\tau)d\tau=0.\quad (2)$$

Тут $-\Delta\le\tau_1<\tau_2<...<\tau_r\le L$, $A_k,B_k,k=\overline{1,r}$ – сталі матриці, h – s-вимірна вектор-функція, a,b,g належать певним класам гладких і майже періодичних за φ,φ_Δ функцій.

Запишемо усередену за φ,φ_Δ задачу

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau}=a_0(\bar{x},\bar{x}_\Delta,\bar{\xi},\tau),\ \ \frac{d\bar{\varphi}}{d\tau}=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+b_0(\bar{x},\bar{x}_\Delta,\bar{\xi},\tau),\ \ \tau\in[0,L],$$

$$\bar{x}(\tau)=\sum_{k=1}^{r}A_k\bar{x}(\tau_k)+f(\tau),\bar{\varphi}(\tau)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^{\tau}\Omega(t)dt+\sum_{k=1}^{r}B_k\bar{\varphi}(\tau_k)+g(\tau),\tau\in[-\Delta,0],$$

$$\int_0^L h_0(\bar{x},\bar{x}_\Delta,\bar{\xi},\tau)d\tau=0,\quad (3)$$

де a_0,b_0,h_0 позначають середні функцій a,b,h. В цьому повідомленні знайдено достатні умови існування розв'язку $x(\tau),\varphi(\tau),\xi$ задачі (1), (2) і встановлено оцінку його відхилення від розв'язку $\bar{x}(\tau),\bar{\varphi}(\tau),\bar{\xi}$ усередненої задачі (3).

Олег Петрук[1], Сальваторе Орландо[2], Фабріціо Боккіно[2]

[1]ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
[2]Астрономічна обсерваторія м.Палермо, Італія
petruk@astro.franko.lviv.ua

МОДЕЛЮВАННЯ ЗАЛИШКІВ НАДНОВИХ ЗІР В СЕРЕДОВИЩІ З НЕОДНОРІДНИМИ МАГНІТНИМ ПОЛЕМ ТА ГУСТИНОЮ. СПОСТЕРЕЖУВАНІ ОБМЕЖЕННЯ НА КІНЕТИКУ ЗАРЯДЖЕНИХ ЧАСТОК

Чисельно розв'язано систему тривимірних нестаціонарних магнітногідродинамічних диференціальних рівнянь в часткових похідних, які описують еволюцію залишків наднових зір в середовищі з неоднорідними розподілами густини та магнітного поля. Розв'язки дають змогу описати як динаміку ударної хвилі (УХ), так і розподіли гідродинамічних параметрів та магнітного поля за нею.

Знайдені розв'язки доповнено аналітичним описом кінетики електронів, прискорених на УХ, та моделлю еволюції їх розподілу за фронтом УХ. Невідомі з теоретичних міркувань залежності ефективності інжекції електронів K від швидкості УХ V та кута Θ_o між зовнішнім магнітним полем і нормаллю до поверхні УХ описано шляхом введення відповідних параметрів b і Θ_K: $K \propto V^{-b} \exp\left[-(\Theta_o/\Theta_K)^2\right]$.

Розглянуто три випадки поширення УХ: через середовище з а) однорідною густиною та однорідним магнітним полем; б) ґрадієнтом густини та однорідним магнітним полем; в) однорідною густиною та ґрадієнтом магнітного поля.

Поєднання тривимірних чисельних розв'язків з аналітичним описом динаміки заряджених часток дало змогу синтезувати карти розподілу поверхневої яскравості залишків наднових для різних припущень про властивості інжекції та поведінку прискорених електронів.

Порівняння теоретичних зображень з радіоспостереженнями дозволяє накласти обмеження на значення Θ_K та вказати на орієнтацію зовнішнього магнітного поля, зокрема у випадку ЗН 1006 року. Запропоновано спостережувані тести для накладання обмежень на параметр b, а також для оцінки величин ґрадієнтів магнітного поля чи густини міжзоряного середовища.

Назар Пирч

Українська Академія друкарства
pnazar@ukr.net

ГОМЕОМОРФІЗМИ ПРОСТОРІВ ФУНКЦІЙ

Підпростір Y тихоновського простору X називається t-вкладеним [1], якщо існує неперервне відображення $\phi\colon C_p(Y) \to C_p(X)$ таке, що $\phi(g) = g$ для кожного $g \in C_p(Y)$. Відображення ϕ називається екстендером з Y на X.

Топологічні простори X і Y називаються t-еквівалентними ($X \stackrel{t}{\sim} Y$), якщо топологічні простори $C_p(X)$ і $C_p(Y)$ є гомеоморфними.

Підпростори A і B тихоновського простору X назвемо t-паралельними, якщо існують екстендери $\phi\colon C_p(A) \to C_p(X)$ і $\psi\colon C_p(B) \to C_p(X)$ такі, що $\psi(\phi(f)|_B) = \phi(f)$ для кожного $f \in C_p(A)$ і $\phi(\psi(g)|_A) = \psi(g)$ для кожного $g \in C_p(B)$.

Нехай A замкнений підпростір тихоновського простору X. Найсильніша тихоновська топологія на X/A, для якої природне відображення $p\colon X \to X/A$ є неперервним, називається R-факторною топологією.

Твердження 1. *Нехай A і B t-паралельні підпростори тихоновського простору X. Тоді R-факторні простори X/A і X/B t - еквівалентні.*

Підпростори A і B тихоновського простору X назвемо t-ортогональними, якщо існують екстендери $\phi\colon C_p(A) \to C_p(X)$ і $\psi\colon C_p(B) \to C_p(X)$ такі, що $\phi(f)|_B =$const для кожного $f \in C_p(A)$ і $\psi(g)|_A =$const для кожного $g \in C_p(B)$.

Твердження 2. *Нехай A і B t-еквівалентні, t-ортогональні підпростори тихоновського простору X. Тоді R-факторні простори X/A і X/B t - еквівалентні.*

1. Arhangel'skii A.V., Choban M.M. The extension property of Tychonoff spaces and generalized retracts // Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences. – 1988. – **41**, № 12. – P. 5–7.

Ганна Піпа

Бережанський агротехнічний інститут

ПРО ДЕЯКІ КЛАСИ ЗБУРЕНЬ ОПЕРАТОРА ТРЕТЬОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ВИРАЗУ ШТУРМА–ЛІУВІЛЛЯ З ОБМЕЖЕНИМ ОПЕРАТОРНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ

Нехай H_0 – сепарабельній гільбертів простір, $p(x) = p(x)^* \in \mathcal{B}(H_0)$ – додатно визначений оператор для будь-якого $x \in [a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, причому оператор-функція $x \mapsto p(x)$ сильно неперервна на $[a, b]$. Розглянемо диференціальний вираз

$$l[y] = -y''(x) + p(x)y \quad (x \in [a, b]) \tag{1}$$

і позначимо через L та L_0 відповідно максимальний та мінімальний оператори, породжені в гільбертовому просторі $H \stackrel{\text{def}}{=} L_2(H_0; (a, b))$ зі скалярним добутком $\forall y, z \in H$ $(y|z) = \int\limits_a^b (y(x)|z(x))_{H_0} dx$ цим виразом. Далі, нехай $a < c_1 < c_2 < b$. Визначимо оператори L_{min}, L_{max} за допомогою співвідношень:

$$D(L_{min}) = \{y \in D(L_0) : y(c_1) = y(c_2) = 0\}, L_{min} \subset L_0;$$

$$D(L_{max}) = \{y \in H : y \text{ абсолютно неперервна на } [a, b],$$

$$y' \text{ абсолютно неперервна на} [a, c_1) \cup (c_1, c_2) \cup (c_2, b],\ l_{cl}[y] \in H\}.$$

$\forall y \in D(L_{max})$ $L_{max} = l_{cl}[y]$. Під $l_{cl}[y]$ ми маємо на увазі вираз (1) у якому всі похідні слід розуміти у класичному сенсі.

Припустимо, що $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{B}(H, H_0)$, $\beta_{ij} \in \mathcal{B}(H_0)$, $(i, j = 1, 2)$, $B \stackrel{\text{def}}{=} (\beta_{ij})_{i,j=1}^2$ і введемо в розгляд оператор T_B, область якого $D(T_B)$ складається з усіх тих $y \in D(L_{max})$, які задовольняють умови

$$y'(c_1 + 0) - y'(c_1 - 0) = y(a), \quad y'(c_2 + 0) - y'(c_2 - 0) = y(b),$$

$$\begin{cases} y'(a) - (\beta_{11}y(a) + \beta_{12}y(b)) = \Phi_1 y + y(c_1), \\ \\ -y'(b) - (\beta_{21}y(a) + \beta_{22}y(b)) = \Phi_2 y + y(c_2), \end{cases}$$

а закон дії такий: $\forall y \in D(T_B)$ $T_B y = l_{cl}[y] + \Phi_1^* y(a) + \Phi_2^* y(b)$.

Встановлено критерії максимальної невід'ємності, максимальної акретивності та коректної оборотності оператора T_B.

Ганна Піпа[1], Олег Сторож[2]

[1]Бережанський агротехнічний інститут
[2]Львівський національний університет імені Івана Франка

УМОВИ НЕВІД'ЄМНОСТІ ТА АКРЕТИВНОСТІ ДЛЯ ДЕЯКИХ ЗБУРЕНЬ МАЙЖЕ РОЗВ'ЯЗНИХ РОЗШИРЕНЬ ДОДАТНО ВИЗНАЧЕНОГО ОПЕРАТОРА

Нехай L_0 – замкнений додатно визначений лінійний оператор з областю визначення $D(L_0)$ щільною в гільбертовому просторі H, $L \stackrel{\text{def}}{=} L_0^*$, (H, Γ_1, Γ_2), $(\mathcal{H}_e, (.|.)_e)$ – відповідно жорсткий простір граничних значень оператора L_0 та енергетичний простір цього оператора, $\mathcal{P}$ – проектор $H_e \dot{+} kerL \to H_e$, який анулюється на $kerL$. Для будь-якого лінійного оператора $\Lambda : H_e \dot{+} kerL \to H_e$ такого, що $\Lambda | H_e \in \mathcal{B}(H_e, \mathcal{H})$ оператор $\Lambda^\bullet \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, H_e)$ визначаємо так: $(\Lambda u|h)_{\mathcal{H}} = (u|\Lambda^\bullet h)_e$ $(\forall u \in H_e)$ $(\forall h \in \mathcal{H})$.

Далі, нехай $\Psi \in \mathcal{B}(H_e, \mathcal{H})$, причому $R(\Psi^\bullet) \cap D(L) = \{0\}$; $\Phi \in \in (H, \mathcal{H})$, $\chi \stackrel{\text{def}}{=} \Psi\mathcal{P} + \Phi$; $\Gamma_i^{(\Psi)}$ – лінійні продовження операторів Γ_i нулем на $R(\Psi^\bullet)$, $B \in \mathcal{B}(H)$, $D_{max} \stackrel{\text{def}}{=} D(L) \dot{+} R(\Psi^\bullet)$.

Визначимо оператор T_B за допомогою співвідношень

$$D(T_B) = \{y \in D_{max} : y + \chi^\bullet \Gamma_2^{(\Psi)} y \in D(L), \Gamma_1^{(\Psi)} y - B\Gamma_2^{(\Psi)} y = \chi y\},$$

$$\forall y \in D(T_B) \;\; T_B y = L(y + \chi^\bullet \Gamma_2^{(\Psi)} y)$$

і припустимо, що справджуються умови, які гарантують замкненість та щільну визначеність оператора T_B. Цей оператор ми інтерпретуємо як збурення оператора $L | ker(\Gamma_1^{(\Psi)} - B\Gamma_2^{(\Psi)})$, який є майже розв'язним розширенням оператора L_0 в сенсі [1]. Далі, нехай $Z \stackrel{\text{def}}{=} (\Gamma_1 L_F^{-1})^*$ (відомо, що $y = Za \Leftrightarrow Ly = 0, \;\; \Gamma_2 y = a$). Введемо позначення: $\widetilde{B} \stackrel{\text{def}}{=} B + 2Re(\chi Z) - \chi\chi^\bullet$.

Теорема. *Оператор T_B є максимально акретивним (максимально невід'ємним; коректно оборотним) тоді і тільки тоді, коли $\widetilde{B}$ є акретивним (невід'ємним; коректно оборотним).*

1. Деркач В., Маламуд М. Функция Вейля эрмитова оператора и её связь с характеристической функцией. – Донецк, 1985. – 52 с. (препринт/ АН УССР. Дон. физ.-тех. ин-т. 85-9).

Андрей Плотников[1], Лилия Плотникова[2]

[1]Одесская государственная академия строительства и архитектуры
[2]Одесский национальный политехнический университет
a-plotnikov@ukr.net

УСРЕДНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С 1965 г. после работ L.A. Zadeh началось развитие теории нечетких множеств, а в 1985 г. O. Kaleva ввел понятие нечеткого дифференциального уравнения и доказал существование и единственность решения для такого типа уравнений при условии липшицевости правой части. В дальнейшем в работах S. Seikkala и C.X. Wu, S.J. Song были получены аналогичные результаты при более общих условиях.

Определим пространство $E^n = \{u : R^n \to [0;1] \mid u(\cdot)$ удовлетворяет (I) – (IV) $\}$, где (I) u - нормированное, т.е. существует $x_0 \in R^n$ такое, что $u(x_0) = 1$, (II) u - нечетко выпуклое, т.е. $u(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{u(x); u(y)\}$ для любых $x, y \in R^n$ и $0 \leq \lambda \leq 1$, (III) u – полунепрерывно сверху, (IV) $[u]^0 = cl\{x \in R^n \mid u(x) > 0\}$ – компакт. Для $0 < \alpha \leq 1$, определим α-срезку следующим образом $[u]^\alpha = \{x \in R^n \mid u(x) \geq \alpha\}$. Тогда из (I)-(IV) следует, что α-срезка $[u]^\alpha \in conv(R^n)$ для всех $\alpha \in [0,1]$.

Определим метрику $D : E^n \times E^n \to [0;\infty)$ в пространстве E^n по формуле $D(u,v) = \sup\limits_{0\leq\alpha\leq1} h([u]^\alpha, [v]^\alpha)$, где $h(\cdot,\cdot)$ метрика Хаусдорфа в пространстве $conv(R^n)$.

Рассмотрим следующие системы нечетких дифференциальных уравнений

$$u' = \varepsilon f(t,u),\ u(0) = u_0, \tag{1}$$

$$\overline{u}' = \varepsilon \overline{f}(t,\overline{u}),\ \overline{u}(0) = u_0, \tag{2}$$

где $f, \overline{f} : R^1 \times E^n \to E^n$; $\varepsilon > 0$ – малый параметр;

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} D\left(\int\limits_0^T f(t,u)dt, \int\limits_0^T \overline{f}(t,u)dt\right) = 0.$$

В докладе приводятся условия, при которых решение системы (1) и усредненной системы (2) близки.

Роман Пляцко, Олександр Стефанишин

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
plyatsko@lms.lviv.ua

ПРО НЕОСЦИЛЯЦІЙНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ МАТІСОНА

При дослідженні можливих впливів спіну пробної частки на її рух у гравітаційному полі важливою проблемою є виділення серед множини розв'язків рівнянь Матісона [1] таких, що мають неосциляційний характер, на відміну від розв'язків так званого вайсенгофівського типу [2]. Запропоновано метод розв'язання цієї проблеми, який реалізовано у випадку екваторіальних рухів частки у полі Шварцшільда. Для цього точні рівняння Матісона з його ж доповняльною умовою записані у вигляді системи рівнянь, що містить інтеграли енергії та кутового моменту як параметри. Показано, що розгляд цих рівнянь у наближенні, лінійному за початковими зміщеннями, дає змогу відшукати ті значення параметрів, які при фіксованих початкових значеннях координат і швидкості частки властиві саме неосциляційним розв'язкам.

Основну увагу звернуто на рухи зі швидкостями, близькими до швидкості світла за умови, що початкова танґенціальна компонента значно перевищує радіальну, оскільки саме тоді помітні суттєві впливи гравітаційної спін-орбітальної взаємодії на світову лінію і траєкторію частки [3]. Досліджено відхилення цих ліній від відповідних геодезійних ліній.

1. Mathisson M. Neue Mechanik materieller System // Acta Phys. Pol. – 1937. – **6**. – P. 163–200.
2. Weyssenhoff J., Raabe A. Relativistic dynamics of spin-fluids and spin-particles // Acta Phys. Pol. – 1947. – **9**. – P. 7–18.
3. Plyatsko R. Ultrarelativistic circular orbits of spinning particles in a Schwarzschild field // Class. Quantum Grav. – 2005. – **22**. – P. 1545–1551.

Богдан Подлевський

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
podlev@iapmm.lviv.ua

МЕТОДИ ДВОСТОРОННІХ НАБЛИЖЕНЬ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ СПЕКТРАЛЬНИХ ЗАДАЧ

У роботі запропоновано новий підхід до побудови методів двосторонніх наближень знаходження власних значень нелінійної спектральної задачі вигляду

$$L(\lambda)\, y = 0, \quad \lambda \in (\,a\,,\,b\,) \in R,$$

з операторнозначною функцією $L\,:\,(\,a\,,\,b\,)\,\rightarrow\,B(H)$ ($B(H)$ – множина лінійних обмежених самоспряжених операторів гільбертового простору H), яка аналітично залежить від спектрального параметра λ.

Запропоновано, побудовано та обґрунтовано ітераційні алгоритми, які гарантують двосторонню збіжність ітераційного процесу за власним значенням, монотонну з кожної сторони від власного значення, наприклад, у вигляді почергових наближень

$$\lambda^{(0)} < \lambda^{(2)} < \,...\, < \lambda^{(2m)} < \,...\, < \lambda^{*} < \,...\, < \lambda^{(2m-1)} < \,...\, < \lambda^{(3)} < \lambda^{(1)},$$

або у вигляді включаючих наближень

$$\lambda^{(0)} < \mu^{(1)} < \mu^{(2)} < ... < \mu^{(m)} < ... < \lambda^{*} < ... < \nu^{(m)} < ... < \nu^{(2)} < \nu^{(1)}.$$

Для їх отримання потрібно задавати лише одне початкове наближення з будь-якої сторони від власного значення, а алгоритм сам налаштовується на двосторонні наближення.

Запропоновано також алгоритм, який у випадку матричної оператор-функції дає змогу застосовувати ітераційні процеси двосторонніх наближень до знаходження розв'язку рівняння

$$f(\lambda) \equiv \det L(\lambda) = 0,$$

не розкриваючи визначника. Це означає, що ліва частина рівняння у явному вигляді не задається, а пропонується алгоритм знаходження значення функції $f(\lambda)$ та її похідних при заданому значенні параметра λ, використовуючи для цього LU – розклад матриці $L(\lambda)$. Наведено числові приклади.

Олена Посіко

Львівський національний університет імені івана Франка
o.posiko@lviv.procreditbank.com.ua

УЗАГАЛЬНЕНІ ПОРЯДКИ ЗРОСТАННЯ ІНТЕГРАЛА ЛАПЛАСА-СТІЛТЬЄСА

Нехай V – клас невід'ємних неспадних необмежених неперервних справа на $[0,+\infty)$ функцій F. Вважатимемо, що f – така додатна на $[0,+\infty)$ функція, що для кожних $\sigma\in\mathbb{R}$ і $A\in[0,+\infty)$ існує інтеграл Лебега-Стілтьєса $\int_0^A f(x)e^{x\sigma}dF(x)$, а інтеграл

$$I(\sigma)=\int\limits_0^{\infty} f(x)e^{x\sigma}dF(x),\quad \sigma\in\mathbb{R}, \tag{1}$$

називатимемо інтегралом Лапласа-Стілтьєса. Зрозуміло, що інтеграл (1) або збіжний для кожного $\sigma\in\mathbb{R}$, або розбіжний для кожного $\sigma\in\mathbb{R}$, або існує число $\sigma_{\text{зб}}$ таке, що інтеграл (1) збіжний для $\sigma<\sigma_{\text{зб}}$ і розбіжний для $\sigma>\sigma_{\text{зб}}$. Нехай $\mu(\sigma)=\sup\{f(x)e^{x\sigma}: x\geq 0\}$, $\sigma\in\mathbb{R}$. Тоді, або $\mu(\sigma)<+\infty$ для кожного $\sigma\in\mathbb{R}$, або $\mu(\sigma)=+\infty$ для кожного $\sigma\in\mathbb{R}$, або існує число σ_μ таке, що $\mu(\sigma)<+\infty$ для кожного $\sigma<\sigma_\mu$ і $\mu(\sigma)=+\infty$ для кожного $\sigma>\sigma_\mu$.

Припустимо, що $\sigma_{\text{зб}}=\sigma_\mu=+\infty$. Нехай L – клас неперервних зростаючих функцій α таких, що $\alpha(x)\geq 0$ при $x\geq x_0$, $\alpha(x)=\alpha(x_0)$ при $x\leq x_0$ і на інтервалі $[x_0,+\infty)$ функція α зростає до $+\infty$. Будемо говорити, що $\alpha\in L^0$, якщо $\alpha\in L$ і $\alpha(x(1+o(1)))=(1+o(1))\alpha(x)$ при $x\to+\infty$; крім того, $\alpha\in L_{\text{пз}}$, якщо $\alpha\in L$ і для будь-якого $c>0$ $\alpha(cx)=(1+o(1))\alpha(x)$ при $x\to+\infty$. Легко бачити, що $L_{\text{пз}}\subset L^0$.

Теорема. *Нехай $F\in V$, f є правильно змінною відносно F, а функції $\alpha\in L_{пз}$ і $\beta\in L^0$ для кожного $\varrho\in(0,+\infty)$ задовольняють умову $\frac{d\beta^{-1}(\alpha(x)/\varrho)}{d\ln x}=O(1)$, $x\to+\infty$. Якщо для всіх $\varrho>0$ F задовольняє умову $\ln F(x)=o\left(x\beta^{-1}\left(\frac{\alpha(x)}{\varrho}\right)\right)$, $x\to+\infty$, то $\varrho_{\alpha\beta}(I)=k_{\alpha\beta}(f)$, де $\varrho_{\alpha\beta}(I)=\varlimsup\limits_{\sigma\to+\infty}\frac{\alpha(I(\sigma))}{\beta(\sigma)}$ і $k_{\alpha\beta}(f)=\varlimsup\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{f(x)}\right)}$.*

Marta Pochynajko, Yuriy Sydorenko

National University "Lviv Polytechnic"
Ivan Franko Lviv National University
yu_sydorenko@franko.lviv.ua

CONSTRUCTION OF SCATTERING OPERATORS BY THE METHOD OF BINARY DARBOUX TRANFORMATIONS

The direct and inverse scattering problems for the Dirac system with operator L_1 given by

$$L_1 = \begin{pmatrix} \partial_x & u_1 \\ u_2 & \partial_y \end{pmatrix}, \; u_1, u_2 \in L_2(\mathbb{R}^2), \, \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \; \partial_y = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad (1)$$

were studied by L. Nizhnik in [1], where he described, in particular, the properties of the scattering operator S.

By using the binary Darboux transformations, we construct scattering operators for the Dirac system with special potential that depends on $2n$ arbitrary functions of one variable. We establish that one of these operators coincides with the scattering operator obtained by L. Nyzhnyk in the case of degenerate scattering data. We show that the scattering operator for the Dirac system is obtained as the composition of three Darboux autotransformations or is factorised by two operators of binary transformation of the special form. We also consider several reductions of these operators.

1. Nyzhnyk L.P. Inverse scattering problems for hyperbolic equations. – Kyiv: Naukova Dumka, 1991. – 232 p.(in Russian)
2. Sydorenko Yu.M. Binary transformations and (2+1)-dimensional integrable systems // Ukr. Math. J. – 2002. – **54**, No 11. – P. 1531-1550.
3. Pochynayko M., Sydorenko Yu. Operators of binary Darboux transformations for Dirac's system // Proc. of Inst. of Math. of NAS of Ukraine. – 2004. – **50**, Part 1. – P. 458-462.
4. Pochynayko M., Sydorenko Yu. Constructing scattering operators by the binary Darboux transformation method // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, No 8. – P. 1097-1115.

Наталія Процах

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
protsakh@lms.lviv.ua

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $D = \Omega \times (0, y_0)$, $0 < y_0 < +\infty$, $Q_{0,T} = D \times (0,T)$, $T < +\infty$.

В області $Q_{0,T} = D \times (0,T)$ розглянемо мішану задачу

$$u_t - \lambda(x,y,t)u_y - \sum_{i=1}^{n}(a_i(x,y,t)|u|^{p-2}u_{x_i})_{x_i} = f(x,y,t), \qquad (1)$$

$$u(x,y_0,t) = 0 \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T);\ u|_{\Sigma_{0,T}} = 0, \qquad (2)$$

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \qquad (3)$$

де $\Sigma_{0,T} = \partial\Omega \times (0,y_0) \times (0,T)$, $2 < p < +\infty$.

Щодо коефіцієнтів a та λ рівняння (1) припускатимемо виконання умов: $a_i \in L^\infty(Q_{0,T})$, $a_i(x,y,t) \geq a_0 > 0$ майже для всіх $(x,y,t) \in Q_{0,T}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$; $\lambda \in C(0,T;C(\overline{D}))$, $\lambda_y \in L^\infty(Q_{0,T})$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_{0,T}$.

Отримано такі результати:

1) знайдено умови, за яких існує єдиний узагальнений розв'язок u задачі (1)–(3) такий, що $u \in W(Q_{0,T})$, $u_t \in V^*(Q_{0,T})$, де $W(Q_{0,T}) = \{v(x,y,t) :\ v,\ v_y \in L^2(Q_{0,T}),\ |v|^{\frac{p-2}{2}}v \in L^2(0,T;H^1(D)),\ v|_{\Sigma_{0,T}} = 0,$ $v(x,y_0,t) = 0,\ (x,t) \in \Omega \times (0,T)\}$,

$$V(Q_{0,T}) = \{u :\ u \in L^2(Q_{0,T}),\ |u|^{\frac{p-2}{2}}u \in L^2((0,T);H^1(D))\};$$

2) доведено існування та єдиність розв'язку задачі без початкових умов (1), (2).

Лариса Процах, Петро Савенко, Мирослава Ткач

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
spo@iapmm.lviv.ua; l_protsakh@ukr.net

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДВОВИМІРНОЇ НЕЛІНІЙНОЇ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ МЕТОДОМ НЕЯВНОЇ ФУНКЦІЇ

Розглядається нелінійна векторна спектральна задача

$$A(\lambda_1, \lambda_2)x = 0, \tag{1}$$

в якій необхідно знайти власні значення $\vec{\lambda}^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \in \mathbb{C}^2$ і відповідні їм власні вектори $x^{(0)} \in E \quad (x^{(0)} \neq 0)$. Тут $A(\lambda_1, \lambda_2) = T(\lambda_1, \lambda_2) - I$, де $T(\lambda_1, \lambda_2)$– лінійний неперервний оператор, що діє в комплексному банаховому просторі E й аналітично залежить від двовимірного параметра (λ_1, λ_2), I– одиничний в E оператор.

Задача (1) зводиться до знаходження розв'язків рівняння

$$F(\lambda_1, \lambda_2) = \det(T(\lambda_1, \lambda_2) - I) = 0. \tag{2}$$

Паралельно розглядаємо допоміжну стосовно (1) однопараметричну спектральну задачу

$$\tilde{A}(\lambda_1)x \equiv A(\lambda_1, f(\lambda_1))x = 0, \tag{3}$$

в якій покладається $\lambda_2 = f(\lambda_1)$, де $f(\lambda_1)$– деяка однозначна диференційовна функція.

Використовуючи факт існування спектра задачі (3) і теорію неявних функцій, доводимо існування спектра задачі (1). У випадку дійсних λ_1, λ_2 отримуємо лінійчастий спектр, а у випадку $\vec{\lambda}^0 \in \mathbb{C}^2$– спектр, який складається із зв'язних компонент.

Розглядаються частинні випадки задачі (1) за припущення, що оператор T є цілком неперервним, зокрема, є λ-матрицею від двох змінних.

Наводяться числові приклади розв'язування задачі на власні значення з двовимірним нелінійним спектральним параметром, яка виникає при знаходженні точок можливого галуження розв'язків одного класу нелінійних інтегральних рівнянь.

Богдан Пташник

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
ptashnyk@lms.lviv.ua

БАГАТОТОЧКОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

Вперше задача з багатоточковими умовами (за виділеною змінною) для рівнянь із частинними похідними була поставлена професором Скоробогатьком В.Я. у 1963 році. У найпростішій постановці вона формулювалась так: в області $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T, x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^p\}$ знайти розв'язок рівняння $Lu(t,x) = f(t,x)$ (L – диференціальний вираз із частинними похідними, n-го порядку за змінною t), який задовольняє умови $u(t_j, x) = \varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$, $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq T$, та певні умови за x.

Уже перші дослідження показали [1], що ця задача, взагалі, не є коректною, причому для обмежених областей існування її розв'язку пов'язане з проблемою малих знаменників.

У доповіді наведено огляд результатів автора та його учнів, що стосуються дослідження багатоточкових задач в обмежених циліндричних областях для гіперболічних, параболічних і безтипних (в тім числі не розв'язаних відносно старшої похідної за t) рівнянь і систем рівнянь та метричних оцінок знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язків таких задач. Крім того, сформульовані нові результати для параболічних та гіперболічно-параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Дослідження проблем малих знаменників проводилось сумісно зі школою з метричної теорії чисел (м.Мінськ, Білорусь), створеною академіком Спринджуком В.Г., яку тепер очолює професор Бернік В.І.

Зазначимо, що дослідження багатоточкових задач для необмежених областей проводились у різних аспектах в роботах В.М. Борок, П.І. Каленюка та їхніх учнів.

1. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

Богдан Пташник[1], Софія Репетило[2]

[1]ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
[2]Національний університет „Львівська політехніка“

КРАЙОВА ЗАДАЧА З МІШАНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В області $D = \{(t,x):\, t \in (0,T),\ x \in \Omega\}$ розглядаємо задачу

$$\sum_{s=0}^{n} a_s \frac{\partial^{2(n-s)}}{\partial t^{2(n-s)}} L^s u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x) \in D, a_s \in \mathbb{R}, a_0 \neq 0, \quad (1)$$

$$\left.\frac{\partial^{2(r-1)} u}{\partial t^{2(r-1)}}\right|_{t=0} = \varphi_r(x),\ \left.\frac{\partial^{2r-1} u}{\partial t^{2r-1}}\right|_{t=T} = \varphi_{n+r}(x),\ x \in \bar{\Omega}, r = 1,\ldots,n, \ (2)$$

$$L^q u|_\sigma = 0, \quad q = 0,\ldots,n-1, \quad (3)$$

де $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ – обмежена область з гладкою межею Γ, $\sigma = [0,T]\times\Gamma$, $L := \sum\limits_{i,j=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) - q(x)$ – еліптичний в області Ω диференціальний вираз із гладкими в $\bar{\Omega}$ коефіцієнтами, $q(x) \geq 0$. Припускаємо, що рівняння (1) є строго гіперболічним за Петровським в області D.

Встановлено умови коректності задачі (1)–(3) та конструктивно побудовано її розв'язок у вигляді ряду за системою власних функцій задачі $LX(x) = -\lambda X(x)$, $X(x)|_\Gamma = 0$, множину власних значень якої позначимо через $\Lambda = \{\lambda_k, k \in \mathbb{N}\}$.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1)–(3) *у просторі* $C^{2n}(\bar{D})$ *необхідно і досить, щоб виконувались умови*

$$(\forall \lambda_k \in \Lambda,\ \forall m \in \mathbb{Z}) \quad 2\gamma_j\sqrt{\lambda_k} \neq (2m+1)\pi/T,\ j = 1,\ldots,n, \quad (4)$$

де γ_j, $j = 1,\ldots,n$, *– додатні корені рівняння* $\sum_{s=0}^{n} a_s \gamma^{2(n-s)} = 0$.

Теорема 2. *Нехай справджуються умови* (4) *і нехай* $\varphi_j \in C^{2r}(\bar{\Omega})$, $f \in C^{(0,2r)}(\bar{D})$, $L^q\varphi_j|_\Gamma = 0$, $L^q f|_\sigma = 0$, $j = 1,\ldots,2n$, $q = 0,\ldots,r-1$, *де* $r = 2p+n+1$. *Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $a = \pi/T$ *у просторі* $C^{2n}(\bar{D})$ *існує розв'язок задачі* (1)–(3), *який неперервно залежить від функцій* $f(t,x)$ *та* $\varphi_j(x)$, $j = 1,\ldots,2n$.
Результати роботи перенесено на випадок нестрого гіперболічних рівнянь. Дослідження підтримані ДФФД України (проект № 14.1/017).

Mariya Ptashnyk

Institute of Applied Mathematics, University of Heidelberg
mptashnyk@yahoo.de

DERIVATION OF A MACROSCOPIC MODEL FOR NUTRIENT UPTAKE BY HAIRY-ROOTS

The aim of this work is to derive a macroscopic model describing uptake of nutrients by plant roots. Hairy roots are plant roots, genetically transformed by *Agrobacterium rhizogenes*. The resulting hairy root culture can be cultivated under sterile conditions in a hairy-root-reactor and used for the production of pharmaceutical substances. Here we model the uptake of nutrients by a single root branch. In our model we consider water flow and diffusion of nutrient molecules dissolved in water. We assume that the uptake happens on the surface of thin root hairs distributed periodically and orthogonal to the root surface. The water velocity is defined by Stokes equations.

The macroscopic equation for the nutrient concentration are derived using the homogenization technique of two-scale convergence. In the macroscopic model we obtained the reaction-diffusion equation in the domain with hairs and diffusion-convection equation in the domain without hairs. The macroscopic velocity is defined by Stokes system in the domain without hairs with no-slip condition on the boundary between domains with hairs and of free fluid.

1. Allaire G. Homogenization and two-scale convergence. //SIAM J. Math. Anal. – 1992.– 23. – P. 1482–1518.
2. Doran, P. M. Hairy Roots: Culture and Applications. – Amsterdam: Harwood Academic Publishers, 1997.
3. Jäger W., Mikelic A. On the boundary conditions at the contact interface between a porous medium and a free fluid //Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1996. – (4) 23. – P. 403-465.
4. Jäger W., Mikelic A. On the effective equations of a viscous incompressible fluid flow through a filter of finite thickness // Comm. Pure Appl. Math. – 1998. – **LI**. – P. 1073-1121.
5. Neuss-Radu M. Some extensions of two-scale convergence // C. R. Acad. Sci. Paris. – 1996. – **332**. – P. 899–904.

Іван Пукальський

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ЗІ СКІСНОЮ ПОХІДНОЮ ТА ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Нехай t_0, T – фіксовані додатні числа, $t_0 < T$, D – обмежена область простору $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D. В області $Q = (0,T] \times D$ вивчається задача знаходження функцій (u,p), на яких функціонал

$$\Im(p) = \int\limits_0^T dt \int\limits_D F(t,x,u,p)dx \qquad (1)$$

досягає мінімуму у класі функцій $p \in V = \{p \in C^{\alpha}(Q) : \psi_1 \le p \le \psi_2\}$ таких, що $u(t,x,p)$ є розв'язком крайової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{ij=1}^n a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^n a_i(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_i} - a_0(t,x)u = f(t,x,p), \quad (2)$$

$$u(0,t,p) + \int\limits_T^0 q(\tau,x)u(\tau,x,p)d\tau = \varphi(x), \qquad (3)$$

$$\left[\sum_{j=1}^n b_j(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + b_0(t,x)u - \psi(t,x)\right]|_{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = (0,T] \times \partial D. \quad (4)$$

Задачу досліджено за таких обмежень на ріст коефіцієнтів при $t \to t_0, \rho(x,\partial D) \to 0$, де $\rho(x,\partial D)$ – відстань від точки $x \in D$ до ∂D:

$$a_{ij}(t,x) = O(|t-t_0|^{k_i+k_j}\rho^{\beta_i+\beta_j}(x,\partial D)); a_i(t,x) = O(|t-t_0|^{\delta_i}\rho^{\mu_i}(x,\partial D));$$

$$b_j(t,x) = O(|t-t_0|^{k_j}\rho^{\beta_j}(x,\partial D)); \quad b_0(t,x) = O(|t-t_0|^{\gamma}\rho^{\xi}(x,\partial D));$$

$$a_0(t,x) \le R < +\infty; \quad b_0(t,x) < 0; \quad k_j \in (-\infty,\infty), \beta_j \in (-\infty,\infty), \delta_i \le 0,$$

$$\mu_i \le 0, \gamma \le 0, \quad \varepsilon \le 0, \quad \sup_Q \int\limits_0^T |q(\tau,x)|e^{-\lambda\tau}d\tau < 1, \quad \lambda < -R.$$

Петро Пукач

Національний університет „Львівська політехніка“
ppukach@rambler.ru

ПРО МІШАНУ ЗАДАЧУ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ КОЛИВАНЬ БАЛКИ ЗІ ЗБУРЕНИМ ЛІНІЙНИМ ОПЕРАТОРОМ

Досліджено мішану задачу для нелінійного рівняння

$$u_{tt} + \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq 2} (-1)^{|\alpha|} D^{\beta}\Big(a_{\alpha\beta}(x,t) D^{\alpha} u_t\Big) + \sum_{i=1}^{n} \Big(a_{2,i}(x,t)\, |u_{tx_ix_i}|^{p_2-2} \times$$

$$\times u_{tx_ix_i}\Big)_{x_ix_i} - \sum_{i=1}^{n} \Big(a_{1,i}(x,t)\, |u_{tx_i}|^{p_1-2}\, u_{tx_i}\Big)_{x_i} + g(x,u_t) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq 2} (-1)^{|\alpha|} D^{\beta}\left(b_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u\right) + \sum_{1\leq|\alpha|\leq 2} c_{\alpha}(x,t) D^{\alpha} u = f(x,t),$$

де $1 < p_2 < 2$, $1 < p_1 < 2$, функція $g(x,\eta)$ – вимірна за x, неперервна за η, $(g(x,\xi) - g(x,\eta))\,(\xi-\eta) \geq g_0\,|\xi-\eta|^p$ для довільних $\xi,\eta \in \mathbb{R}$, $g_0 > 0$, $p > 2$. В області $Q_T = \Omega \times (0,T)$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – необмежена область з регулярною межею $\partial\Omega$, $S_T = \partial\Omega \times (0,T)$ – бічна поверхня області Q_T, $0 < T < \infty$, розглядаємо для вказаного рівняння задачу з початковими умовами $u|_{t=0} = u_0(x)$, $u_t|_{t=0} = u_1(x)$ та крайовими умовами $u|_{S_T} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{S_T} = 0$, ν – одиничний вектор зовнішньої нормалі до $\partial\Omega$. Коефіцієнти $a_{\alpha\beta}$ $(|\alpha| = |\beta| = 2)$, $a_{2,i}$, $a_{1,i}$ $(i = 1,..,n)$ можуть степеневим чином зростати при $|x| \to \infty$. Використовуємо простори локально інтегровних функцій. Узагальненим розв'язком мішаної задачі називаємо функцію u, що належить до згаданих просторів, задовольняє початкові та крайові умови і певну інтегральну тотожність. Отримано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку без обмежень на поведінку при $|x| \to \infty$ розв'язку, правої частини рівняння та початкових даних. Аналогічні результати для нелінійного рівняння типу коливань балки одержано в [1].

1. Пукач П.Я. Мішана задача для нелінійного рівняння типу коливань балки в необмеженій області// Математичні студії.– 2007.– (в друці)

Aliaksandr Radyna and Alexander Sender

Belarusian State University

P-ADIC SPLINES AND RIESZ-VOLKENBORN'S POTENTIAL

For any prime number p denote by $\mathbb{Q}_p$ the set of p-adic numbers equipped by the norm $|x|_p$. Denote by $B_\gamma[a] = \{x \in \mathbb{Q}_p \ : \ |x-a|_p \leq p^\gamma\}$, and by $I_{B_\gamma[a]}$ the characteristic function of the ball. Let $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 1$. Denote by $\mathbb{K}$ the minimal field containing $\mathbb{Q}_p$ and $\{p^\alpha\}$. The norm $|\cdot|_p$ is prolonged to $\mathbb{K}$ by using standard properties of $|\cdot|_p$: $|p^\alpha|_p = p^{-\alpha}$, $|ab|_p = |a|_p|b|_p$, $|a+b|_p \leq \max(|a|_p, |b|_p)$. $I_{B_\gamma[a]}$ is a locally constant function. Hence, if $B_\gamma[a] \subset B_0[0] = \mathbb{Z}_p$ then $I_{B_\gamma[a]} \in C(\mathbb{Z}_p;\mathbb{K})$. Since the locally constant functions is dense in $C(\mathbb{Z}_p;\mathbb{K})$ [1, Th.26.2] and $\mathbb{Z}_p$ is a compact set we see that any function from $C(\mathbb{Z}_p;\mathbb{K})$ can be approximated by a finite $\mathbb{K}$-linear combination of $I_{B_{\gamma_k}[a_k]}$. Therefore, to approximate any function from $C(\mathbb{Z}_p;\mathbb{K})$ it suffices to approximate $I_{B_\gamma[a]}$.

We consider the continuously differential function $\mathbb{Z}_p \ni x \mapsto \frac{1}{|x|_p^\alpha} \in \mathbb{K}$ to define the p-adic spline by the formula $L_n(x,\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{p^{n+m}-1} \frac{\lambda_k}{|x-k|_p^\alpha}$. The spline is constructed with respect to $I_{B_{-m}[a]}$. The coefficients λ_k, $k = 0,1,\ldots,p^{n+m}-1$ are uniquely derived from the interpolation relations: $L_n(i,\alpha) = I_{B_{-m}[a]}(i)$, $i = 0,1,\ldots,p^{n+m}-1$ [2].

Theorem 1 *For any $a \in \mathbb{Z}_p$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, and $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha > 1$ there exist p-adic splines $L_n(x,\alpha)$ such that $L_n(x,\alpha) \rightrightarrows I_{B_{-m}[a]}(x)$ as $n \to \infty$.*

Theorem 2 *For the sequence $\{L_n(x,\alpha)\}_{n=1}^\infty$ from Theorem 1 there exists a function φ_m^α such that $L_n(x,\alpha) \rightrightarrows \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \frac{\varphi_m^\alpha(t)dt}{|t-x|_p^\alpha}$ as $n \to \infty$.*

Here Volkenborn's integral is used (the definition see in [1]). From theorems we immediately have $I_{B_{-m}[a]}(x) = \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \frac{\varphi_m^\alpha(t)dt}{|t-x|_p^\alpha}$. This representation we call Riesz-Volkenborn's potential.

1. Schikhof W.H Ultrametric calculus // Cambridge University.– Press, 1984.
2. Радыно А.Я., Сендер А.Н. Интерполяция и приближение p-адическими сплайнами непрерывной функции, действующей из $\mathbb{Z}_p$ в $\mathbb{Q}_p$ // Вестник БГУ, Сер. 1. – 2007. – № 1. – С. 77–82.

Валерій Ратушняк

Коломийський економіко-правовий коледж
Київського національного торговельно-економічного університету
valery@kepk.km.if.ua

ВЛАСТИВІСТЬ ЛОКАЛІЗАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Для рядів Фур'є сумовних на $[0, 2\pi]$ функцій добре відомий принцип локалізації Рімана. Якщо $\{f_1, f_2\} \subset L_1([0, 2\pi])$ збігається на інтервалі $(a, b) \subset [0, 2\pi]$, то на кожному відрізку $(a + \epsilon, b - \epsilon) \subset [0, 2\pi]$ різниця їхніх рядів Фур'є рівномірно збігається до нуля. Для узагальнених функцій цей принцип, взагалі кажучи, не виконується. Однак, у багатьох задачах математичної фізики, де користуються зображенням функцій у вигляді рядів Фур'є, природнішим є виконання цього принципу не для самих рядів Фур'є, а для рядів Фур'є, просумованих деяким методом. Так, наприклад, принцип локалізації для ряду Фур'є функції f, просумованого методом Абеля - Пуассона еквівалентний принципу локалізації для розв'язку задачі Діріхле для рівняння Лапласа в одиничному крузі з граничною функцією f, заданою на колі: якщо f на деякій відкритій ділянці кола збігається з неперервною функцією, то при наближенні до межі круга розв'язок задачі Діріхле збігається до f рівномірно на кожному компакті цієї ділянки [1].

Природно поставити таку задачу: нехай в області Q з межею ∂Q розглядається рівняння $Lu = 0$ та крайова задача $Bu|\partial Q = f$, де L і B – диференціальні (або псевдодиференціальні) оператори, що діють в області Q та на межі ∂Q відповідно, а f – узагальнена функція, задана на ∂Q . Якщо відомо, що f на деякій ділянці межі збігається з гладкою функцією, то чи буде розв'язок вказаної задачі збігатись до f рівномірно при наближенні до цієї ділянки межі? Тут це питання вивчається для задачі Коші у випадку, коли L - псевдодиференціальний оператор, побудований за негладким однорідним символом з початковою умовою, яка є узагальненою функцією типу розподілів.

1. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Тригонометрические ряды и обобщенние периодические функции // Докл. АН СССР. – 1981. – **257**, № 4. – С. 799-803.

Олексій Ребенко, Максим Тертичний

Інститут математики НАН України
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

ПРО УМОВИ НАДСТІЙКОСТІ ТА ПОСИЛЕНОЇ НАДСТІЙКОСТІ ПАРНИХ ПОТЕНЦІАЛІВ ВЗАЄМОДІЇ

В задачах математичної фізики нескінченного числа частинок вирішальну роль відіграють умови, що забезпечують стійкість системи. Достатнім критерієм такої стійкості є оцінка знизу потенціальної енергії довільного скінченного числа частинок

$$U_N(x_1,...,x_N) \; = \sum_{1\le i<j\le N} \phi(|x_i-x_j|),\; x_i\in\mathbb{R}^d, \tag{1}$$

де ϕ—потенціал взаємодії між двома частинками, розташованими в точках x_i,x_j. Для того, щоб сформулювати ці умови, розглянемо розбиття $\overline{\Delta}$ простору $\mathbb{R}^d$ на гіперкуби(d-куби) Δ з ребром λ, які не мають точок перетину, тобто для довільних Δ_i,$\Delta_j \in \overline{\Delta}$, $i\ne j$, $\Delta_i\cap\Delta_j=\emptyset$.

Означення. *Нескінченна система частинок є стійкою ($A=0$, $B\ge 0$), надстійкою ($A>0, B\ge 0, p=2$) і посилено надстійкою ($A> 0, B\ge 0, p>2$), якщо для довільного $N\in\mathbb{N}$ ($N\ge 2$) виконуеться нерівність*

$$U_N(x_1,...,x_N) \;\ge\; \sum_{\Delta\in\overline{\Delta}} (AN_\Delta^p - BN_\Delta), \tag{2}$$

де N_Δ—кількість частинок, що знаходиться у кубі Δ ($\sum_{\Delta\in\overline{\Delta}} N_\Delta = N$).

Проблема полягає у встановленні найбільш оптимальних умов на потенціал ϕ, які забезпечують виконання нерівності (2). Основним результатом даної доповіді є така теорема.

Теорема. *Нехай потенціал ϕ задовольняє умови:*
1) $\exists\ \Lambda>\lambda, \varphi_1>0$ і $\varepsilon>0$ такі, що $|\phi(|x|)<\frac{\varphi_1}{|x|^{d+\varepsilon}}$ при $|x|\ge\Lambda$; 2) $\exists\lambda>0$ таке, що при $|x|\le\lambda$ $\phi(|x|)\ge\frac{\varphi_0}{|x|^\alpha}$, $\varphi_0>0$, $\alpha\ge 0$. Тоді:
1°) при $\alpha<d$ система є надстійкою, якщо $\lambda^{d-\alpha}\varphi_0>cf(\alpha)$, де $c=\int\phi^-(|x|)dx$ ($\phi^-(|x|)=\min\{0,\phi(|x|)\}$), а $f(d)=+\infty$; 2°) при $\alpha=d$ система є надстійкою з $A=A(N)=\lambda^{-1}(C_d\log N-c)$; 3°) при $\alpha>d$ система є посилено надстійкою з $p=1+\alpha/d$).

Віктор Ревенко

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
adm@iapmm.lviv.ua

НОВИЙ АНАЛІТИЧНО-ЧИСЛОВИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Застосування комп'ютерної техніки дає змогу побудувати нові ефективні зображення розв'язку крайової задачі для рівнянь в часткових похідних за повними неортогональними наборами функцій [1]. Модифікуємо запропонований в [1] метод до побудови розв'язку диференціального рівняння другого порядку

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x),\ y(o) = y_1;\ y(l) = y_2. \tag{1}$$

Наближений розв'язок задачі (1) подамо у вигляді ряду

$$y(x) = \sum_{k=0}^{N} \{c_k \sin(\omega_k x) + c_{N+k+1} \cos(\omega_k x)\}, \tag{2}$$

де $\omega_k = k\pi/l$. Коефіцієнти ряду (2) знайдемо із мінімуму квадратичної міри відхилення знайденого розв'язку від точного розв'язку задачі (1), яка має вигляд

$$\begin{gathered}\Psi\{c_1, ...c_{2N}\} = \int_0^l \{\sum_{k=1}^{2N+1} c_k A_k(x) - f(x)\}^2 dx + \\ +[y(0) - y_1]^2 + [y(2l) - y_2]^2 = \sum_{k,j=1}^{2N+1} c_k c_j W_k^j - 2\sum_{k=1}^{2N+1} c_k N_k + P^2.\end{gathered} \tag{3}$$

Знайдено мінімум квадратичної форми (3) і встановлено нерівність Бесселя. Доведена збіжність запропонованого методу та одержаної нескінченної системи рівнянь. Досліджено деякі аспекти числової реалізації: збіжність, швидкодія, ефективність, точність розв'язку.

1. Ревенко В.П. Розвиток спектрального методу Штурма-Ліувілля розв'язування крайової задачі для бігармонічного рівняння // Нелінійні коливання. – 2003. – **6**, N. 3. – С. 368–377.

Natalie Romanova

Belarusian State University
natalaromanova@yahoo.com

DIVECTORIZATION DECOMPOSITION MODEL FOR FRACTIONAL DIFFUSION EQUATION

We suggest to widen the applications of the vector decomposition methods to multi–dimensional fractional partial differential equation. In particular, we discuss the construction of the divectorization decomposition model which is based on both a shifted version of classical Grünwald finite difference approximation [1] for the non–local fractional derivative operator and the methodology of multicomponent vector decomposition schemes [2]. Consider a two–dimensional fractional order diffusion equation [1] on a finite rectangular domain, $1 < \alpha, \beta < 2$. Assume the initial condition $u(x_1, x_2, 0) = f(x_1, x_2)$ and Dirichlet boundary conditions.

We examine the following scheme [2]

$$\frac{\widehat{y}_\alpha - \widetilde{y}}{\tau} + 2A_\alpha(\widehat{y}_\alpha - y_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{2} A_\beta y_\beta = \widehat{s},\ \alpha = \overline{1,2}, \widetilde{y} = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{2} y_\beta,\ y_\alpha(0) = u_0.$$

Here y_1, y_2 are the components of the approximate vector–solution y on time level t_n. Define the following finite difference operators

$$A_1 y_1 = \frac{c_1(i,j)}{h_{x_1}^{\alpha}} \sum_{m=0}^{i+1} g_\alpha(m) y_{i-m+1,j}, A_2 y_2 = \frac{c_2(i,j)}{h_{x_2}^{\beta}} \sum_{m=0}^{j+1} g_\beta(m) y_{i,j-m+1}.$$

Numerical experiment, which includes 2D problems for fractional partial differential equations with variable coefficients, demonstrates a good computing ability of the finite–difference scheme.

1. Meerschaert M.M., Tadjeran C. Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations // Applied numerical math. – 2006. – **56**, № 1. – P. 114–118.
2. Abrashina–Zhadaeva N.G.,Romanova N.S. Multicomponent vector decomposition schemes for the solution of multidimensional problems of mathematical physics.// Diff. Equat. – 2006. – **42**. № 7. – P. 883–894.

Владимир Рукасов, Олег Новиков, Виктория Бодрая

Славянский государственный педагогический университет
sgpi@slav.dn.ua

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ С МАЛОЙ ГЛАДКОСТЬЮ

Следуя работе [1] и используя терминологию работы [2], классы $\overline{\psi}$-интегралов функций многих переменных введем следующим образом.

Пусть $\psi_{ij}(k)$, $\Psi_{ij}(k)$, $i=1,2$; $j=1,2$, – два набора систем чисел. Пусть, далее, ряд $\sum_{\vec{k}\in N_i^2}\frac{1}{2^{q(\vec{k})}\overline{\psi}_i^2(k_i)}[\psi_{i1}(k_i)A_{\vec{k}}(f;\vec{x})-\psi_{i2}(k_i)A_{\vec{k}}^{\vec{e_i}}(f;\vec{x})]$ является рядом Фурье некоторой функции из $L(T^2)$. Назовем ее $\overline{\psi}_i$-производной функции f по переменной $x_i, i=1,2$, и обозначим $f^{\overline{\psi}_i}$. Смешанную $\overline{\Psi}$-производную введем как результат последовательного дифференцирования. Множество непрерывных функций, имеющих почти везде ограниченные $\overline{\psi}_i$- и $\overline{\Psi}$-производные обозначим $C_\infty^{2\overline{\psi}}$.

Прямоугольные обобщенные операторы Зигмунда $Z_{\vec{n}}^{\varphi}$ определяются в виде $\sum_{\vec{k}\in G_{\vec{n}}}\prod_{i=1}^{m}(1-\frac{\varphi_i(k_i)}{\varphi_i(n_i)})A_{\vec{k}}(f;\vec{x})$, где $G_{\vec{n}}$ – m–мерный прямоугольный параллелепипед. Нами получена асимптотическая формула : $\mathcal{E}\left(C_\infty^{2\overline{\psi}};Z_{\vec{n}}^{\varphi}\right)=\sup\limits_{f\in C_\infty^{2\overline{\psi}}}||f(\vec{x})-Z_{\vec{n}}^{\varphi}(f;\vec{x})||_C=$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{2}\Bigg(\int\limits_1^{n_i}\frac{\psi_{i2}(x)\varphi_i(x)}{x\varphi_i(n_i)}dx+\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\psi_{i2}(x)}{x}dx+O(1)\overline{\psi}_i(n_i)\Bigg)+$$

$$+O(1)\prod_{i=1}^{2}\Bigg(\int\limits_1^{n_i}\frac{\Psi_{i2}(x)\varphi_i(x)}{x\varphi_i(n_i)}dx+\int\limits_{n_i}^{\infty}\frac{\Psi_{i2}(x)}{x}dx+O(1)\overline{\Psi}_i(n_i)\Bigg),n_i\to\infty,i=1,2.$$

1. Степанец А.И., Пачулиа Н.Л. Кратные суммы Фурье на множест вах (ψ,β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 4. – С. 545 – 555.

2. Рукасов В.И., Новиков О.А., Бодрая В.И. Приближение классов $\overline{\psi}$-интегралов периодических функций многих переменных прямоугольными линейными средними их рядов Фурье // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 4. – С. 564 – 570.

Tatiana Ryabukha

Institute of Mathematics of NAS of Ukraine
vyrtum@imath.kiev.ua

ON REGULARIZED SOLUTION OF DUAL BBGKY HIERARCHY FOR INFINITELY PARTICLE SYSTEMS

We construct a solution to the initial-value problem of the dual-BBGKY hierarchy for infinitely particle one-dimensional systems. The solution represents as an expansion in terms of particle clusters whose evolution is described by the corresponding order dual cumulant (semi-invariant) of the evolution operators of finitely many particle systems. We establish the local in time existence theorem of a weak solution for initial data from the space of sequences of bounded functions.

We investigate the existence of functionals for average values of observables of considered system. For observables from the space of sequences of bounded functions the stated cumulant nature of the functional expansion guarantees the compensation of divergent integrals over the configuration variables in every term.

This work was supported by the President of Ukraine through grant GP/F13/0097 for supporting scientific research of young scientists.

1. Gerasimenko V. I., Ryabukha T. V., Stashenko M.O. On the structure of expansions for the BBGKY Hierarchy Solutions // J. Phys. A: Math. Gen., 37, No 42, 2004. – P. 9861–9872
2. Tatiana V. Ryabukha, On regularized solution for BBGKY hierarchy of one-dimensional infinite system // SIGMA 2, 2006, 053.

Іван Савка[1], Володимир Ільків[1,2]

[1]ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
[2]Національний університет „Львівська політехніка“

НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ТА ЛІНІЙНО ЗАЛЕЖНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Задачі з нелокальними умовами для диференціальних рівнянь з частинними похідними є некоректними за Адамаром, а їх розв'язність пов'язана з метричними властивостями коефіцієнтів і параметрів задачі.

Зокрема, це стосується задачі

$$\sum_{|\hat{s}|=n} a_{\hat{s}} \frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} = 0, \ (t,x) \in (0,T) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p, \tag{1}$$

$$\frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=0} - \mu \frac{\partial^{j-1} u}{\partial t^{j-1}}\Big|_{t=T} = \varphi_j(x), \ j = 1, \dots, n, \tag{2}$$

де $a_{\hat{s}} \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, для якої на основі метричного підходу встановлено теореми про розв'язність у просторах Соболєва для випадку незалежних коефіцієнтів $a_{\hat{s}}$ [1, §11].

Ці результати при $n = p = 2$ перенесено авторами на випадок лінійно залежних коефіцієнтів, для яких

$$\sum_{|\hat{s}|=2} \alpha_{\hat{s}} a_{\hat{s}} = 0, \quad \alpha_{\hat{s}} \in \mathbb{R}.$$

При доведенні існування розв'язку задачі (1)–(2) виникає проблема малих знаменників на лінійних многовидах. Встановлено метричні теореми про оцінки знизу цих знаменників на основі метричного підходу.

Робота підтримана ДФФД України (проект № 14.1/017).

1. Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

Віктор Савчук

Інститут математики НАН України
savchuk@imath.kiev.ua

НАБЛИЖЕННЯ ГОЛОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ СУМАМИ ТЕЙЛОРА–АБЕЛЯ–ПУАССОНА

Нехай $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Для голоморфної в $\mathbb{D}$ функції f вирази

$$A_{\varrho,r}(f)(z) := \sum_{k=0}^{r-1} \frac{f^{(k)}(\varrho z)}{k!}(1-\varrho)^k z^k, \ r \in \mathbb{N}, \ 0 < \varrho < 1,$$

назвемо сумами Тейлора–Абеля–Пуассона.

У доповіді йдеться про наближення голоморфних в одиничному крузі функцій f середніми $A_{\varrho,r}(f)$ при $\varrho \to 1-$.

Нехай $H_p^r \operatorname{Lip}\alpha$ $(1 \le p \le \infty, \ 0 < \alpha \le 1, \ r \in \mathbb{N})$ позначає множину голоморфних в $\mathbb{D}$ функцій f, для яких $\sup\limits_{0<h\le t} \|f^{(r)}(e^{ih}\cdot) - f^{(r)}(\cdot)\|_{H_p} = O(t^\alpha)$, де $\|\cdot\|_{H_p}$ – норма в просторі Гарді H_p.

Теорема 1. *Нехай $r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \le p \le \infty$ і $0 < \alpha \le 1$. Голоморфна в $\mathbb{D}$ функція f належить до класу $H_p^r \operatorname{Lip}\alpha$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\|f - A_{\varrho,r+1}(f)\|_{H_p} = O\left((1-\varrho)^{r+\alpha}\right), \quad \varrho \to 1- .$$

Теорема 2. *Нехай $r \in \mathbb{N}$. Якщо для голоморфної в $\mathbb{D}$ функції f справджується співвідношення $\|f - A_{\varrho,r}(f)\|_{H_p} = o((1-\varrho)^r)$, $\varrho \to 1-$, то функція f є алгебричним многочленом степеня не більшого, ніж $r-1$; при цьому $A_{\varrho,r}(f) = f$.*

Галина Самкова, Наталія Шарай

Одеський національний університет ім. І.І.Мечникова
JIMIS@ua.fm, rusnat@renome-i.net

ЗАДАЧІ КОШІ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНІ ЩОДО ПОХІДНИХ

У комплексній області розглядається задача Коші

$$F(z, W, W') = 0, \tag{1}$$

$$W(z) \longrightarrow 0, z \longrightarrow 0, z \in D, \tag{2}$$

де вектор-функція $F : D \times G \times G_1 \to C^m$ аналітична в області $D \times G \times G_1$; область $D \subset C, 0 \in \partial D$, області $G, G_1 \subset C^n, (0,0,0) \in$ $\in \partial(D \times G \times G_1)$.

Вивчаються розв'язки задачі (1)-(2), які задовольняють умову

$$W'(z) \to 0, z \to 0, z \in D \tag{3}$$

у припущенні, що система (1) не розв'язна стосовно W'.

Досліджуються питання про розв'язність системи (1) відносно W' або відносно частини компонент вектора W' у деякій підобласті околу точки (0,0,0) і про існування та властивості розв'язків задачі (1)-(2), які задовольняють умову (3). У залежності від вигляду області (радіальної, колоподібної, колової області, області Гартокса та інших) система (1) зводиться до системи, розв'язаної відносно вектора W'.

Пропонується перетворення, яке зводить задачу (1)-(2) до напів'явної задачі вигляду

$$\begin{cases} G(z, W)W' = R(z, W), \\ W(z) \longrightarrow 0, z \longrightarrow 0. \end{cases} \tag{4}$$

Одержано достатні умови зведення (1)-(2) до (4). При дослідженнях використано результати теорії аналітичних функцій багатьох змінних, теорему Руше, ідеї методу аналітичного продовження розв'язків та принцип Важевського.

1. Самкова Г.Е. Существование и асимптотическое поведение аналитических решений некоторых сингулярных дифференциальных систем, не разрешенных относительно производных. // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 11. – С. 2012-2013.

Gennadiy Sandrakov

Taras Shevchenko Kyiv National University
sandrako@i.com.ua

ON SOME HOMOGENIZED MULTIPHASE MODELS

Multiphase flow equations or multiphase models are usually derived by using the concept of multivelocity continuum and the assumption of interpenetrating motion of the components. In a sense, this concept means that several materials are simultaneously present at each spatial point under consideration. Here we discuss another approach to particular multiphase models arising in homogenization theory.

For this purpose we concider a homogenization of unsteady diffusion processes in a periodic medium consisting of several materials with different properties. The conductivity of one of the materials is assumed to be considerably lower than the conductivity of the other materials. The diffusion processes under consideration are governed by parabolic equations with coefficients depending on two small positive parameters ε and σ. The microscale parameter ε determines the period of the coefficients in these equations, which corresponds to the periodic structure (with period ε) of the medium. The inverse of σ characterizes the scatter of the conductivities in these equations, which corresponds to a very low conductivity of one of the materials.

We present homogenized (limit as $\varepsilon \to 0$ and $\sigma \to 0$) equations whose solutions approximate the solutions to the equations under consideration and estimate the accuracy of such approximations. Under certain assumptions on the geometry of the periodic distribution of the constituting materials in space, the homogenized equations form a system of equations coupled through exchange coefficients. The coefficients characterize dynamic diffusion exchange between the materials viewed as components of the medium under consideration and are involved in the homogenized equations via convolution operators with respect to the time variable. Such terms with time convolution in equations have a well-known mechanical interpretation corresponding to the memory effect arising in the homogenized medium. Special case of such homogenized models is a well-known model of parallel flows in mechanics of porous media.

Віра Сікора

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
yurchiv@rambler.ru

ФІЛЬТРОВАНІ ВІНЦЕВІ ДОБУТКИ ГРУП ПІДСТАНОВОК

Розглядається два узагальнення вінцевого добутку груп, які визначаються за допомогою поняття фільтра.

Нехай (G, X) — група підстановок, F — деякий фільтр на X. Декартовим F-вінцевим добутком групи підстановок (G, X) з деякою групою H назвемо підгрупу вінцевого добутку $(G, X) \wr H$, яка складається із всеможливих пар $[g; f]$, $g \in G$, $f \in H$, для яких

$$\{x \in X \mid f(x) = 1\} \in F.$$

Зокрема, якщо F — фільтр Фреше, то декартовий F-вінцевий добуток збігається з обмеженим (в іншій термінології — прямим) вінцевим добутком.

Нехай тепер F — неголовний ультрафільтр на X, $G < AutF$, $\widehat{H^x}$ — F-фільтрований степінь групи H [1]. Елементами $\widehat{H^x}$ є класи еквівалентності групи функції $\{f \mid f : X \to H\}$ відносно еквівалентності $\sim$, яка визначається умовою: $f \sim g$ тоді й тільки тоді, коли

$$\{x \mid f(x) = g(x)\} \in F.$$

Оскільки $G < AutF$, то дія G узгоджується з еквівалентністю, а, отже, G діє на $\widehat{H^x}$ автоморфізмами. Розщеплюване розширення групи G з групою $\widehat{H^x}$ назвемо фільтрованим F-вінцевим добутком групи підстановок (G, X) з групою H.

Якщо H діє як група підстановок на деякій множині Y, то кожна з так визначених груп є групою підстановок множини $X \times Y$.

Охарактеризовано елементарні властивості вказаних конструкцій, розглянуто питання про занурення в них розширень груп, які є компонентами вінцевого добутку.

1. Мальцев А.И. Алгебраические системы. – М.: Наука, 1970. – 392 с.

Oleh Skaskiv, Oleh Zrum

Ivan Franko Lviv National University
matstud@franko.lviv.ua

ADJUSTMENT OF FENTON'S INEQUALITIES FOR ENTIRE FUNCTIONS OF TWO COMPLEX VARIABLES

Let

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n+m=0}^{+\infty} a_{n,m} z_1^n z_2^m$$

be an entire function, $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}$ and

$$K(f, \Theta) = \Big\{ f(z,t) = \sum_{n+m=0}^{+\infty} a_{n,m} e^{2\pi i \theta_{n,m} t} : t \in [0;1] \Big\},$$

where $\Theta = (\theta_{n,m})$ is a sequence of positive integer numbers such that its arrangement (θ_k^*) by increasing satisfies the condition $\{\theta_{n,m} : (n,m) \in \mathbb{Z}_+^2\} = \{\theta_k^* : j \geq 0\}$, $\theta_{k+1}^* > \theta_k^*$ $(j \geq 0)$ and

$$\theta_{k+1}^* / \theta_k^* \geq 1 + \frac{a}{k^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1/2.$$

We prove ([1]) that for all $\varepsilon > 0$ almost surely in $K(f, \Theta)$ there exists a set $E(\varepsilon, t) \subset \mathbb{R}_+^2$, such that for all $r \in \mathbb{R}_+^2 \setminus E(\varepsilon, t)$ the inequality

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r) (\ln \mu_f(r))^{\frac{1}{2} + \frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}} (\ln \ln \mu_f(r))^{\frac{1}{2} + \frac{3\alpha}{2(1+\alpha)} + \delta},$$

holds, where $M_f(r,t) = \max\{|f(z,t)| : |z_1| = r_1, |z_2| = r_2\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_{n,m}| r_1^n r_2^m : n \geq 0, m \geq 0\}$, $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2$, and the next asymptotic relation

$$l_2 - \operatorname{meas} E_R(\varepsilon, t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{E_R(\varepsilon,t) \cap [1,+\infty) \times [1,+\infty)} \frac{dr_1 dr_2}{r_1 r_2} = O(\ln R), R \to +\infty,$$

holds, where $E_R(\varepsilon, t) = E(\varepsilon, t) \cap \triangle_R$, $\triangle_R = \{r \in \mathbb{R}_+^2;\ 1 \leq r_1 \leq R, 1 \leq r_2 \leq R\}$.

1. Зрум О., Скасків О. Уточнення нерівності Фентона для цілих функцій від двох комплексних змінних // Матем. вісник НТШ. – 2006. – **3**. – С. 56–68.

Олег Скасків[1], Оксана Трусевич[2]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка
[2]Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
matstud@franko.lviv.ua

СПІВВІДНОШЕННЯ БОРЕЛЯ ДЛЯ РЯДІВ, ПОДІБНИХ ДО РЯДУ ТЕЙЛОРА-ДІРІХЛЕ

Нехай $S(\lambda,\beta,\tau)$ – клас збіжних для всіх $x \geq 0$ рядів вигляду $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \exp(x\lambda_n + \tau(x)\beta_n)$, $a_n \geq 0$, $(n \geq 0)$, де $\lambda = (\lambda_n)$, $\beta = (\beta_n)$ – невід'ємні послідовності, $\tau(x)$ – додатна неспадна на $[0;+\infty)$ функція. Для $x \geq 0$ позначимо:

$$\mu(x,F) = \max\{a_n \exp(x\lambda_n + \tau(x)\beta_n) : n \geq 0\}.$$

Правильне таке твердження.

Теорема 1. *Нехай функція $\tau(x)$ є такою, що $\tau'(x) \geq 1$ $(x > 0)$. Якщо для функції $F \in S(\lambda,\beta,\tau)$ виконується умова*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\lambda_n + \beta_n)} < +\infty,$$

то співвідношення Бореля $\ln F(x) = (1 + o(1)) \ln \mu(x,F)$ справджується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної лебегової міри.

Твердження теореми є непокращуваним у такому сенсі. Якщо послідовності λ, β – неспадні і такі, що послідовність $(\lambda_n + \beta_n)$ має єдину точку скупчення на нескінченності та $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(\lambda_n+\beta_n)} = +\infty$, то існує функція $F \in S(\lambda,\beta,\tau)$ така, що $\ln F(x) > (1 + d) \ln \mu(x,F)$, $x \geq x_0$, $d > 0$.

У наступній теоремі відсутні будь-які умови на функцію τ, крім природної умови $\tau'(x) \geq 0$.

Теорема 2. *Нехай функція τ є такою, що $\tau'(x) \geq 0$ $(x > 0)$. Якщо для функції $F \in S(\lambda,\beta,\tau)$ виконується умова $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1/(n\lambda_n) < +\infty$, то співвідношення Бореля справджується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E скінченної лебегової міри, якщо ж виконується умова $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1/(n\beta_n) < +\infty$, то співвідношення Бореля справджується при $x \to +\infty$ зовні деякої множини E_1 такої, що $\int_{E_1} d\tau(x) < +\infty$.*

Наталия Скрипник

Одесский национальный университет им. И.И.Мечникова
talie@ukr.net

ТЕОРЕМА КРАСНОСЕЛЬСКОГО - КРЕЙНА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МНОГОЗНАЧНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

В работах В.А.Плотникова, М.М.Хапаева, О.П.Филатова рассмотрено обоснование метода усреднения для дифференциальных включений. При этом существенно использовалось выполнение условия Липшица для исходного или усредненного включения. Впоследствии T.Janiak и E.Luczak - Kumorek получили аналогичные результаты для функционально - дифференциальных уравнений. T.Dontchev заменил условие Липшица обносторонним условием Липшица.

M.Kisieliwicz и А.В.Плотников рассмотрели возможность применения некоторых схем усреднения для дифференциальных уравнений с производной Хукухары. А.В.Плотниковым было введено понятие дифференциального включения с производной Хукухары, получены некоторые свойства решений и рассмотрена возможность применения некоторых схем усреднения для такого типа включений при выполнении условия Липшица. R.Dabrowska и T.Janiak получили некоторые аналогичные результаты для дифференциальных включений с производной Хукухары с запаздыванием.

В связи с этим представляет интерес обоснование теорем о непрерывной зависимости решения от параметра, предложенное М.А.Красносельским и С.Г.Крейном для обыкновенных дифференциальных уравнений при менее ограничительных условиях, что позволяет получить обоснование метода усреднения для более широкого класса задач. В [1] доказан аналог теоремы М.А.Красносельского - С.Г.Крейна для дифференциальных включений в терминах обычных решений и $R-$решений.

В докладе рассматривается возможность переноса полученных результатов на уравнения и включения с производной Хукухары.

1. Плотникова Н.В. Теорема Красносельского-Крейна для дифференциальных включений // Дифференц. уравнения. – 2005. – **41**, №7. – С.997 – 1000.

Богдан Слободян

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
labmtd@iapmm.lviv.ua

КОНТАКТ ПІВПРОСТОРУ ТА ЖОРСТКОЇ ОСНОВИ З ЕЛІПТИЧНОЮ ВИЇМКОЮ, ЩО МІСТИТЬ СИМЕТРИЧНІ КАПІЛЯРИ

У праці [1] започатковано дослідження взаємодії тіл з урахуванням впливу капілярів у міжповерхневому просвіті, зумовленому виїмкою на одній з поверхонь, коли під час стиску міжповерхневий зазор змінює свою довжину. Нами вивчається дія капілярів у міжповерхневому просвіті на контакт пружного півпростору з жорсткою основою, що має плитку виїмку у формі півеліпса, за незмінної довжини зазору. Тіла перебувають під однорідним тиском на нескінченності. Рідина в капілярах нестислива і повністю змочує поверхні тіл. Між капілярами в просвіті міститься газ під тиском P_1, який не змінюється в процесі навантаження. На межі меніска діє поверхневий натяг σ, внаслідок чого тиск в рідині P_2 відрізняється від тиску газу і визначається за формулою Лапласа: $P_2 = P_1 - 2\sigma/h(a)$, де $h(a)$ – висота меніска. Поза просвітом відбувається безфрикційний контакт тіл. Довжина капілярів і тиск у них залежатимуть від прикладеного зовнішнього навантаження. Використовуючи метод комплексних потенціалів Мусхелішвілі, розв'язок контактної задачі подано через функцію висоти просвіту $h(x)$, для визначення якої отримано сингулярне інтегральне рівняння. Його розв'язок, побудований аналітично, містить невідому координату меніска a та тиск у капілярі P_2. Використовуючи умову збереження кількості рідини у капілярах та формулу Лапласа, для їх визначення отримано нелінійні алгебраїчні рівняння, розв'язок яких побудовано числово. На підставі запропонованої аналітико-числової методики проаналізовано вплив поверхневого натягу рідини та її кількості на трансформацію просвіту та зміну довжини капілярів у процесі навантаження на контактний тиск зовні виїмки. Визначено навантаження, за якого капіляри зливаються.

1. Мартиняк Р.М., Слободян Б.С. Взаємодія двох тіл за наявності капілярів у міжконтактному зазорі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 1. – С. 164-173.

Наталия Снижко

Запорожский национальний университет

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ БИСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РЕДУКЦИИ

Пусть $H_{\omega^{(1)}}^{(\mu,\nu)}(\gamma_0)$ – обобщённое пространство Гёльдера со стандартной нормой [1], $\gamma_0 = \gamma_{01} \times \gamma_{02}$ – единичный бикруг. Рассматривается уравнение

$$a_0\varphi + a_1 S_1\varphi + a_2 S_2\varphi + a_{12} S_{12}\varphi + T\varphi = f, \tag{1}$$

где

$$(S_1\varphi)(t,\tau) = \frac{1}{\pi i}\oint\limits_{\gamma_{01}} \frac{\varphi(t_0,\tau)}{t_0 - t}dt_0, (S_2\varphi)(t,\tau) = \frac{1}{\pi i}\oint\limits_{\gamma_{02}} \frac{\varphi(t,\tau_0)}{\tau_0 - \tau}d\tau_0,$$

$$(S_{12}\varphi)(t,\tau) = -\frac{1}{\pi^2}\oint\limits_{\gamma_{01}}\oint\limits_{\gamma_{02}} \frac{\varphi(t_0,\tau_0)}{(t_0-t)(\tau_0-\tau)}dt_0 d\tau_0,$$

$$(T\varphi)(t,\tau) = -\frac{1}{4\pi^2}\oint\limits_{\gamma_{01}}\oint\limits_{\gamma_{02}} K(t,\tau;t_0,\tau_0)\varphi(t_0,\tau_0)dt_0 d\tau_0,$$

функции $f, a_0, a_1, a_{12} \in H_{\omega^{(1)}}^{(\mu,\nu)}(\gamma_0)$, $K \in H_{\omega^{(1)}}^{(\mu,\nu)}(\gamma_0)$ по первым двум переменным и по двум последним.

В предположении, что уравнение (1) нётерово, построена и обоснована вычислительная схема приближённого решения уравнения (1) методом редукции (приближённые решения строятся в виде отрезков рядов Фурье по системе функций $t^k\tau^l$ на бикруге γ_0, $t \in \gamma_{01}, \tau \in \gamma_{02}$). Доказаны теоремы существования (реализуемости алгоритма) и единственности приближённых решений, а также сходимость приближённых решений к точному по норме пространств $C(\gamma_0)$, $H_{\omega^{(2)}}(\gamma_0)$, где $H_{\omega^{(2)}}(\gamma_0) \subset H_{\omega^{(1)}}^{(\mu,\nu)}(\gamma_0)$. Получены оценки скорости сходимости приближённых решений к точному в указанных пространствах.

1. Сніжко Н. В. Класифікація узагальнених просторів Гельдера функцій двох змінних // Вісник Київського ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 1999. – Вип. 3. – С. 124-128.

Галина Снітко

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
snitkog@ukr.net

ВИЗНАЧЕННЯ МОЛОДШОГО КОЕФІЦІЄНТА В ПАРАБОЛІЧНОМУ РІВНЯННІ В ОБЛАСТІ З ВІЛЬНИМИ МЕЖАМИ

В області $\Omega_T = \{(x,t) : h_1(t) < x < h_2(t), 0 < t < T\}$, де $h_1(t)$, $h_2(t)$ – невідомі функції, такі, що $h_2(t) - h_1(t) > 0,\ t \in [0,T]$, розглянемо параболічне рівняння з невідомим коефіцієнтом $b = b(t)$

$$u_t = a(x,t)u_{xx} + b(t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1}$$

початкову умову

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [h_0,\, h_2(0)], \tag{2}$$

крайові умови

$$u(h_1(t),t) = \mu_1(t), \qquad u(h_2(t),t) = \mu_2(t), \qquad t \in [0,T], \tag{3}$$

та додаткові умови

$$h_1'(t) = u_x(h_1(t),t) + \mu_3(t), \quad h_2'(t) = -u_x(h_2(t),t) + \mu_4(t),$$

$$\int\limits_{h_1(t)}^{h_2(t)} u(x,t)dx = \mu_5(t), \qquad t \in [0,T], \tag{4}$$

$$h_1(0) = h_0. \tag{5}$$

Вводячи нову змінну $y = \dfrac{x - h_1(t)}{h_3(t)}$, де $h_3(t) \equiv h_2(t) - h_1(t)$, задачу (1)–(5) зводимо до оберненої з невідомими $(b(t), h_1(t), h_3(t), v(y,t))$, де $v(y,t) = u(h_1(t) + yh_3(t), t)$, в області $Q_T = \{(y,t) : 0 < y < 1, 0 < t < T\}$. За допомогою теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора встановлено умови існування класичного розв'язку задачі (1)–(5). Єдиність розв'язку цієї задачі випливає з єдиності розв'язку відповідної системи рівнянь Вольтери другого роду.

Михайло Солодяк[1], Роман Івасько[1], Стефан Шимура[2]

[1]ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
[2]Політехніка Опольська, Польща

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ З ФЕРОМАГНІТНОГО МАТЕРІАЛУ ЗА ДІЇ ГАРМОНІЧНОГО В ЧАСІ МАГНІТНОГО ПОЛЯ З ПІДМАГНІЧУВАННЯМ

Запропоновано методику наближеного знаходження параметрів електромагнітного, температурного і механічного полів у феромагнітному шарі, який перебуває під дією електромагнітного поля (ЕМП), заданого значеннями сталої і періодичної в часі складових напруженості магнітного поля на поверхні. Для розв'язання нелінійної задачі електродинаміки використано метод малого параметра, за який вибрано відношення амплітуди гармонічної складової до сталої складової напруженості магнітного поля (за обмеження трьома членами розвинення). Як наслідок отримано систему квазілінійних диференціальних рівнянь параболічного типу.

Нелінійність матеріальних співвідношень електродинаміки зумовлює появу спектра парних і непарних гармонік характеристик ЕМП, які суттєво впливають на термонапружений стан шару. За відсутності підмагнічування наявні лише непарні гармоніки.

Визначено параметри ЕМП, для яких значення ключових функцій задачі термопружності (температури та напружень) не перевищують допустимих (відповідно точки Кюрі та межі пружності). При цьому визначальними є допустимі значення межі пружності (для шару з технічно чистого заліза допустимі напруження досягаються при значно менших величинах напруженості магнітного поля, ніж температура Кюрі).

Встановлено, що розподіли температури та напружень у шарі у випадку, коли відносна глибина проникання ЕМП у феромагнітне середовище є співвимірною або більшою від товщини шару, є лінійними як для феромагнітного, так і для неферомагнітного матеріалу.

Андрій Соломко

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

ВЕКТОРНОЗНАЧНЕ ФУНКЦІОНАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ УЛЬТРАРОЗПОДІЛІВ КЛАСУ ЖЕВРЕ

Розглянемо простір нескінченно-диференційованих функцій

$$G_\nu[a,b] = \left\{ \varphi : \operatorname{supp}\varphi \subset [a,b],\ \|\varphi\|_{G_\nu[a,b]} = \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \sup_{t\in[a,b]} \frac{|\varphi^{(k)}(t)|}{\nu^k k^{k\aleph}} < \infty \right\},$$

де $\aleph > 1$ – деяке фіксоване додатне число, a, b, ν – довільні дійсні числа, $\nu > 1$, $a < b$. Визначимо простір $G(\mathbb{R}) = \liminf_{b>a,\,\nu\to\infty} G_\nu[a,b]$ ультрадиференційованих функцій класу Жевре. Побудуємо фактор-простір $\mathcal{G}(\mathbb{R}_+) \equiv G(\mathbb{R})/\operatorname{Ker}\Theta$, де Θ – оператор множення довільної функції із $G(\mathbb{R})$ на функцію Хевісайда. Елементи простору $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+) \equiv \mathcal{G}(\mathbb{R}_+)\widetilde{\otimes}_p \ldots \widetilde{\otimes}_p \mathcal{G}(\mathbb{R}_+)$ називаємо ультрадиференційовними функціями з носіями в $\mathbb{R}^n_+$, а $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$ – ультрарозподілами класу Жевре .

Нехай $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|)$ – банаховий простір. До простору $\mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{Y})$ віднесемо всі $\mathcal{Y}$-значні ультрадиференційовані функції $x(\tau)$ з компактними носіями в конусі $\mathbb{R}^n_+$. Розглянемо $U_s : \mathbb{R}^n_+ \ni s \to U_s \in L(\mathcal{Y})$ – n-параметричну напівгрупу операторів класу (C_o) над $\mathcal{Y}$.

Визначимо простір $\widehat{\mathcal{G}}(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{Y}) = \{\widehat{x} = \int_{\mathbb{R}^n_+} U_s x(s)ds : x(s) \in \mathcal{G}(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{Y})\}$. Нехай $L[\widehat{\mathcal{G}}(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{Y})]$ – простір лінійних неперервних відображень над $\widehat{\mathcal{G}}(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{Y})$. Визначимо оператор $\widehat{f}(A) : \widehat{x} \to \widehat{f}(A)\widehat{x} = \int_{\mathbb{R}^n_+} (U_s \otimes T_f)x(s)ds$, де $(T_f\varphi)(\tau) = \langle f(\sigma), U_\sigma\varphi(\tau)\rangle$, $U_\sigma = U_{\sigma_1}\otimes\ldots\otimes U_{\sigma_n}$, $U_{\sigma_j} : \varphi(\tau) \to U_{\sigma_j}\varphi(\tau) = \theta(s_j)\varphi(\tau_1, \ldots, \tau_j + s_j, \ldots, \tau_n)$, $\sigma_j = \theta(s_j)s_j$, $j = 1, \ldots, n$, $s, \tau, \sigma \in \mathbb{R}^n_+$.

Теорема. *Відображення $\Phi : \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+) \ni f \to \widehat{f}(A) \in L[\widehat{\mathcal{G}}(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{Y})]$ є неперервним гомоморфізмом алгебри ультрарозподілів класу Жевре в алгебру операторів $L(\widehat{\mathcal{G}}(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{Y}))$. Зокрема, $f * g \to \widehat{f}(A) \circ \widehat{g}(A)$, $f, g \in \mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$, де $*$ – згортка в $\mathcal{G}'(\mathbb{R}^n_+)$, $\circ$ – композиція в алгебрі $L[\widehat{\mathcal{G}}(\mathbb{R}^n_+, \mathcal{Y})]$.*

1. Komatsu H. Ultradistributions II. The Kernel Theorem and Ultradistributions with Support in a Submanifold // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math. – 1977. – № 20. – P. 25–105.
2. Haase M. The Functional Calculus for Sectorial Operators. – Berlin: Springer. – 2006. – 392 p.

Тетяна Сопронюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
vertex@sacura.net

АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОЇ ІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ

Розглядається нелінійна система рівнянь з імпульсною дією

$$\frac{dx}{d\tau} = (a(\tau) + A(\varphi, \tau))x + g(x, \varphi, \tau), \quad \tau \neq \tau_j,$$
$$\Delta x|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon(b_j + B(\varphi, \tau_j))x + I_j(x, \varphi) \tag{1}$$

і задача Коші

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + C(\varphi, \tau), \quad \tau \neq \tau_j,$$
$$\Delta\varphi|_{\tau=\tau_j} = \varepsilon\Phi_j(\varphi), \quad \varphi|_{\tau=t_0} = \psi, \tag{2}$$

де $\tau \in I = [t_0, \infty)$, $t_0 < \tau_1$, $x \in \mathbf{R}^n$, $\varphi \in \mathbf{R}^m$, $\psi \in \mathbf{R}^m$, $(0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$ — малий параметр, матриці b_j сталі, $\sup \|b_j\| \leq \sigma_1 = const$, $j \in \mathbf{N}$, матриці $a(\tau)$, $A(\varphi, \tau)$, $B(\varphi, \tau)$, $C(\varphi, \tau)$, $\partial A(\varphi, \tau)/\partial\tau$, $\partial B(\varphi, \tau)/\partial\tau$, $\partial C(\varphi, \tau)/\partial\varphi$ та $\Phi_j(\varphi, \tau)$ неперервні в $\mathbf{R}^{m+1}$ і обмежені деякою сталою, функції $A(\varphi, \tau)$, $B(\varphi, \tau)$, $\partial A(\varphi, \tau)/\partial\tau$ і $\partial B(\varphi, \tau)/\partial\tau$ 2π-періодичні за кожною із координат φ_ν, $\nu = \overline{1, m}$, вектора φ, моменти імпульсної дії τ_j є функціональними, тобто такими, що виконується рівність $\tau_{j+1} = \tau_j + \varepsilon\theta(\tau_j)$, причому, для всіх $\tau \in I$ справджуться умова $\sigma_2 \leq \theta(\tau) \leq \sigma_3$.

Нехай в системі (1) $\varphi = \varphi_{t_0}^{\tau}(\psi, \varepsilon)$ — розв'язок імпульсної задачі Коші (2), матрицант U_t^τ системи без імпульсної дії $\dfrac{dx}{d\tau} = a(\tau)x$, задовольняє експоненціальну оцінку

$$\|U_t^\tau\| \leq Ke^{-\gamma(\tau - t)}, \quad K \geq 1, \quad \gamma > K\sigma_1/\sigma_2, \quad \tau \geq t \geq t_0,$$

справджуються умови

$$g(0, \varphi, \tau) = 0, \quad I_j(0, \varphi) = 0, \quad \|g(x, \varphi, \tau)\| \leq a\|x\|, \quad \|I_j(x, \varphi)\| \leq a\|x\|,$$
$$\tau \in I, \quad \varphi \in \mathbf{R}^m, \quad j \in \mathbf{N}, \quad \|x\| \leq h, \quad h > 0,$$

і виконуються певні обмеження на частоти $\omega(\tau)$, функції $\theta(\tau)$ та коефіцієнти Фур'є функцій $A(\varphi, \tau)$ і $B(\varphi, \tau)$. Доведено, що існує $\varepsilon_0 > 0$ таке, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ при досить малих a тривіальний розв'язок системи (1) асимптотично стійкий.

Андрій Сорич, Віктор Сорич, Ніна Сорич

Інститут математики НАН України
Кам'янець-Подільський державний університет

НАЙКРАЩІ ЛІНІЙНІ МЕТОДИ НАБЛИЖЕННЯ ЛІНІЙНОЇ КОМБІНАЦІЇ ЯДЕР ПУАССОНА

Нехай $P^q_{\beta,\infty}$ - клас неперервних 2π - періодичних функцій f(x) , які допускають зображення у вигляді згортки $f(x) = \frac{a_0}{2} + \varphi * P^q_\beta$, де $P^q_\beta(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} q^k \cos(kt - \frac{\beta\pi}{2})$- ядро Пуассона, а функції $\varphi(t)$ мають середні значення на періоді рівні нулю і задовольняють умову $\|\varphi\|_\infty \leq 1$, числа $q, q_1, q_2, ..., q_m$ підпорядковані умові $0 < q < q_1 \leq q_2 \leq ... \leq q_m \leq 1$, а $\beta_i \in R$, $i = \overline{1,m}$. Через $P^q_{\beta,\infty}H^p_\infty$ позначимо підмножину функцій f(x) із класу $P^q_{\beta,\infty}$, (q,β) - похідна яких ортогональна до всіх тригонометричних многочленів степеня $p-1 (p \geq 1)$. При цьому (q,β) - похідна $f^{(q)}_\beta(x)$ означається в розумінні О.І. Степанця. Кожній функції $f^{(q_i)}_{\beta_i} \in P^{\frac{q}{q_i}}_{\beta-\beta_i,\infty}$ поставимо у відповідність многочлен

$$U_{n-1}(f;x) =$$

$$\sum_{k=p}^{n-1} \{\mu_{k,i}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) + \nu_{k,i}(b_k(f)\cos kx - a_k(f)\sin kx)\}$$

$$0 \leq p \leq n-1, \qquad 1 \leq i \leq m,$$

у якому $\mu_{k,i}$, $\upsilon_{k,i}$ - довільні дійсні сталі. Як похибку сумісного наближення функції та їх (q_i, β_i) - похідних лінійними методами (μ_i, ν_i) розглянемо вираз

$$\varepsilon_{n,m}(P^q_{\beta,\infty}H^p_\infty) = \sup_{f \in P^q_{\beta,\infty}H^p_\infty} || \sum_{i=1}^{m} c_i(n)(f^{(q_i)}_{\beta_i}(n) - U_{n-1}(f;x))|| \qquad (1)$$

Метод наближення $(\mu^*_i; \nu^*_i)$ назвемо найкращим для сумісного наближення, якщо верхня грань у (1) буде найменшою.

У роботі встановлені: теорема існування найкращого лінійного методу сумісного наближення функції та їх похідних; критерій найкращого лінійного методу сумісного наближення; знайдено точне значення нижньої межі у (1).

Марта Стасюк

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності

ПРО СПЕКТРАЛЬНІ ВЛАСТИВОСТІ ОДНІЄЇ НЕКЛАСИЧНОЇ ЗАДАЧІ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ

Нелінійна (за параметром λ) задача на власні значення

$$\alpha^2 y^{\mathrm{IV}} + M^2 y'' = -2\lambda\alpha y'' - \lambda^2 y, x \in (0,l), \tag{1}$$

$$y(0) = y(l) = 0,$$

$$\left(\alpha^2 y''' + \left(\alpha\lambda + M^2\right)y'\right)\Big|_{x=0} = \left(\alpha^2 y''' + \left(\alpha\lambda + M^2\right)y'\right)\Big|_{x=l} = 0 \tag{2}$$

пов'язана зі згинанням вала, що обертається [1].

За допомогою вектора $\overline{Y} = \left(y, y', y^{[2]}, y^{[3]}\right)^T$, де $y^{[2]} = \alpha^2 y'' + \lambda\alpha y$, $y^{[3]} = -\left(\alpha^2 y''' + (\alpha\lambda + M^2)y'\right)$ – друга і третя квазіпохідні відповідно, ця задача зводиться до добре вивченої [2] задачі

$$I\overline{Y}' = (B + \lambda A)\,\overline{Y}, \overline{Y}(0) = M\overline{\nu}, \quad \overline{Y}(l) = N\overline{\nu}, \tag{3}$$

де $\overline{\nu}$ – довільний (ненульовий) вектор, I – косоермітова, а A, B – ермітові матриці, причому виконується умова

$$M^* I M = N^* I N.$$

З еквівалентності задач на власні значення (1), (2) та (3) випливає, що всі власні значення λ_k задачі (1),(2) – дійсні, а відповідні нормовані власні функції $y_k(x, \lambda_k)$ справджують умови ортогональності:

$$\int_0^l \left(y_k(x,\lambda_k) y_l^{[2]}(x,\lambda_l) + y_k^{[2]}(x,\lambda_k) y_l(x,\lambda_l)\right) dx = \delta_{kl},$$

де δ_{kl} – символ Кронекера.

1. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1968. – 503 с.
2. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи. – М.: Мир, 1968. – 749 с.

Сергій Стасюк

Інститут математики НАН України
stasyuk@imath.kiev.ua

НАЙКРАЩЕ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$

Нехай $L_q(\pi_d)$, $1 \le q \le \infty$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d}[-\pi,\pi]$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною функцій $f(x) = f(x_1,\dots,x_d)$ зі скінченною нормою $||f||_q = \left((2\pi)^{-d}\int_{\pi_d}|f(x)|^q dx\right)^{1/q}$, $1 \le q < \infty$, з природною модифікацією при $q = \infty$.

Вивчаються величини $E_{Q(N)}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q$ — найкраще наближення класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ (що є аналогами класів Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$) в просторі L_q тригонометричними поліномами зі спектром із множин $Q(N)$, що породжені поверхнями рівня функції $\Omega(t)$ типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє умови Барі–Стєчкіна (S) та (S_l). Згідно з означенням

$$E_{Q(N)}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q = \sup_{f\in B^{\Omega}_{p,\theta}} \inf_{T_{Q(N)}(\cdot)} ||f(\cdot) - T_{Q(N)}(\cdot)||_q,$$

де $T_{Q(N)}(x) = \sum\limits_{k\in Q(N)} c_k e^{i(k,x)}$, $(k,x) = \sum\limits_{j=1}^{d} k_j x_j$, $Q(N) = \bigcup\limits_{s\in\varkappa(N)} \rho(s)$, $\rho(s) = \{k:\ k = (k_1,\dots,k_d),\ 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ k_j \in \mathbb{Z},\ j = \overline{1,d}\}$, $\varkappa(N) = \{s:\ s = (s_1,\dots,s_d):\ s_j \in \mathbb{N},\ \Omega(2^{-s_1},\dots,2^{-s_d}) \ge \frac{1}{N}\}$.

Сформулюємо один з одержаних результатів.

Теорема. *Нехай $\Omega(t)$ задовольняє умови (S) та (S_l), а параметри p і q задовольняють одну з наступних умов:* 1) $1 \le q = p < \infty$; 2) $1 < q < p \le \infty$, $p \ge 2$; 3) $1 \le q < p \le 2$. *Тоді при* $1 \le \theta < \infty$

$$E_{Q(N)}(B^{\Omega}_{p,\theta})_q \asymp \frac{1}{N}\,(\log_2 N)^{(d-1)(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{\theta})_+},$$

де $p_0 = \min\{p,2\}$, $a_+ = \max\{a,0\}$.

Зазначимо, що випадок $\theta = \infty$ ($B^{\Omega}_{p,\infty} = H^{\Omega}_p$) розглянутий Н.Н. Пустовойтовим [1].

1. Пустовойтов Н.Н. Приближение многомерных функций с заданной мажорантой смешанных модулей непрерывности // Матем. заметки. — 1999. — **65**, № 1. — С. 107-117.

Ярослав Стасюк

Львівський національний університет імені Івана Франка
yaroslav_stasyuk@yahoo.com

ПРО АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ АНАЛІТИЧНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ АЛГЕБРИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$P_0(z,F)(F')^n = \sum_{j=1}^{m} P_j(z,F)T_j[F], \tag{1}$$

де $n, m \in \mathbb{N}$, функції $P_j(z,F)$ — поліноми від z і F, $P_0(z,F) \not\equiv 0$, а $T_j[F]$ мають вигляд

$$T_j[F] = (F')^{j_1}(F'')^{j_2}\dots(F^{(l)})^{j_l},$$

де $\{j_1, j_2, \dots, j_l\} \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$, $j \in \{1,\dots,m\}$. Вагою $T_j[F]$ назвемо суму $\nu_j = j_1 + 2j_2 + \dots + lj_l$. Позначимо

$$P[F](z) = \sum_{j=1}^{m} P_j(z,F)T_j[F].$$

Вагою $P[F](z)$ називатимемо величину $\nu(P) = \max\limits_{1\le j\le m}\{\nu_j\}$. Нехай $d_j = \deg_z P_j(z,F)$ для $j \in \{0,1,\dots,m\}$ і $\alpha = \max\limits_{1\le j\le m}\{(d_j + d_0) - (n - \nu_j), 0\}$.

Означення. Аналітичний у півплощині $D_0 = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ розв'язок диференціального рівняння (1) називатимемо *допустимим*, якщо виконується умова

$$\varlimsup_{\operatorname{Re} z\to -0} |\operatorname{Re} z|^{\alpha+1} F^{\#}(z) < +\infty,$$

де $\frac{|F'(z)|}{1+|F(z)|^2} = F^{\#}(z)$ — сферична похідна функції F.

Справедлива наступна теорема.

Теорема. *Якщо F — аналітичний розв'язок рівняння (1) у півплощині D_0 і виконується умова $n > \nu(p)$, то F — допустимий розв'язок.*

Михайло Сташенко, Галина Губаль

Волинський інститут економіки та менеджменту
smo05@ukr.net, hhm@lt.ukrtel.net

ІНВАРІАНТНІСТЬ РІВНОВАЖНОГО РОЗВ'ЯЗКУ У ФОРМІ РОЗКЛАДУ ЗА КУМУЛЯНТАМИ

Розглянемо нескінченну одновимірну несиметричну систему частинок з масою $m = 1$ і діаметром σ, що взаємодіють через двічі неперервно диференційовний потенціал скінченного радіусу дії з твердою серцевиною, яка задовольняє умову регулярності

$$\int dq|e^{-\beta\Phi(q)} - 1| \equiv C(\beta) < \infty, \beta > 0.$$

Розв'язок $F(t) = \{F_{|Y|}(t, Y)\}$ задачі Коші для ланцюжка рівнянь Боголюбова цієї системи має вигляд [1], [2]:

$$F_{|Y|}(t,Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2=n} \int\limits_{(\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1)^{n_1+n_2}} d\,(X\setminus Y)\,\mathfrak{A}_{(n_2,n_1)}(t, X_Y)F_{|X|}(0,X),$$

де $Y = (x_{-s_2}, \ldots, x_{s_1})$, $X = (x_{-(n_2+s_2)}, \ldots, x_{s_1+n_1})$, $\mathfrak{A}_{(n_2,n_1)}(t, X_Y) = \\ = \sum_{P:X_Y=\bigcup_i X_i} (-1)^{|P|-1} \prod_{X_i\subset P} S_{|X_i|}(-t, X_i)$, $\sum_P$ – сума за всіма впорядкованими розбиттями частково впорядкованої множини X_Y на $|P|$ непорожніх частково впорядкованих підмножин X_i, що взаємно не перетинаються, а множина Y належить одній із підмножин X_i.
Теорема. *Якщо початкові дані – рівноважні функції розподілу, то розв'язок задачі Коші для ланцюжка рівнянь Боголюбова теж рівноважний.*

1. Герасименко В. І., Сташенко М. О. Нерівноважні кластерні розклади несиметричних систем частинок // Наук. вісн. Волин. держ. ун-ту. – 2002. – № 4. – С. 5–13.
2. Сташенко М. А., Губаль Г. Н. О теоремах существования решения начальной задачи для цепочки уравнений Боголюбова в пространстве последовательностей ограниченных функций // Сиб. мат. журн. – 2006. – **47**, № 1. – С. 188–205.

Роксоляна Столярчук

Національний університет „Львівська політехніка“

ДОСЛІДЖЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО–АЛГЕБРИЧНИХ ЗАДАЧ ІНДЕКСУ 1 ЗА ДОПОМОГОЮ ДРОБОВО–РАЦІОНАЛЬНИХ ЧИСЛОВИХ МЕТОДІВ

Розглядається методика побудови нових числових методів розв'язку задачі Коші для систем диференціально-алгебричних рівнянь

$$F(x, y, y') = 0\ ,\ y(x_0) = y_0\ ,\ x_0\ \le x\ \le x_k, \tag{1}$$

де F – гладка дійсна S – вимірна вектор-функція, в припущенні існування та єдиності розв'язку системи (1). З цією метою до задачі (1) додається додаткова початкова умова $y'(x_0) = y_0'$, де y_0' – корінь рівняння $F(x_0, y_0, y') = 0$. Система (1) розглядається в деякій замкнутій області.

Розв'язок задачі (1) конструюється за допомогою багатокрокових дробово-раціональних числових методів, які базуються на дробово-раціональних наближеннях

$$y_{n+1}^{[p]} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j a_p^j h^j J_n^j T_{p-j,n}}{(E - a_p h J_n)^p}, \tag{2}$$

де $T_{p-j,n}$ – тейлорівське наближення розв'язку $p-j$ порядку відносно сіткового вузла x_n [1].

З метою зменшення обчислювальних затрат для визначення тейлорівських наближень розв'язку задачі (2) використовуються багатокрокові дробово-раціональні числові методи.

Досліджені умови стійкості запропонованих методів довільного скінченного порядку точності. Алгоритм реалізації цих багатокрокових методів не вимагає розв'язку систем алгебричних рівнянь. Аналіз експериментальних результатів підтверджує ефективність розроблених методів порівняно з іншими сучасними числовими методами.

1. Slonevsky R., Stolyarchuk R. New methods for numerical investigation of dynamic processes // Proceedings of SIMS 2004 45th International Conference of Scandinavian Simulation Society. Copenhagen, Denmark, September 23-24. – 2004. – P. 249-254.

Oksana Sumyk

Ivan Franko Lviv National University
o_sumyk@yahoo.com

ON ROBINSON'S CONJECTURE ON CESÁRO POLYNOMIALS

Let $C_n^{(\alpha)}(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} c_k^{(n)}(\alpha) z^k$ be Cesàro polynomials, where $c_k^{(n)}(\alpha) = \prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{\alpha}{n-k+j}\right)^{-1} = \frac{A_{n-k}^{(\alpha)}}{A_n^{(\alpha)}}$ and $(1-z)^{-\alpha-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\alpha)} z^n$.

Definition 1. *For non-negative α and β we define $T(\alpha,\beta)$ as a class of analytic in the unit disc functions φ satisfying conditions $\varphi(0) = 1$ and*

$$\varphi(z) * \frac{(1+xz)^\alpha}{(1-z)^\beta} \neq 0, \quad |x| = 1, \quad z \in \mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}.$$

It is known ([1, P. 263]) that if α and β are positive integers and $\varphi \in T(\alpha,\beta)$, then $\varphi(z) * R(z) \neq 0$ for $|z| < 1$, where $R(z) = p(z)/q(z)$ is a rational function without poles and zeroes in $\mathbb{D}$, $\deg p \leq \alpha$, $\deg q \leq \beta$.

What is actually known about the class $T(\alpha,\beta)$, when α is a general real parameter ≥ 1, is very little. Progress in the theory can be made if we modify the definition as follows.

Definition 2. *We say $\varphi \in T_0(\alpha,\beta)$ if φ is analytic in $\mathbb{D}$ with $\varphi(0) = 1$ and satisfies*

$$\varphi(z) * \frac{(1+xz)^m (1+uz)^\gamma}{(1-z)^\beta} \neq 0, \quad z \in \mathbb{D},$$

for $|x| = |u| = 1$, where $m = [\alpha]$ and $\gamma = \{\alpha\}$.

It is known a definitive method for constructing members of the classes only in the cases when $\alpha = 1$. In 1996 S.Robinson ([2]) proposed the following interesting conjecture

Conjecture (Robinson). *For $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$ the Cesàro polynomials $C_n^{(\alpha+\beta-1)}(z) \in T_0(\alpha,\beta)$ $(n = 1, 2, \dots)$.*

We proved correctness of the conjecture for the case $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

1. Sheil-Small T. Complex Polynomials. – Cambridge. – 2002.– 428 p.
2. Robinson S.P. Approximate Identities for Certain Dual Classes. – D.Ph.Thesis. – University of York U.K. – 1996.

Михайло Сухорольський, Віктор Коломієць, Ірина Костенко

Національний університет „Львівська політехніка“
sukhorolsky@lviv.net

ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ ЧЕРЕЗ КОНТУРНІ ІНТЕГРАЛИ

Розв'язки рівняння з частинними похідними з поліноміальними коефіцієнтами $\sum\limits_{m=0}^{k}\sum\limits_{l=0}^{k-m} a_m^l\, r^{m+l}\frac{\partial^{m+l}U}{\partial x^m \partial r^l}=0$ можна зобразити у вигляді контурних інтегралів $U=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} K(x+rz)\gamma(z)dz$, де x,r – дійсні змінні; $\gamma(z)$ – функція комплексної змінної, яка є розв'язком диференціального рівняння $\sum\limits_{l=0}^{k}(-1)^l\frac{d^l}{dz^l}\left(\gamma(z)\sum\limits_{m=0}^{l}a_m^{l-m}z^{l-m}\right)=0$; Γ – замкнений контур, що охоплює хоча б одну особливу точку функції $\gamma\left(z\right)$; $K(\cdot)$ – функція, яка визначається з крайових умов.

Розглянемо бігармонічне рівняння $\Delta\Delta U=0$ у циліндричних координатах. Його розв'язок шукаємо у вигляді $U=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}U_m(x,r)\times$ $\times\exp(im\varphi)$. Для визначення функцій U_m одержимо рівняння з частинними похідними 4-го порядку (з поліноміальними коефіцієнтами).

Відповідне допоміжне рівняння є диференціальним рівнянням четвертого порядку. Його фундаментальні розв'язки є такими:
$\gamma_0^1=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$, $\gamma_0^2=\frac{arcsh\,z}{\sqrt{1+z^2}}$, $\gamma_0^3=\frac{1}{(1+z^2)\sqrt{1+z^2}}$, $\gamma_0^4=\frac{z}{1+z^2}+$ $+\frac{arcsh\,z}{(1+z^2)\sqrt{1+z^2}}$, $\gamma_m^1=\frac{ch(m\,arcshz)}{\sqrt{1+z^2}}$, $\gamma_m^2=\frac{sh(m\,arcshz)}{\sqrt{1+z^2}}$, $\gamma_m^3=\frac{ch(m\,arcshz)}{(1+z^2)\sqrt{1+z^2}}+$ $+\frac{mz\,sh(m\,arcshz)}{(1+z^2)}$, $\gamma_m^4=\frac{sh(m\,arcshz)}{(1+z^2)\sqrt{1+z^2}}+\frac{mz\,ch(m\,arcshz)}{(1+z^2)}$, $(m=\pm1,\ldots)$.

Вирази для функцій $U_m\left(x,r\right)$ шукаємо у вигляді контурних інтегралів. Зобразивши невідомі функції $K_m(x+rz)$ у вигляді рядів за степенями змінної $(x+rz)$, одержимо для функцій $U_m\left(x,r\right)$ ряди за системами поліномів від двох змінних $x,\ r$; при цьому задача зводиться до відшукання коефіцієнтів цих рядів. Зокрема, якщо задані граничні умови на поверхнях $x=const$ або $r=const$, то задача зводиться до розвинення граничних функцій в ряди за системами поліномів від однієї змінної.

Ольга Сушко

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
sushko@iapmm.lviv.ua

НАПРУЖЕНИЙ СТАН ПІВПРОСТОРУ З ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЮ ДО ЙОГО МЕЖІ ПЛОСКОЮ ТРІЩИНОЮ ЗА ДІЇ ЗСУВНИХ ЗУСИЛЬ

Двовимірними граничними інтегральними рівняннями можна змоделювати різні фізичні та механічні поля в тілах з різнотипними просторовими тонкими неоднорідностями та тріщинами.

Для визначення концентрації напружень в околі плоскої тріщини, яка знаходиться у півпросторі під зсувними зусиллями, запропоновано метод граничних інтегральних рівнянь з використанням теорії гармонічних потенціалів. Границя півпростору вважається вільною від зовнішніх навантажень. Записано інтегральні подання переміщень і напружень, зумовлених зовнішніми навантаженнями, через невідомі скачки зміщень протилежних поверхонь тріщини. Для визначення цих скачків одержано систему двовимірних гіперсингулярних інтегральних рівнянь

$$\iint\limits_S \frac{\alpha_j(\xi)\, d_\xi S}{|\, x-\xi\,|^3} + (-1)^j \nu \frac{\partial}{\partial x_{3-j}} \iint\limits_S \frac{\alpha_1(\xi)(x_2-\xi_2) - \alpha_2(\xi)(x_1-\xi_1)}{|x-\xi|^3} d_\xi S$$

$$+ \iint\limits_S \alpha_1(\xi)\, \Omega_{j1}(x,\xi)\, d_\xi S + \iint\limits_S \alpha_2(\xi)\, \Omega_{j2}(x,\xi)\, d_\xi S = -\frac{1-\nu}{G} f_j(x),$$

$j=1,2$, де S – область тріщини, $|x-\xi| = \left[(x_1-\xi_1)^2 + (x_2-\xi_2)^2\right]^{1/2}$ – віддаль між точками $x(x_1,x_2)$ і $\xi(\xi_1,\xi_2)$ на тріщині, ν – коефіцієнт Пуассона, G – модуль зсуву, $\alpha_j(\xi) = \left[u_j^-(\xi) - u_j^+(\xi)\right]/4\pi$ – невідомі функції, які характеризують зміщення протилежних точок поверхонь тріщини, $f_j(x)$ – задані навантаження, $\Omega_{ji}(x,\xi)$, $(i=1,2)$ – регулярні ядра, що враховують взаємодію тріщини з межею півпростору. Сингулярні складові наведеної системи рівнянь регуляризуємо і будуємо її регулярне зображення, а потім і дискретний аналог у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь з добре обумовленою матрицею. Для еліптичної тріщини спочатку було використано бієктивне відображення еліптичної області на круг одиничного радіуса.

Роман Тацій, Олеся Власій

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

ЧАСТКОВО ВИРОДЖЕНІ УЗАГАЛЬНЕНІ КВАЗІДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Означення. Частково виродженим будемо називати узагальнене квазідиференціальне [1] рівняння

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}(\alpha_{ij}(x)y^{(n-i)}(x))^{(m-j)} = \sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{i+1}f_i^{(i+1)}(x), \qquad (1)$$

де $a_{00}^{-1}(x)$ – обмежена і вимірна на деякому інтервалі I дійсної осі функція; $\alpha_{i0}(x), \alpha_{0j}(x), i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$ – кусково-сталі на I функції; $\alpha_{ij}(x) = \sum\limits_{s=1}^{N} \alpha_{ij}^s \delta(x - x_s), \alpha_{ij}^s \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$; $N \in \mathbb{N}$; $f_i(x) = \sum\limits_{s=1}^{N} f_i^s \delta(x - x_s), f_i^s \in \mathbb{R}, i = 0, \ldots, m-1$; $\delta(x - x_s)$ – функція Дірака з носієм в точці x_s.

Позначимо через $y^{[i]}(x), i = 1, \ldots, n+m-1$, квазіпохідні, за допомогою яких квазідиференціальне рівняння (1) зводиться до коректної узагальненої диференціальної системи першого порядку [1]. Поставимо початкову задачу в точці $x_0 \in I$

$$y^{[i]}(x_0) = y_0^{[i]}, i = 0, \ldots, n+m-1. \qquad (2)$$

Теорема. *Існує єдиний розв'язок $y(x)$ початкової задачі (1), (2) такий, що $y^{[i]}(x), i = 0, \ldots, n-1$ є абсолютно неперервними на I функціями, а $y^{[n+i]}(x), i = 0, \ldots, m-1$ є неперервними справа функціями локально обмеженої на I варіації, стрибки яких в точках x_s, $s = 1, \ldots, N$ визначаються за формулами*

$$\Delta y^{[n+i-1]}(x_s) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k,i}^s y^{[k]}(x_s) + f_{m-i}^s.$$

1. Тацій Р.М. Дискретно-неперервні крайові задачі для диф.рівнянь з мірами. – Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Львів, 1994. – 37 с.

Юрій Теплінський, Володимир Недокіс

Кам'янець-Подільський державний університет
yuriy-teplinsky@yandex.ru

ЗЛІЧЕННОТОЧКОВІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ

У доповіді досліджується задача відшукання розв'язку рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, dx/dt)$$

з правою частиною, визначеною на добутку $G = [0, +\infty) \times D \times D_1$, де $D = \{x \in \mathfrak{M},\ \|x\| \leq M_0\}$ та $D_1 = \{x_1 \in \mathfrak{M},\ \|x_1\| \leq M_1\}$ — замкнені кулі в банаховому просторі $\mathfrak{M}$ обмежених числових послідовностей, $f = \{f_1, f_2, f_3, \dots\} : G \to \mathfrak{M}$, який задовольняє умову

$$A_0 x(0) + \sum_{i=1}^{\infty} A_i x(t_i) = \varphi(x(0); x(t_1), x(t_2), ...),$$

де $0 < t_1 < t_2 < t_3 < ...,\ \sup_i \{t_i\} = \infty$; $x = (x_1, x_2, x_3, ...) \in D$; $A_k = \left[a_{ij}^k\right]_{i,j=1}^{\infty} (k = 0, 1, 2, ...)$ — нескінченні матриці;

$$\varphi(\psi_1, \psi_2, ...) = \{\varphi_1(\psi_1, \psi_2, ...), \varphi_2(\psi_1, \psi_2, ...), ...\} : D^\infty \to \mathfrak{M},$$

множина $D^\infty = \{\psi \in \mathfrak{M}^\infty |\ \|\psi\| \leq M_0\}$ міститься в множині $\mathfrak{M}^\infty$, що є простором послідовностей $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, ...)$, $\psi_i \in \mathfrak{M}\ \forall i \in N$, обмежених за нормою $\|\psi\| = \sup_{i \in N} \{\|\psi_i\|\}$, де $\|\psi_i\|$ — норма в просторі $\mathfrak{M}$, N — множина натуральних чисел.

У випадку, коли моменти t_i $(i \in \mathbb{N})$ належать скінченному відрізку $[0, T]$, обгрунтовано можливість редукції сформульованої задачі до багатоточкової крайової задачі у скінченновимірному просторі зростаючої розмірності. Одержані результати є аналогами теорем, доведених у роботі [1], стосовно зліченноточкових крайових задач для диференціальних рівнянь нормального виду.

1. Самойленко А.М., Теплінський Ю.В., Недокіс В.А. Метод укорочення для зліченноточкових крайових задач у просторі обмежених числових послідовностей // Укр. мат. журн. — 2004. — **56**, № 9. — С. 1203-1230.

Юрій Токовий

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
tokovyy@iapmm.lviv.ua

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ БЕЗПОСЕРЕДНЬОГО ІНТЕГРУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ПЛОЩИНИ ТА ПІВПЛОЩИНИ

Побудова аналітичних та напів-аналітичних розв'язків задач теорії пружності й термопружності для неоднорідних тіл є актуальною проблемою механіки. Зокрема увагу дослідників привертають задачі, які розглядають тіла, виготовлені з неперервно неоднорідного в одному з просторових нарямків матеріалу. Прикладом таких матеріалів є функціонально-градієнтні композити (метал-кераміка), для забезпечення функціональності яких перехід складників одного в інший відбувається поступово, що здійснюється у процесі виготовлення.

У доповіді розглянуто застосування методу безпосереднього інтегрування, запропонованого В. М. Вігаком [1], до розв'язування плоских квазістатичних задач теорії пружності та термопружності для площини та півплощини, які є неоднорідними в напрямку, що збігається з однією з координатних осей (у випадку півплощини неоднорідність матеріалу розглядається у напрямку, перпендикулярному до межі). Вигідно використовуючи спосіб подання розв'язків такого класу задач для однорідного матеріалу [1], за допомогою методики [2] у просторі інтегрального перетворення Фур'є поставлені задачі зведено до розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду, розв'язки яких, у свою чергу, знайдено з використанням методу послідовних наближень.

Робота виконана за підтримки гранту Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених (№ GP/F13/0094).

1. Вігак В. М. Прямий метод інтегрування рівнянь плоских задач пружності й термопружності // Доповіді НАН України. – 1998. – № 12. – С. 62-67.
2. Tokovyy Yu. V., Rychahivskyy A. V. Reduction of plane thermoelasticity problem in inhomogeneous strip to integral Volterra type equation // Math. Modell. Anal. – 2005. – **10**, No 1. – P. 91-100.

Юрій Тополюк

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України

ЧИСЕЛЬНЕ ЗНАХОДЖЕННЯ НИЖНІХ ГРАНЕЙ ФУНКЦІОНАЛІВ В ЗАДАЧАХ З ВІЛЬНОЮ ФАЗОЮ

Розглядається задача чисельного знаходження міри несумісності рівняння

$$|Au| = F, \tag{1}$$

де A – лінійний обмежений оператор з $X \to Y$ та $F \in Y$ задані. Тут X, Y пара функціональних комплексно значних гільбертових просторів. За міру несумісності рівняння (1) приймемо величину

$$\mu = \inf_{u \in X} \left\| |Au| - F \right\|^2. \tag{2}$$

У всіх практично важливих випадках наближення до величини μ знаходиться чисельно. Відомо наближення оператора A, тобто A_δ: $\|A - A_\delta\| < \delta$. Чи буде при цьому нижня грань μ_δ для функціонала $\sigma_\delta(u) = \left\| |A_\delta u| - F \right\|^2$ наближати μ для функціонала $\sigma(u) = \left\| |Au| - F \right\|^2$? Відповідь на це питання дають наступні теореми.

Теорема 1.*Якщо A – ізометричний оператор з $X \to Y$, тобто $(Au, Av)_Y = (u, v)_X$. Тоді всякий релаксаційний числовий метод для функціонала $\sigma_\delta(u)$ $(\{\sigma_\delta(u_{n+1}) \le \sigma_\delta(u_n),\ n = 1, 2, ...\})$ що формує мінімізуючу послідовність $\{u_n^\delta\}$ володіє властивістю $\{u_n^\delta\} \to \mu$ при $\delta \to 0,\ n \to \infty$.*

Теорема 2.*Якщо A – цілком неперервний оператор з $X \to Y$. Тоді для нижньої грані функціонала $\sigma_\delta(u)$ справедливо $\lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{\|A - A_\delta\| < \delta} \mu_\delta \le \mu$. Тобто нижня грань є лише пів-неперервною зверху.*

І, взагалі кажучи, всяка мінімізуюча послідовність для функціонала $\sigma_\delta(u)$ не володіє властивістю $\{u_n^\delta\} \to \mu$ при $\delta \to 0,\ n \to \infty$. Для того, щоб ця властивість виконувалась, потрібно провести оцінку

$$|\sigma(u) - \sigma_\delta(u)| \le \Omega(\delta, u), \tag{3}$$

де $\Omega(\delta, u) = 2\delta \|F\| \|u\| + (\|A\| + \|A_\delta\|)\, \delta \|u\|^2$ і розглянути функціонал

$$\sigma_\delta^\Omega(u) = \left\| |A_\delta u| - F \right\|^2 + \Omega(\delta, u). \tag{4}$$

В цьому випадку значення функціонала (4) на мінімізуючій послідовності будуть прямувати до μ при $\delta \to 0,\ n \to \infty$. Більше, всяка мінімізуюча послідовність буде слабко збігатися до елемента на якому досягається нижня грань.

Галина Торган

Львівський національний університет імені Івана Франка
torgan_g@yahoo.com

НЕОБМЕЖЕНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ У СКІНЧЕННИЙ МОМЕНТ ЧАСУ ОДНОГО СЛАБКО НЕЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Нехай Ω – обмежена область в просторі $\mathbb{R}^n$ з межею $\partial\Omega \in C^1$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, де $T < \infty$, $\Omega_\tau = Q_T \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$.

В області Q_T розглянемо задачу для рівняння з дійснозначними коефіцієнтами

$$u_{tt} + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} (a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j})_{x_sx_l} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{tx_i})_{x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}(x)u_{x_ix_j} +$$

$$+a_0(x)u + c_0(x)u_t + \sum_{i=1}^{n} c_i(x)u_{x_i} = e^{\beta t}|u|^{p-2}u \qquad (1)$$

з початковими умовами

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x) \qquad (2)$$

і крайовими умовами

$$u\big|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial\nu}\bigg|_{\partial\Omega\times(0,T)} = 0, \qquad (3)$$

де ν – зовнішня нормаль до поверхні $\partial\Omega \times (0,T)$.

Введемо позначення

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_t} \left[u_t^2 + \sum_{i,j,s,l=1}^{n} a_{ij}^{sl}(x)u_{x_ix_j}u_{x_sx_l}\right]dx - \frac{1}{p}\int_{\Omega_t} e^{\beta t}|u|^p dx.$$

Нехай коефіцієнти рівняння задовольняють певні умови гладкості, $p \in (2, \frac{2n}{n-4})$ при $n > 4$ і $p > 2$ при $n = 1,2,3,4$, $u_0 \in H_0^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^1(\Omega)$, $E(0) = -\lambda$, $\lambda > 0$, $\beta \geq \beta_0$, $p > 2 + 2\mu_1$, де β_0, μ_1 залежать від коефіцієнтів рівняння. Тоді доведено існування такого скінченного $T_0 > 0$, що розв'язок задачі (1)-(3) стає необмеженим при $t \to T_0 - 0$.

Олеся Тракало[1], Олег Скасків[2]

Львівська державна музична академія імені Миколи Лисенка[1]
Львівський національний університет імені Івана Франка[2]
matstud@franko.lviv.ua

АБСЦИСИ ЗБІЖНОСТІ ПОДВІЙНИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ

Нехай $(\lambda_n^{(1)})$ і $(\lambda_m^{(2)})$ – послідовності невід'ємних чисел, $\lambda_0^{(1)} = \lambda_0^{(2)} = 0$, а $S^2(\lambda) = \big\{F(z_1, z_2) = \sum\limits_{n,\, m=0}^{\infty} a_{nm} \exp(z_1\lambda_n^{(1)} + z_2\lambda_m^{(2)})\big\}$ – клас подвійних рядів Діріхле. Нехай для $x = (x_1, x_2)$ $\mu(x, F) = \mu(x_1, x_2) = \max\{|a_{nm}| \exp\{x_1\lambda_n^{(1)} + x_2\lambda_m^{(2)}\} : n \geq 0, m \geq 0\}$, $M(x, F) = \sup\{|F(x + iy)| : \ y \in \mathbb{R}^2\}$. Нехай $\Phi(t)$ – зростаюча до $+\infty$ на $[0; +\infty)$ функція, а $S^2(\lambda, \Phi) = \{F \in S^2(\lambda) : \ln M(\sigma, F) = O(|\sigma|\Phi(|\sigma|))\}$, а також $S_0^2(\lambda) = \bigcup_{\rho>0} S^2(\lambda, \Phi_\rho)$, $\Phi_\rho(t) = e^{\rho t}$.

Теорема [1]. *Нехай $F \in S_0^2(\lambda)$ і при $j \in \{1; 2\}$ виконується умова* $(\forall\ b > 0) : \lim\limits_{R\to+\infty} \frac{1}{R} \sum\limits_{0<\lambda_k^{(j)}\leq\Phi(bR)} \frac{1}{k\lambda_k^{(j)}} = 0$ *з* $\Phi(t) \equiv e^t$*. Тоді співвідношення Бореля* $\ln M(x, F) = (1 + o(1)) \ln \mu(x, F)$ *є правильним при* $|x| \to +\infty$ $(x \in K \setminus E)$ *для кожного кута K з вершиною у початку координат O такого, що* $\overline{K} \setminus \{O\} \subset \mathbb{R}_+^2$*, де множина E є такою, що* $\int\limits_{E_+(R)} \frac{dx_1 dx_2}{|x|} = o(R)$ $(R \to +\infty)$*, де* $E_+(R) = E \cap \{x \in \mathbb{R}_+^2 :\ |x| \leq R\}$.

Опис величини виняткової множини E у цій теоремі є непокращуваним. Проте у загальному випадку (для довільної Φ) нам не відомо, чи правильним є опис виняткової множини, вказаний у теоремі.

Припущення. Опис виняткової множини, вказаний у теоремі, є правильним і непокращуваним у загальному випадку.

Відкрите питання. Нічого не відомо про непокращуваний опис виняткової множини у співвідношенні Бореля для різних класів цілих рядів Діріхле в $\mathbb{C}^p$, $p > 2$ (у випадку $p = 2$ див. [2]).

1. Тракало О. Про співвідношення типу Бореля для кратних рядів Діріхле // Вісн. Львів. ун-ту. – 2001. – Вип. 59. – С. 66–73.
2. Скасків О.Б., Тракало О.М. Про виняткову множину у співвідношенні Бореля для цілих подвійних рядів Діріхле // Мат. Студії. – 2001. – **15**, № 2. – С. 163–172.

Юрій Трухан

Львівський національний університет імені Івана Франка
yurik93@mail.ru

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ l-ІНДЕКСУ ДОБУТКУ БЛЯШКЕ

Нехай (a_k) — послідовність чисел з $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$, занумерованих в порядку неспадання модулів, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1 - |a_k|) < +\infty$, а $B(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{|a_k|}{a_k} \dfrac{a_k - z}{1 - \overline{a}_k z}$ — добуток Бляшке. Для додатної неперервної на $[0, 1)$ функції l такої, що $(1 - r)l(r) > \beta > 1$ для всіх $r \in [0, 1)$, функція B за означенням [1, с. 71] називається функцією обмеженого l-індексу, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що $\dfrac{|B^{(n)}(z)|}{n!l^n(|z|)} \le \max\left\{\dfrac{|B^{(k)}(z)|}{k!l^k(|z|)} : 0 \le k \le N\right\}$ для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in \mathbb{D}$. Як і в [1, с. 71], для $q \in [0, \beta)$ покладемо $\lambda_1(q) = \inf\left\{\dfrac{l(r)}{l(r_0)} : |r - r_0| \le \dfrac{q}{l(r_0)}, 0 \le r_0 < 1\right\}$ і $\lambda_2(q) = \sup\left\{\dfrac{l(r)}{l(r_0)} : |r - r_0| \le \dfrac{q}{l(r_0)}, 0 \le r_0 < 1\right\}$ та будемо говорити, що $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, якщо $(1-r)l(r) > \beta > 1$ для всіх $r \in [0, 1)$ і $0 < \lambda_1(q) \le 1 \le \lambda_2(q) < +\infty$ для кожного $q \in [0, \beta)$. Нехай $n(r) = \sum\limits_{|a_k| \le r} 1$ – лічильна функція послідовності (a_k).

Теорема *Нехай ψ – зростаюча неперервно диференційована ввігнута на $[0, +\infty)$ функція (тобто $\psi'(x) \ge 0$ і $\psi'(x)$ спадає) така, що $\psi(0) = 0$, $\psi'(n) \le C\psi'(2n)$ і $\psi(n)(1 - |a_n|) \searrow 0$, $n \to \infty$. Для того щоб добуток Бляшке B був обмеженого l-індексу з такою функцією $l \in Q_\beta(\mathbb{D})$, $\beta > 1$, що $l(r) \asymp \frac{\psi(n(r)) \ln n(r)}{\psi'(n(r))(1-r)}$, $r \to 1$, досить, щоб $\sum\limits_{k=2n(r)}^{\infty}(1 - |a_k|) = O((1 - r)n(r) \ln n(r)), r \to 1$, а у випадку додатних нулів необхідно, щоб $\sum\limits_{k=2n(r)}^{\infty}(1 - |a_k|) = O\Big((1 - r)\frac{\psi(n(r))}{\psi'(n(r))} \ln n(r)\Big), r \to 1$.*

1. Sheremeta M.M. Analytic functions of bounded index. – Lviv: VNTL Publishers, 1999. – 141 p.

Степан Фединяк

Львівський національний університет імені Івана Франка
fedynyak@yahoo.com

ПРО НУЛІ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай f – ціла функція. Точку $w \in \mathbb{C}$ називаємо *точкою максимуму модуля*, якщо $|f(w)| = M(|w|, f)$, де $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Через $R(w, f)$ позначимо відстань між точкою максимуму модуля w і множиною нулів функції f, тобто

$$R(w, f) = \inf\{|w - z| : \; f(z) = 0\}.$$

У праці [1] доведено, що якщо для цілої функції f виконується співвідношення

$$0 < \sigma = \varlimsup_{r \to \infty} \frac{\ln M(r, f)}{(\ln r)^{\rho}} < +\infty \quad (\rho > 1), \tag{1}$$

то

$$\varliminf_{|w| \to \infty} \frac{\rho \cdot (\ln |w|)^{\rho - 1}}{|w|} \cdot R(w, f) \geq \frac{1}{e^2 \sigma}. \tag{2}$$

Теорема. *Якщо для цілої функції f виконується* (1), *то*

$$\varliminf_{|w| \to \infty} \frac{\rho \cdot (\ln |w|)^{\rho - 1}}{|w|} \cdot R(w, f) \geq \frac{1}{e\sigma} \cdot \left(\frac{\rho - 1}{\rho}\right)^{\rho - 1}.$$

Теорема уточнює оцінку (2), оскільки $\left(\frac{\rho-1}{\rho}\right)^{\rho-1} > 1/e$.

1. Üreyen A.E. On maximum modulus point and the zero set for entire function // Computational methods and function theory. – 2004. – **4**, No. 2. – P. 341–354.

Василь Федорчук

Педаг. акад. ім. Комісії Нар. Освіти, Краків, Польща
ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
vasfed@gmail.com, fedorchuk@ap.krakow.pl

ПРО ПОБУДОВУ ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З НЕТРИВІАЛЬНОЮ СИМЕТРІЄЮ

Диференціальні рівняння з нетривіальною симетрією відіграють важливу роль при розв'язуванні різних задач теоретичної та математичної фізики, механіки, газової динаміки та ін. (див., наприклад, [1, 2]). Для дослідження таких рівнянь можна використовувати методи групового аналізу [1, 2, 3].

Беручи до уваги нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених розщеплюваних підгруп групи Пуанкаре $P(1,4)$ побудовано 242 класи диференціальних рівнянь першого порядку в просторі $M(1,3)\times R(u)$, які інваріантні відносно цих підгруп. Деякі з цих класів можна знайти в [4].

У цьому повідомленні мова йтиме про дослідження деяких з побудованих класів. Розглянуто тільки ті класи, для дослідження яких можна використати інваріанти їх груп симетрії. Для всіх таких класів, беручи до уваги ці інваріанти, побудовано анзаци, які редукують ці класи до класів диференціальних рівнянь з меншою кількістю незалежних змінних, проведена відповідна симетрійна редукція.

1. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1990. – 400 с.
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М. : Наука, 1978. – 399 с.
3. Lie S., Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. – Teubner, Verlag, 1891.
4. Fedorchuk V.M., Fedorchuk V.I., Some new differential equations of the first-order in the spaces $M(1,3)\times R(u)$ and $M(1,4)\times R(u)$ with given symmetry groups // Functional Analysis and its Applications, North-Holland Mathematics Studies, 197 / Ed. Saul Lubkin. – Elsevier, 2004. – P. 85-95.

Володимир Федорчук

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
volfed@gmail.com

ПРО КЛАСИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ, ІНВАРІАНТНІ ВІДНОСНО ДЕЯКИХ ПІДГРУП ГРУПИ ПУАНКАРЕ $P(1,4)$

Один із способів опису диференціальних рівнянь з нетривіальними групами симетрії базується на побудові диференціальних інваріантів різних порядків (див., наприклад , [1, 2]) відповідних груп Лі точкових перетворень.

На основі нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку неспряжених розщеплюваних підгруп групи Пуанкаре $P(1,4)$ побудовано 243 класи диференціальних рівнянь першого порядку в просторі $M(1,4) \times R(u)$, які інваріантні відносно цих підгруп. Деякі з цих класів можна знайти в [3].

У цьому повідомленні мова йтиме про подальше вивчення побудованих класів. Добре відомо, що група $P(1,4)$ містить як підгрупи такі важливі для теоретичної та математичної фізики групи: $P(1,3)$, $\widetilde{G}(1,3)$ [4], $O(1,4)$, $E(4)$, $O(4)$. На даний час з множини всіх побудованих класів диференціальних рівнянь першого порядку в просторі $M(1,4) \times R(u)$ виділено класи, які інваріантні відносно цих груп та деяких їхніх розщеплюваних підгруп.

1. Lie S. Über Differentialinvarianten // Math. Ann. – 1884. – **24**, No 1. – S. 537–578 (52–89).
2. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М. : Наука, 1978. – 399 с.
3. Fedorchuk V.M., Fedorchuk V.I., Some new differential equations of the first-order in the spaces $M(1,3) \times R(u)$ and $M(1,4) \times R(u)$ with given symmetry groups, Functional Analysis and its Applications, North-Holland Mathematics Studies, 197, Editor: Saul Lubkin, Elsevier, 2004, 85–95.
4. Фущич В.И., Никитин А.Г. Симметрия уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1990. – 400 с.

Оксана Федуник

Волинський державний університет імені Лесі Українки
Fedunyk@ukr.net

ОЦІНКИ ОРТОПРОЕКЦІЙНИХ ПОПЕРЕЧНИКІВ КЛАСІВ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Досліджуються розглянуті в [1] класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних, $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$, де $\omega(\tau)$ — задана функція (однієї змінної) типу модуля неперервності порядку l, що задовольняє умови Барі–Стєчкіна (S) і (S_l). При певному виборі функції $\Omega(t)$ класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$ співпадають з відомими класами Бєсова $B^{r}_{p,\theta}$.

Нехай $L_p(\pi_d)$ — простір 2π–періодичних за кожною змінною функцій $f(x) = f(x_1, \ldots, x_d)$ зі стандартною нормою, $\{u_i\}_{i=1}^{M}$ — ортонормована система функцій $u_i \in L_\infty(\pi_d)$, $\sum\limits_{i=1}^{M}(f, u_i)u_i$ — ортогональна проекція функції f на підпростір, породжений системою функцій $\{u_i\}_{i=1}^{M}$.

Одержано точні за порядком оцінки ортопроекційних поперечників $d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q)$, які визначаються наступним чином

$$d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) = \inf_{\{u_i\}_{i=1}^{M}} \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \left\| f(x) - \sum_{i=1}^{M}(f, u_i)u_i(x) \right\|_q.$$

Наведемо один із результатів.

Теорема. *Нехай* $1 \le q \le p \le \infty$, $p \ge 2$, $(q,p) \ne (\infty,\infty)$, $\Omega(t) = \omega(t_1 \cdot ... \cdot t_d)$, *де* $\omega(\tau)$ *задовольняє умову* (S) *з деяким* $\alpha > 0$ *і умову* (S_l). *Тоді має місце наступна порядкова рівність*

$$d^{\perp}_M(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q) \asymp \omega(2^{-n}) n^{(d-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+},$$

де $M \asymp 2^n n^{d-1}$, $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Для класів $B^{r}_{p,\theta}$ відповідний результат одержано А.С. Романюком.

1. Sun Youngsheng, Wang Heping. Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness//Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова. — 1997. — № 219. — С. 356 – 377.

Віктор Ферук

Інститут математики НАН України
feruk@imath.kiev.ua

НЕСТАЦІОНАРНИЙ ПРОЕКЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИЙ МЕТОД ДЛЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕННЯМИ

Розглядається парна система функціонально-диференціальних рівнянь з обмеженнями

$$\frac{d}{dt}x(t) + R(t)x(t) = \varepsilon g(t, x(t)), \quad t \in [a, c], \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}x(t) + N(t)\frac{d}{dt}x(t-\Delta) + L(t)x(t) + M(t)x(t-\Delta) = \\ = \varepsilon f(t, x(t), x(t-\Delta)), \quad t \in [c, b],\end{gathered} \tag{2}$$

$$x(a) = \gamma, \quad \int\limits_a^b S(t)x(t)dt = \alpha, \tag{3}$$

у якій $c \geq a + \Delta$, $\Delta > 0$ - стале запізнення, $N(t)$, $L(t)$, $M(t)$ та $S(t)$ – матриці розмірності $m \times m$, $m \times m$, $m \times m$ та $l \times m$ відповідно, елементи яких сумовні з квадратом на відрізку $[c, b]$, $R(t)$ – $(m \times m)$-матриця із сумовними з квадратом на $[a, c]$ елементами, $\varepsilon > 0$ – малий параметр, вектор-функції $f : [a, c] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ та $g : [c, b] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ задають оператори $f : L_2([a, c], \mathbb{R}^m) \to L_2([a, c], \mathbb{R}^m)$, $g : L_2([c, b], \mathbb{R}^m) \to L_2([c, b], \mathbb{R}^m)$, вектори $\gamma \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}^l$.

Розглядаються питання сумісності поставленої задачі та дається обґрунтування застосування до задачі (1)-(3) нестаціонарного проекційно-ітеративного методу [1]. Встановлюються умови збіжності та оцінки похибки запропонованого методу.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки гранта Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених № GP/F13/0097.

1. Лучка А.Ю. Проекционно-итеративные методы. – К.: Наук. думка, 1993. – 288 с.

Петро Філевич

Львівський національний університет імені івана Франка
filevych@mail.ru

ПРО АСИМПТОТИЧНУ РІВНІСТЬ ПОХІДНИХ ВІД ЛОГАРИФМІВ МАКСИМУМУ МОДУЛЯ І МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай $\mathcal{A}$ — клас трансцендентних цілих функцій $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Для $f \in \mathcal{A}$ і $r > 0$ покладемо $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_n|r^n : n \geq 0\}$, $\nu_f(r) = \max\{n \geq 0 : |a_n|r^n = \mu_f(r)\}$, $K_f(r) = r(\ln M_f(r))'_+$.

Через I позначимо клас неперервних справа, неспадних, необмежених на $[a; +\infty)$ функцій, а через Ω — клас опуклих на $[a; +\infty)$ функцій Φ, для яких $\sigma = o(\Phi(\sigma))$, $\sigma \to +\infty$.

Покладемо: $\mathcal{A}(\Phi) = \{f \in \mathcal{A} : \ln \mu_f(r) \sim \Phi(\ln r), r \to +\infty\}$, де $\Phi \in \Omega$. Справедливе таке твердження [1]: для того, щоб для довільної цілої функції $f \in \mathcal{A}(\Phi)$ виконувалось співвідношення

$$\ln M_f(r) \sim \ln \mu_f(r), \qquad r \to +\infty,$$

необхідно і досить, щоб

$$\ln \Phi'_+(\sigma) = o(\Phi(\sigma)), \qquad \sigma \to +\infty. \tag{1}$$

Аналогом останнього твердження для співвідношення

$$K_f(r) \sim \nu_f(r), \qquad r \to +\infty, \tag{2}$$

є наступна

Теорема. *Нехай $\Phi \in \Omega$. Для того щоб для довільної цілої функції $f \in \mathcal{A}(\Phi)$ справджувалось співвідношення* (2)*, необхідно і досить, щоб одночасно виконувались співвідношення* (1) *і умова*

$$\forall l \in L : \qquad \Phi'_+\left(\sigma + \frac{\Phi(\sigma)}{l(\sigma)\Phi'_+(\sigma)}\right) \sim \Phi'_+(\sigma), \qquad \sigma \to +\infty.$$

1. Філевич П. Асимптотична поведінка цілих функцій з винятковими значеннями у співвідношенні Бореля // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 4. – С. 522–530.

Оксана Фітьо, Ірина Шепарович

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
isheparovych@ukr.net

ПРО ОДНУ КРАТНУ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНУ ЗАДАЧУ В ДЕЯКОМУ КЛАСІ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

Нехай $\eta : [1; +\infty) \to (0; +\infty)$ – зростаюча функція опукла відносно $\ln r$ на $[1; +\infty)$ така, що $\ln r = o(\eta(r))$ $(r \to +\infty)$; (λ_n) – послідовність відмінних від нуля комплексних чисел така, що $|\lambda_n| \nearrow +\infty$;

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt, \quad n(t) := \sum_{0<|\lambda_n|\leqslant t} 1.$$

Розглянемо клас цілих функцій f, які задовольняють умову

$$(\exists c_1 > 0)(\exists \tau_1 \in (0; 1))\ (\forall z \in \mathbb{C}) : |f(z)| \leqslant \exp(c_1 \eta \tau_1 (c_1 |z|)). \qquad (1)$$

Для цього класу функцій в [1] отримано критерій існування розв'язку простої інтерполяційної задачі. Як і в [1], доведено твердження.

Теорема. *Для того щоб для кожної послідовності (d_n) комплексних чисел з властивістю*

$$(\exists c_2 > 0)(\exists \tau_2 \in (0; 1))(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ |d_n| \leqslant \exp(c_2 \eta^{\tau_2} (c_2 |\lambda_n|))$$

існувала ціла функція з класу (1), така що

$$f(\lambda_n) = 0,\ f'(\lambda_n) = d_n,\ f''(\lambda_n) = 0,$$

необхідно і досить, щоб

$$(\exists c_3 > 0)(\exists \tau_3 \in (0; 1))(\forall r \geqslant 0) : N(r) \leqslant c_3 \eta^{\tau_3}(c_3 r),$$

і для деякої цілої функції L з класу (1), для якої (λ_n) є послідовністю трикратних нулів, виконувалася умова

$$\exists c_4 > 0 \exists \tau_4 \in (0; 1) \forall n \in \mathbb{N} : \max_{i=1;2} \left| \frac{(z - \lambda_n)^3}{L(z)} \right|_{z=\lambda_n}^{(i-1)} \leq \exp(c_4 \eta^{\tau_4}(c_4 |\lambda_n|)).$$

1. Винницький Б.В., Шепарович І.Б. Про інтерполяційні послідовності деяких класів цілих функцій // Матем. студії. – 1999. – **12**, № 1. – С. 76–84.

Богдан Хапко, Ростислав Мартиняк, Роман Швець, Анатолій Чиж

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
labmtd@iapmm.lviv.ua

СТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ У ЖИВІЙ ТКАНИНІ З КУСКОВО-ПОСТІЙНОЮ ВЗДОВЖ ШАРУ ПЕРФУЗІЄЮ КРОВІ

Досліджується одновимірне температурне поле у межовому шарі $0 < x < l$ живої тканини з неоднорідністю на ділянці $d_1 \leq x \leq d_2$ $(0 < d_1, d_2 < l)$, де перфузія крові ω_{b2} відмінна від перфузії крові ω_{b1} основного матеріалу. На зовнішній поверхні $x = 0$ задана температура довкілля T_c, а на внутрішній $x = l$ – глибинна температура тіла T_t. Стаціонарний процес поширення тепла в шарі описується диференціальним рівнянням [1] з кусково-постійними коефіцієнтами, яке враховує артеріальну температуру крові T_a та метаболічну генерацію тепла W_s в тілі

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - [\omega_{b1} + (\omega_{b2} - \omega_{b1})\,(S_-(x-d_1) - S_+(r-d_2))] \times$$

$$\rho_b c_b\,(T - T_a) = -W_s$$

за граничних умов $T = T_c$ при $x = 0$, $T = T_t$ при $x = l$.

Тут T – температура тканини, k – коефіцієнт теплопровідності; ρ_b, c_b – густина та теплоємність крові; $S_-(x-d_1), S_+(x-d_2)$ – симетрична та асиметрична функції Хевісайда.

Розв'язання задачі зведено до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду відносно температури T на інтервалі $d_1 \leq x \leq d_2$

$$T(x) - \tfrac{\kappa_1-\kappa_2}{2\kappa}\int\limits_{d_1}^{d_2} T(\xi)\left\{e^{-\kappa|x-\xi|} - e^{\kappa(x-\xi)} - \tfrac{sh\,\kappa x\; sh\,\kappa(l-\xi)}{sh\,\kappa l}\right\}d\xi = F(x),$$

де $\kappa_i\,k = \omega_{bi}\rho_b c_b$, $\kappa^2 = \kappa_i$; $i = 1, 2$; $F(x) = F(x, T_a, T_c, T_t, W_s)$.

Це рівняння розв'язуємо чисельно, використовуючи квадратурні формули Сімпсона. На основі проведених розрахунків проаналізовано вплив температури довкілля, ширини неоднорідності та величин перфузії крові на розподіл температурного поля в тканині.

1. Pennes H.H. Analysis of tissue and arterial blood temperature in the resting human forearm // Journal of Applied Physiology. – 1948. – **1**, № 2. – P. 93-122.

Ruslan Khats'

Ivan Franko Drohobych State Pedagogical University
khats@ukr.net

ON THE DISTRIBUTION OF ZEROS OF ENTIRE FUNCTIONS OF IMPROVED REGULAR GROWTH

Let f be an entire function with $f(0)=1$, $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of its zeros and $\theta_n=\arg\lambda_n\in[0,2\pi)$. For $k\in\mathbb{Z}$ we define

$$n_k(r,f):=\sum_{0<|\lambda_n|\leqslant r} e^{-ik\theta_n},\quad N_k(r,f):=\int\limits_0^r \frac{n_k(t,f)}{t}\,dt.$$

An entire function f is called an entire function of *improved regular growth* [1], if for some ρ and ρ_1, $0<\rho_1<\rho<+\infty$, and some 2π-periodic ρ-trigonometrical convex function $h(\varphi)\not\equiv-\infty$ there exists an exceptional set $U\subset\mathbb{C}$ which is the union of disks with finite sum of radii such that

$$\ln|f(z)|=|z|^{\rho}h(\varphi)+o(|z|^{\rho_1}),\quad z=re^{i\varphi}\to\infty,\quad z\notin U.$$

If last relation holds, then [1] an entire function f has the order ρ and indicator h. In the present paper we obtain the following result about the distribution of zeros of an entire function of improved regular growth.

Theorem. *Let f be an entire function of improved regular growth of order $\rho\in(0,+\infty)$ with the indicator $h(\varphi)$. Then there exists $\rho_2\in(0,\rho)$ such that for every $k\in\mathbb{Z}$*

$$N_k(r,f)=\Delta_k r^{\rho}+o(r^{\rho_2}),\quad r\to+\infty,$$

where

$$\Delta_k=\frac{\rho^2-k^2}{2\pi\rho^2}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\varphi}h(\varphi)\,d\varphi.$$

This theorem is a generalization of Lemma 8.6 from [2].

1. Khats' R.V. Entire functions of improved regular growth. – Cand. Sci. (Phys.-Math.) Dissertation. — Drohobych: Drohobych State Pedagogical University, 2006. — 125 p. (in Ukrainian)
2. Kondratyuk A.A. Fourier series and meromorphic functions. — Lviv: Vyshcha. shkola, 1988. — 196 p. (in Russian)

Михайло Хмельовський[1], Віктор Цимбал[2]

[1]Інститут підприємництва та перспективних технологій при Національному університеті "Львівська політехніка"
[2]Львівський національний університет імені Івана Франка
victor_tsymbal@ yahoo.com

ДЕЯКА НЕЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА СПРЯЖЕННЯ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

На відрізку $[-1, 1]$ розглядаються задачі:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^i \frac{d^2y}{d\,x^2} - a(x)\,y = f(x), \quad x \in (-1, 0), \\ &\varepsilon^2 \frac{d^2y}{d\,x^2} - b(x)\,y = g(x), \quad x \in (0, 1), \end{aligned} \tag{1}$$

при $i = 2$

$$y(-1, \varepsilon) = y(0, \varepsilon) = y(1, \varepsilon), \;\; y'(-0, \varepsilon) = y'(+0, \varepsilon), \tag{2}$$

при $i = 0$

$$y(-1, \varepsilon) = 0, \; y(0, \varepsilon) = y(1, \varepsilon), \;\; y'(-0, \varepsilon) = \varepsilon^2 y'(+0, \varepsilon), \tag{3}$$

де $\varepsilon > 0$ – малий дійсний параметр, а функції a, b – невід'ємні. Однозначна розв'язальність задач (1), (2) та (1), (3) без малого параметру встановлена в [1].

Методом примежового шару [2] побудовані асимптотичні розвинення розв'язку задач (1),(2) та (1),(3) до будь-якого порядку N.

Доведена асимптотична коректність побудованих розвинень.

1. Базаров Д., Солтанов Н. Некоторые локальные и нелокальные граничные задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ашгабад.: Ylym, 1995. – 185 с.
2. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. – 272 с.

Віктор Цимбал[1], Володимир Флюд[2]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка
[2]Політехніка Опольська, Польща
victor_tsymbal@yahoo.com, vmf@mail.lviv.ua

ЗАДАЧА СПРЯЖЕННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ГІПЕРБОЛІЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Нехай $D_1 = \{(x, t):\ -1 < x < 0,\, 0 < t < T\}$, $D_2 = \{(x, t):\ 0 < x < 1,\, 0 < t < T\}$, $0 < T < +\infty$. В $D_1 \bigcup D_2$ розглядається система диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)\, u = f(x, t) \quad \text{в } D_1, \\ &\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(x)\, v = g(x, t) \quad \text{в } D_2, \end{aligned} \tag{1}$$

з початковими умовами

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad -1 < x < 0, \\ v(x, 0) &= \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = 0, \qquad 0 < x < 1, \end{aligned} \tag{2}$$

граничними умовами

$$u(-1, t) = 0, \quad v(1, t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{3}$$

та умовами спряження

$$u(-0, t) = v(+0, t), \quad \frac{\partial u(-0, t)}{\partial x} = \frac{\partial v(+0, t)}{\partial x}, \quad 0 < t < T, \tag{4}$$

де $\varepsilon > 0$ – малий дійсний параметр.

Методом примежевого шару [1] побудовано асимптотичне розвинення розв'язку задачі (1)–(4) до будь-якого порядку N. Доведена асимптотична коректність побудованих розвинень.

1. Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // УМН, 1957. – **12**, № 5. – С. 3–122.

Ярослав Чабанюк, Любомир Гошко, Сергій Семенюк

Національний університет „Львівська політехніка“
chab@yahoo.com

АСИМПТОТИКА КОМПЕНСУЮЧОГО ОПЕРАТОРА СТРИБКОВОЇ ПРОЦЕДУРИ В СХЕМІ ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ

Стрибкова процедури стохастичної апроксимації у схемі дифузійної апроксимації в напівмарковському середовищі задається у вигляді

$$u^\varepsilon(t) = u_0 + \varepsilon^4 \sum_{k=0}^{\nu(t/\varepsilon^4)-1} a_k^\varepsilon C^\varepsilon(u_k^\varepsilon, x_k^\varepsilon), t > 0. \tag{1}$$

Тут послідовність $a_n^\varepsilon, n \geq 0$, визначається значенням функції $a(t)$: $a_n^\varepsilon = a(\tau_n^\varepsilon), \tau_n^\varepsilon = \varepsilon^4 \tau_n, n \geq 0$, де $\tau_n, n \geq 0$, – моменти марковського відновлення рівномірно ергодичного напівмарковського процесу $x(t), t \geq 0$, у фазовому просторі $(X, \boldsymbol{X})$ з лічильником $\nu(t) := \max\{n : \tau_n \leq t\}, t \geq 0$.Функція $C^\varepsilon(u,x)$ в ПСА (1) така, що $C^\varepsilon(u,x) := C(u,x) + \varepsilon^{-1} C_0(x), u \in R, x \in X$.

Функція регресії $C(u,x)$ така, що $C(u,\cdot) \in C^3(R)$, тому має місце розклад Тейлора $C(u,x) = C^0(x) + uC^1(x) + u^2 C_2(u,x)$, де $C^0(x) = C(0,x), C^1(x) = C'(0,x)$, $C_2(u,x) = \frac{1}{2}C''(\theta u, x), 0 \leq \theta \leq 1$. Асимптотична нормальність ПСА (1) встановлюється для нормованих флуктуацій $v^\varepsilon(t) = \sqrt{t}[u^\varepsilon(t) - \varepsilon C_0^\varepsilon(t)]/\varepsilon$, де дифузійне збурення $C_0^\varepsilon(t)$ визначається збуренням $C_0(x)$. Введемо розширений процес марковського відновлення (РПМВ)[1]

$$v_n^\varepsilon := v^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \quad C_n^\varepsilon := C_0^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon), \quad x_n^\varepsilon := x(\tau_n^\varepsilon), \quad \tau_n^\varepsilon := \varepsilon^4 \tau_n, \quad n \geq 0.$$

Лема. Компенсуючий оператор [1] РПМВ допускає асимптотичне представлення на тест-функціях $\varphi(v,w)$ є $C^{3,4}(R \times R)$ у вигляді $\boldsymbol{L}_t^\varepsilon \varphi(v,w,x) = [\varepsilon^{-4} Q + \varepsilon^{-2}\frac{1}{t} Q_1(x) Q_0 + \varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}} Q_2(x) Q_0 + \frac{1}{t} Q_3(x) Q_0 + \theta_L^\varepsilon(x)]\varphi(v,w,x)$, де $Q_1(x)\varphi(v,w) = aC_0(x)\varphi'_w(v,w)$, $Q_2(x)\varphi(v,w) = aC^0(x)\varphi'_v(v,w)$, $Q_3(x)\varphi(v,w) = \left[(aC^1(x) + \frac{1}{2}g(x))v + \sqrt{t}wC^1(x)\right]$ $\varphi'_v(v,w) + \frac{a^2}{2t} q(x) C_0^2(x) \varphi''_w(v,w)$, а залишковий член $\theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v,w,x)$ такий, що $|\theta_L^\varepsilon(x)\varphi(v,w,x)| \to 0, \varepsilon \to 0, 0 \leq t_0 \leq t \leq T$.

1. V. Koroliuk, N. Limnios. Stochastic Systems in Merging Phase Space. – World Scientific Publishing, 2005. – 330 p.

Ольга Чайчук, Олег Чайчук

Мариинская гимназия г. Одесса при Южноукраинском Государственном Педагогическом университете им. К.Д. Ушинского
margodessa@gmail.com

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматриваются следующие четыре задачи Коши:

$$\alpha(t)x'(t) = a(t) + b_1(t)x(t) + b_2(t)x(g(t)) + b_3(t)x'(h(t)), \quad x(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}\alpha(t)x'(t) = a(t) + b_1(t)x(t) + b_2(t)x(g(t)) + b_3(t)x'(h(t)) +\\ +\varphi\big(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))\big), \quad x(0) = 0,\end{aligned}$$

$$\alpha(t)x'(t) = f(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))), \quad x(0) = 0,$$

$$\begin{aligned}\alpha(t)x'(t) = f\big(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))\big) +\\ +\varphi\big(t, x(t), x(g(t)), x'(t), x'(h(t))\big), \quad x(0) = 0.\end{aligned}$$

Здесь $x : (0,\tau) \to \mathbb{R}$ – неизвестная функция переменной t, $a : (0,\tau) \to \mathbb{R}$, $b_i : (0,\tau) \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2,3\}$, $g : (0,\tau) \to (0,+\infty)$, $h : (0,\tau) \to (0,+\infty)$, $\alpha : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ – непрерывные функции, $\lim\limits_{t\to+0} \alpha(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to+0} a(t) = 0$, $0 < g(t) \leqslant t$, $0 < h(t) \leqslant t$, $t \in (0,\tau)$, $f : D \to \mathbb{R}$ и $\varphi : D \to \mathbb{R}$ – непрерывные функции, $D \subset (0,\tau) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, φ в определенном смысле мала.

Решением каждой из задач называется непрерывно дифференцируемая функция $x : (0,\rho] \to \mathbb{R}$, $0 < \rho < \tau$, которая удовлетворяет при всех $t \in (0,\rho]$ соответствующему уравнению и $\lim\limits_{t\to+0} x(t) = 0$.

Для указанных задач найдены эффективные достаточные условия существования непустых множеств решений с известными асимптотическими свойствами при $t \to +0$. Рассмотрен вопрос о числе решений указанного вида, а также вопрос о близости решений возмущенных и невозмущенных задач.

Все результаты доклада получены в соавторстве с А.Е. Зерновым.

Ігор Черевко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
cherevko@chnu.cv.ua

ІНТЕГРАЛЬНІ МНОГОВИДИ ПОВІЛЬНИХ ЗМІННИХ ЛІНІЙНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглядаються лінійні сингулярно збурені диференціально-функціональні рівняння вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + L_1(t)y_t, \quad \varepsilon\frac{dy}{dt} = B(t)x(t) + L_2(t)y_t, \qquad (1)$$

де $A(t)$, $B(t)$ – матриці розмірностей $n \times n$, $n \times m$; L_1, L_2 – лінійні оператори зі значеннями в R^n і R^m відповідно, $\Delta > 0$, ε – малий додатний параметр. Припустимо, що

$$|L_i(t)\varphi| \leq m_i(t)|\varphi|, \quad i = 1, 2, \quad t \in R, \quad \varphi \in [-\varepsilon\Delta, 0].$$

Нехай для системи (1) справджуються умови:

I) матриці A, B та функції m_1, m_2 обмежені при $t \in R$;

II) всі корені характеристичного рівняння

$$\Phi(\lambda) = \det(\lambda E - L_2(t)e^{\cdot\lambda}E) = 0$$

лежать у лівій півплощині $\operatorname{Re}\lambda \leq -2\mu < 0$ для всіх $t \in R$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови I, II. Тоді існує $\varepsilon > 0$ таке, що для всіх $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ існує інтегральний многовид повільних змінних системи (1) $y_t = P_t(\theta)x(t)$, де $P_t(\theta)$ – неперервна рівномірно обмежена при $t \in R$, $\theta \in [-\varepsilon\Delta, 0]$ матриця.*

Нехай V – множина всіх неперервно диференційовних функцій $\varphi \in [-\varepsilon\Delta, 0]$. Для $\varphi \in V$ визначимо оператор $\mathcal{A}(\varepsilon)$:

$$\mathcal{A}(\varepsilon)\varphi(\theta) = \frac{d\varphi}{d\theta} \text{ при } -\varepsilon\Delta \leq \theta < 0, \quad \mathcal{A}(\varepsilon)\varepsilon(0) = \frac{1}{\varepsilon}L_2(t)\varphi \text{ при } \theta = 0.$$

Теорема 2. *Неперервно диференційовна матрична функція $P_t(\theta)$, $t \in R$, $\theta \in [-\varepsilon\Delta, 0]$ описує інтегральний многовид повільних змінних системи (1) тоді й тільки тоді, коли вона задовольняє рівняння*

$$\frac{\partial P_t(\theta)}{\partial t} + P_t(\theta)[A(t) + L_1(t)P_t(\theta)] = A(\varepsilon)P_t(\theta) + \frac{1}{\varepsilon}Y_0 B(t).$$

Ірина Чернега

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
nzoriana@yandex.ru

СИМЕТРИЧНІ АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ НА ПРОСТОРІ ℓ_1

Нехай X– банахів простір над полем $\mathbb{K}$, де $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$. Припустимо, що простір X має симетричний базис $(e_i)_{i=1}^{\infty}$. Функція f на X називається симетричною, якщо $f(x) = f\Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i\Big) = f\Big(\sum_{i=1}^{\infty} x_{\sigma(i)} e_i\Big)$ для довільного $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \in X$ і довільної підстановки σ на множині натуральних чисел.

Симетричні поліноми на просторах ℓ_p, $1 \leq p < \infty$ вперше досліджувались А. Німеровским і С. Семьоновим в [2]. В роботі [1] доведено, що кожен симетричний поліном P на ℓ_p є алгебраїчною комбінацією "елементарних" симетричних поліномів $F_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq p$.

Нехай $x, y \in \ell_1$, $x = (x_1, x_2, \ldots)$ і $y = (y_1, y_2, \ldots)$. Визначимо симетричний зсув $x \bullet y \in \ell_1$ формулою $x \bullet y = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$.

Теорема. *Для довільного набору попарно різних дійсних чисел $b = (b_0, \ldots b_n)$ та попарно різних натуральних чисел $m = (m_0, \ldots, m_n)$ існують невироджені матриці $A(n, b)$ і $A(n, m)$ такі, що для довільного симетричного полінома P степеня n*

$$\begin{pmatrix} Q(n,n) & \cdots & Q(n,0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Q(0,n) & \cdots & Q(0,0) \end{pmatrix} =$$

$$= A(n,m) \begin{pmatrix} P(b_n x^{\bullet m_n}) & \cdots & P(b_0 x^{\bullet m_n}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ P(b_n x^{\bullet m_0}) & \cdots & P(b_0 x^{\bullet m_0}) \end{pmatrix} A^*(n,b).$$

1. Gonzalez M., Gonzalo R. and Jaramillo J. Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces // Jour. London Math. Soc. – **59**. – 1999. – P. 681-697.
2. Nemirovskii A. S. and Semenov S. M. On polynomial approximation of functions on Hilbert space // Mat. USSR Sbornik. – 1973. – **21**, №2. – P. 255-277.

Максим Черняк

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України

ДВОВИМІРНА ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ БЕЗМЕЖНОГО ТА ПІВБЕЗМЕЖНОГО ТІЛА З ЦИЛІНДРИЧНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ТА ТРІЩИНАМИ

Розглядаються задачі про визначення напруженого стану нагрітих до сталої температури площини та півплощини з системою кругових включень, які мають однакові з матрицею механічні характеристики і різні коефіцієнти лінійного теплового розширення (КЛТР). Розв'язок задачі будується за допомогою термопружного потенціалу переміщень Φ та функції напружень Ері F. Обчислені напруження на контурах одного, двох та періодичної системи включень, а також на межі півплощини. Визначені коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) у площині з двома включеннями і розташованою у матриці прямолінійною тріщиною, а також у півплощині з внутрішньою та крайовою тріщинами. Задача про знаходження розкриття тріщини $\alpha\left(x\right)$, через яке визначається КІН, зведена до розв'язування сингулярного інтегрального рівняння

$$\int\limits_L \alpha'\left(\xi\right)\left[\frac{1}{\xi - x} + H\left(\xi, x\right)\right] d\xi = N\left(x\right), \qquad x \in L. \tag{1}$$

Тут L - відрізок, на якому розташована тріщина; $N\left(x\right)$ - нормальні напруження на місці тріщини, взяті з протилежним знаком; $H\left(\xi, x\right)$ - регулярне ядро, що враховує взаємодію тріщини з межею півплощини. Для площини з одним та двома включеннями і тріщиною одержано точні розв'язки рівняння (1), для півплощини з внутрішньою та крайовою тріщиною розв'язок будувався методами малого параметра і механічних квадратур. Розглянуто також площину з одним включенням, яке має різні з матрицею механічні та теплофізичні характеристики. Далеко від включення задано однорідний тепловий потік. Визначено вплив на характер зміни КІН модулів пружності та КЛТР композиту. Досліджено, при якій довжині тріщини та її віддалі від межі включення можна знехтувати регулярним ядром і тоді одержати точний розв'язок.

Анна Чечель

Інститут математики НАН України

КОЛИВНІ СИСТЕМИ З ВИРОДЖЕННЯМИ

Розглядається лінійна вироджена система диференціальних рівнянь

$$N(t)\frac{dV}{dt} = M(t)V + f(t), \qquad (1)$$

де N, M - $(n \times n)$-матриці, $detN(t) = 0$ $(\forall t \in \mathbb{R})$, $N(t) = N(t+2\pi)$, $M(t) = M(t+2\pi)$, $f(t) = f(t+2\pi)$; $V : [0; 2\pi] \to \mathbb{R}^n$. У припущенні, що матриця N має власне число $\lambda \equiv 0$ $(t \in \mathbb{R})$ кратності 1, представимо її у вигляді

$$N(t) = S(t)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_1(t) \end{pmatrix} S^{-1}(t),$$

де $detN_1(t) \neq 0$, $detS(t) \neq 0$. Крім того,

$$M_1(t) = \begin{pmatrix} m_1(t) & m_{12}(t) \\ m_{21}(t) & m_2(t) \end{pmatrix};\ S^{-1}(t)f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_{n-1}(t) \end{pmatrix},$$

де $M_1(t) = S^{-1}(t)M(t)S(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & N_1(t) \end{pmatrix} dS^{-1}(t)S(t)$, а m_1, f_1 - функції. Правильна така теорема.

Теорема. *Якщо* $m_1(t) \neq 0$ $(\forall t \in [0; 2\pi])$ *і* $rank[D = E - X(2\pi)] = n - 1$, *то система (1) має єдиний* 2π*-періодичний розв'язок*

$$\mathbf{V(t)} = S(t)\begin{pmatrix} {m_1}^{-1}(t)(m_{12}(t)z(t) + f_1(t)) \\ z(t) \end{pmatrix},$$

$$z(t) = \int_0^{2\pi} \psi(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau - X(t)D^{-1}\int_0^{2\pi} (\psi(0,\tau) - \psi(2\pi,\tau))\varphi(\tau)d\tau,$$

$$\varphi(t) = {N_1}^{-1}(t)(m_{12}(t){m_1}^{-1}(t)f_1(t) + f_{n-1}(t)),$$

$$\psi(t,\tau) = \frac{1}{2}X(t)X^{-1}(\tau)sign(t-\tau),$$

де X *– нормальна фундаментальна* $(n-1)\times(n-1)$*-матриця системи рівнянь* $dz = K(t)z$, $K(t) = {N_1}^{-1}(t)(m_{21}(t)m_1(t)m_{12}(t) + m_2(t))$.

Досліджуються також інші випадки.

Igor Chyzhykov

Ivan Franko Lviv National University
ichyzh@lviv.farlep.net

GROWTH OF SOLUTIONS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE UNIT DISC

Let $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, f be analytic in $\mathbb{D}$. Define $M(r, f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $p[f] = \overline{\lim\limits_{r\uparrow 1}} \frac{\log^+ M(r,f)}{-\log(1-r)}$, $\sigma[f] = \overline{\lim\limits_{r\uparrow 1}} \frac{\log^+ \log^+ M(r,f)}{-\log(1-r)}$.

Theorem 1. *Let k and j be integers satisfying $k > j \geq 0$, and $\delta > 0$. Let f be an analytic function in $\mathbb{D}$, $\sigma\colon [0, 1) \to (0, +\infty)$ be its proximate order, in particular, $\limsup_{r\uparrow 1} \log M(r, f)(1-r)^{\sigma(r)} = 1$, and $\sigma(r) \to \sigma[f]$ as $r \uparrow 1$. Then there exist a constant $C > 0$ and an at most countable collection of discs $D_\nu = \{z : |z - z_\nu| < r_\nu\}$ such that $\sum_{R<|z_\nu|<1} r_\nu \leq \delta(1 - R)$, $R \uparrow 1$, for $z \in \mathbb{D} \setminus \bigcup_\nu D_\nu$ we have*

$$\Big|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\Big| \leq C\Big(\frac{\log\frac{1}{1-|z|}}{(1-|z|)^{\sigma(|z|)+1}}\Big)^{k-j}, \quad \text{if} \quad \sigma[f] > 1,$$

$$\Big|\frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)}\Big| \leq C\Big(\frac{1}{1-|z|}\Big)^{2(k-j)+\varepsilon}, \quad \text{if} \quad \sigma[f] \leq 1,\ \varepsilon > 0. \tag{1}$$

For the function $f(z) = \exp\Big\{\frac{1}{(1+z)^\alpha} - \frac{1}{1-z}\Big\}$, $0 < \alpha < 1$, we have $\sigma[f] = \alpha$, $p[f'/f] = 2$. Thus, the constant 2 in (1) is the best possible.

Applying Theorem 1 and Theorem 5.1 ([2]) we deduce

Theorem 2. *Let f be a non-trivial solution of*

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \cdots + A_0(z)f = 0,$$

where A_n are analytic in $\mathbb{D}$, $p[A_n] = p_n$ for $0 \leq n \leq k-1$. If $p_n \leq \frac{k-n}{k}p_0$ $(1 \leq n \leq k-1)$, then $\max\{\sigma[f], 1\} \geq \frac{p_0}{k} - 1$, and $\sigma[f] \leq \max\{\frac{p_0}{k} - 1, 0\}$.

This improves a result from [1].

1. Chyzhykov I., Gundersen G. G., Heittokangas J. Linear differential equations and logarithmic derivative estimates // Proc. London Math. Soc. – 2003. – **86**, No. 3. – P. 735–754.

2. Heittokangas J., Korhonen R., Rättyä J. Growth estimates for solutions of linear complex differential equations // Ann. Acad. Sci. Fenn. – 2004. – **29**. – P. 233–246.

Максим Чип

Національний університет „Львівська політехніка“

ЛІНІЙНІ ФОРМИ УЗАГАЛЬНЕНИХ МОМЕНТІВ

Проблема зображення членів заданої послідовності $\{s_n\}_0^\infty$ комплексних чисел у вигляді

$$s_{k+l} = \int_\Gamma a_k(\tau) b_l(\tau) d\mu(\tau)$$

на відшукуваній множині Γ комплексної площини з мірою $d\mu(\tau)$ на ній та відшукуваними послідовностями $\{a_k(\tau)\}_0^\infty$ та $\{b_l(\tau)\}_0^\infty$ функцій з простору $L_2(\Gamma;\, d\mu)$ є одним з узагальнень класичної проблеми моментів.

Розглядається лінійна форма узагальнених моментів у вигляді

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n-1} c_{\nu n} s_\nu,$$

коефіцієнти якої вважаються комплексними числами. Лінійні форми другого порядку виникають в теорії неперервних дробів, оскільки чисельники та знаменники підхідних дробів $\frac{p_n}{q_n}$ неперервного дробу $\mathop{K}\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ задовільняють співвідношення

$$p_n = \beta_n p_{n-1} + \alpha_n p_{n-2}, \qquad q_n = \beta_n q_{n-1} + \alpha_n q_{n-2}$$

при заданих початкових умовах.

Встановлено достатню ознаку того, що лінійна форма узагальнених моментів є узагальненим моментом. Встановлено необхідну та достатню умови лінійної залежності та лінійної незалежності послідовності узагальнених моментів. Знайдено граничні співвідношення між узагальненими моментами та коефіцієнтами розглядуваних лінійних форм. Ці співвідношення застосовуються для знаходження величини радіуса круга аналітичності твірної функції послідовності узагальнених моментів.

Оксана Чмир

Львівський національний університет імені Івана Франка
o_chmyr@franko.lviv.ua

ПРО УЗАГАЛЬНЕНУ КРАЙОВУ ПАРАБОЛІЧНУ ЗАДАЧУ, РОЗВ'ЯЗОК ЯКОЇ МАЄ ТОЧКОВІ ОСОБЛИВОСТІ

Нехай $n \in \mathbb{N}$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею S класу C^∞, $Q = \Omega \times (0,T]$, $\Sigma = S \times (0,T]$, $0 < T < +\infty$; α – мультиіндекс з компонентами $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1,n}$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$ – довжина мультиіндексу α, $D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \partial x_n^{\alpha_n}}$; $\widehat{P} = (\hat{x}, \hat{t})$ – довільна фіксована точка з $\overline{Q}$, $P = (x,t) \in \overline{Q}$, $|P\widehat{P}| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - \hat{x}_i|^2 + |t - \hat{t}|}$,

$\varrho_0(P, \widehat{P}) = \begin{cases} \widetilde{\varrho}(|P\widehat{P}|), \, |P\widehat{P}| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \\ 1, \; |P\widehat{P}| \geq \varepsilon_0, \end{cases}$ $\varrho_0(P, \widehat{P}) \leq 1$, де $\varepsilon_0 \in (0,1]$,

$\widetilde{\varrho}(\sigma)$ – нескінченно диференційовна невід'ємна функція, яка має порядок σ при $\sigma \to 0$.

Запровадимо функціональний простір
$\mathcal{M}_k(Q, \widehat{P}) = \{\mathrm{v} : \, ||\mathrm{v}; \, \widehat{P}||_k = \int\limits_Q \varrho_0^k(x,t,\hat{x},\hat{t}) |\mathrm{v}(x,t)| \, dxdt < +\infty\}$, $k \in \mathbb{R}$.

Нехай функція $f_0(x,t,\mathrm{v})$ визначена в $Q \times (-\infty, +\infty)$ і нехай

$$F_1(x,t) = \sum_{|l| \leq p_1} \sum_{m=0}^{p_2} C_{lm} D_x^l \delta(x - \hat{x}) \delta^{(m)}(t - \hat{t}),$$
$$F_2(x) = \sum_{|r| \leq p_3} C_r D_x^r \delta(x - \hat{x}),$$

де $C_{lm} = const, l = \overline{0,p_1}, m = \overline{0,p_2}$, p_1, $p_2 \in \mathbb{N}$, $C_r = const$, $r = \overline{0,p_3}$, $p_3 \in \mathbb{N}$.

Досліджено узагальнену крайову параболічну задачу

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) = f_0(x,t,u(x,t)), \quad (x,t) \in Q,$$

$$u \,|_{\Sigma} = F_1(x,t), \; (x,t) \in \Sigma, \qquad u \,|_{t=0} = F_2(x), \; x \in \Omega.$$

За допомогою принципу Шаудера встановлено достатні умови розв'язності цієї задачі у просторі $\mathcal{M}_k(Q, \widehat{P})$, зокрема, якщо $f_0(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^\beta$, $\beta \in (0,1)$.

Олена Шавала

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка
Shavala@ukr.net

ПРО ОБМЕЖЕНІСТЬ ГОЛОМОРФНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Досліджуються мероморфні розв'язки рівняння

$$f'' + a_0 f = 0, \tag{1}$$

в якому a_0 – функція, мероморфна в крузі $U(0;1) = \{z : |z| < 1\}$. Отриманий результат є узагальненням відповідних тверджень із [1].

Теорема. *Нехай мероморфна в крузі $U(0;1)$ функція a_0 подається у вигляді $a_0(z) = 0,25(1-p^2)/z^2 + a_{0,1}/z + \psi(z)$ і голоморфна в $U(0;1)$ функція $\psi(z) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} a_{0,k} z^{k-2}$ є такою, що*

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & f_0(\alpha_2+1) & a_{0,1} \\ 0 & \dots & f_0(\alpha_2+2) & a_{0,1} & a_{0,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_0(\alpha_2+p-1) & \dots & a_{0,p-3} & a_{0,p-2} & a_{0,p-1} \\ a_{0,1} & \dots & a_{0,p-2} & a_{0,p-1} & a_{0,p} \end{vmatrix} = 0$$

і

$$\sup\left\{ \int\limits_0^1 (1-t)\left|\psi(te^{i\varphi})\right| dt : \varphi \in [0;2\pi] \right\} < +\infty,$$

де $f_0(s) = s(s-1) + (1-p^2)/4$, $\alpha_2 = (1-p)/2$ і p – непарне натуральне число. Тоді в $U(0;1)$ існує фундаментальна система розв'язків $\{f_1; f_2\}$ рівняння (1) така, що f_1 – голоморфна і обмежена в $U(0;1)$ і має нуль порядку $(1+p)/2$ в точці 0, а $f_2(z) = \sum\limits_{k=0}^{-\alpha_2+1} \hat{y}_k z^{\alpha_2+k} + \tilde{f}(z)$, де $\tilde{f}(z) = \sum\limits_{k=-\alpha_2+2}^{\infty} \hat{y}_k z^{\alpha_2+k}$ – голоморфна і обмежена в $U(0;1)$.

1. Heittokangas J. On complex differential equations in the unit disk// Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Diss. – 2000. – **122**. – 54 p.

Богдан Шаваровський

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
shavarb@iapmm.lviv.ua

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Розглянемо матричні многочленні рівняння наступного вигляду

$$X^s + X^{s-1}A_1 + \cdots + A_s = 0,\ X^s + A_1X^{s-1} + \cdots + A_s = 0, \qquad (1)$$

де $A_i \in M(n,\mathbb{C})$, $X-$ невідома $(n\times n)$- матриця. Побудуємо відповідну λ-матрицю $A(\lambda) = E\lambda^s + A_1\lambda^{s-1} + \cdots + A_s$. Набір $(C_1,\ldots,C_s)$ розв'язків рівняння (1) називають *повним*, якщо $\Pi_{i=1}^{s}\det(E\lambda - C_i) = \det A(\lambda)$. Дослідження розв'язності рівнянь (1) та знаходження розв'язків, зокрема повних їх наборів, є важливою задачею, яка має широке коло прикладних застосувань. До вказаного типу рівнянь зводиться двостороннє рівняння $XAX + XB + CX + D = 0$ у випадку неособливого старшого коефіцієнта. Останнє містить відоме рівняння Ріккаті. Нехай коефіцієнти рівнянь (1) задовольняють одну з наступних умов: а) $A_iA_j = A_jA_i$, $i,j = 1,\ldots,s$, і кожний нелінійний елементарний дільник кожної матриці A_i взаємно простий з усіма решта її елементарними дільниками; б) деяка із матриць A_i має лише попарно взаємно прості елементарні дільники і комутує з усіма решта коефіцієнтами.

Теорема 1. *Якщо коефіцієнти рівнянь* (1) *задовольняють одну з умов* а) *або* б) *і при цьому степені елементарних дільників λ-матриці $A(\lambda)$ не перевищують 3, то кожне з цих рівнянь має повний набір розв'язків.*

Теорема 2. *Якщо один з коефіцієнтів рівнянь* (1), *що має лише один елементарний дільник, комутує зі всіма решта коефіцієнтами і при цьому λ-матриця $A(\lambda)$ має лише один елементарний дільник, то кожне з цих рівнянь нерозв'язне.*

Теорема 1 є теоремою існування. З її доведення можна побудувати алгоритм знаходження повного набору розв'язків рівняння. Зауважимо, що за умов теореми 2 коефіцієнти рівнянь попарно комутують. Одначе результат теореми 2 можна застосовувати і у випадках, коли коефіцієнти рівняння не комутують. Якщо λ-матриця $A(\lambda)$ є прямою сумою, один з доданків якої задовольняє умови теореми 2 і його спектр не перетинається зі спектрами інших доданків, то рівняння (1) нерозв'язні.

Володимир Шаран

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка

ОПИС ПОВНИХ МІР ОДНОГО КЛАСУ ФУНКЦІЙ, ГОЛОМОРФНИХ У ПІВПЛОЩИНІ

Нехай $\mathbb{C}_+ = \{z : \mathrm{Re} z > 0\}$, $\eta : [0;+\infty) \to [0;+\infty)$ – функція обмеженої варіації на $[0;+\infty)$ така, що функція $t\eta(t)$ є неспадною при $t \geq t_0$, σ – задане число, $0 \leq \sigma < \infty$.

Теорема 1. *Для того щоб існувала голоморфна в* $\mathbb{C}_+$ *функція* $f \not\equiv 0$, *яка задовольняє умову*

$$(\exists c_1 > 0)\ (\forall z \in \mathbb{C}_+) : |f(z)| \leq c_1 \exp(\sigma |z| \eta(|z|)), \tag{1}$$

послідовність нулів, сингулярна гранична функція та модулі кутових граничних значень якої співпадають відповідно з (λ_n), h, $|f_0(it)|$, *необхідно і досить, щоб функція* h *була незростаючою, причому* $h'(t) = 0$ *майже скрізь, і виконувались умови*

$$\ln |f_0(it)| \in L^1(-1;1), \quad f_0(it) e^{-\sigma |t| \eta(|t|)} \in L^\infty(\mathbb{R}),$$

$$\sum_{|\lambda_n| \leq 1} Re\lambda_n < +\infty, \quad \overline{\lim_{r \to +\infty}} K_0(r) < +\infty,$$

де

$$K_0(r) = \sum_{1 < |\lambda_n| \leq r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2} \right) \frac{Re\lambda_n}{|\lambda_n|} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{1 < |t| \leq r} \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{r^2} \right) (|dh(t)| - \ln |f_0(it)|\, dt)\,.$$

Теорема 1 дає опис повних мір (за термінологією А.П.Гришина) класу голоморфних в $\mathbb{C}_+$ функцій, які задовольняють умову (1). Для випадку $\eta(t) \equiv 1$ теорему 1 довели Б.В.Винницький і В.Л.Шаран [1], узагальнивши добре відоме твердження про опис послідовностей нулів, сингулярних граничних функцій і модулів кутових граничних значень функцій голоморфних і обмежених в $\mathbb{C}_+$.

1. Vynnytskyi B.V., Sharan V.L. On factorization of one class functions analytic in the half-plane // Matematychni Studii. – 2000. – **14**, No 1. – P. 41–48.

Роман Швець

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України

РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ СТЕФАНА ДЛЯ ШАРУ ЗА НАСКРІЗНОГО ДИФУЗІЙНОГО НАСИЧЕННЯ

Розвиток сучасної техніки пов'язаний з дослідженням технологічних процесів з одержанням матеріалів із заданими властивостями методом наскрізного насичення. Зокрема такі процеси використовуються для отримання гідридів металів шляхом наскрізного гідрування. Важливі відомості про розподіл речовини в тілах за газофазного насичення можна отримати з аналітичних розв'язків конкретних задач реакційної дифузії.

Досліджується перерозподіл речовини, що дифундує, та концентраційні напруження за двостороннього насичення шару з урахуванням фазового перетворення. Сформульована нестаціонарна задача зводиться до визначення функцій концентрацій $C_i(x, \tau) \quad (i = 1, 2)$ в обох фазах і функції $\xi(\tau)$, що визначає закон руху поверхні розділу фаз. Задача дифузійного насичення шару розв'язується в квазістатичній поставі з урахуванням її симетрії відносно серединної поверхні та допущення, що концентрація розчиненої речовини дорівнює рівноважній на міжфазній границі. Припущення, що коефіцієнти дифузії є сталими, дозволяє знаходити розв'язок в аналітичному вигляді та визначати границю поділу фаз на різних стадіях насичення. На основі цього розв'язку проведено числово-аналітичний аналіз концентраційних полів і напружень для різного розміщення міжфазної границі в часі. У разі залежності коефіцієнтів дифузії від концентрації речовини, що дифундує, нелінійну задачу реакційної дифузії в кожній фазі за наскрізного насичення можна розв'язувати числовим методом прямих [1, 2].

1. Паньків О.Я., Швець Р.М. Застосування методу прямих для числового розв'язку задач реакційної дифузії // Доп. НАН України. – 1993. – № 12. – С. 51-54.
2. Швець Р. Задача механодифузії для канонічних тіл з рухомою міжфазною границею // Міжнародна математична конференція ім. В.Я.Скоробогатька (2004 р., Дрогобич): Тези доповідей. – Л., 2004. – С. 228.

Наталія Шевчук

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича

ЗОБРАЖЕННЯ ГЛАДКИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ГАРМОНІЙНИМ ОСЦИЛЯТОРОМ

У розвитку багатьох важливих напрямів математики і фізики значну роль відіграли поняття та методи, які виникли при вивченні рівняння Штурма-Ліувілля та пов'язаного з цим рівнянням оператора Штурма-Ліувілля $A = d^2/dx^2 + q(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Оператор Штурма-Ліувілля породжує різні крайові задачі: регулярні (x перебігає скінченний інтервалом) та сингулярні (випадок нескінченного проміжку). Вони, як відомо, відрізняються постановками задач, методами дослідження та сферами застосувань. Функція q називається потенціалом; якщо $q(x) = x^2$, то оператор A називається гармонійним осцилятором. Відомо [1], що гармонійний осцилятор є невід'ємним самоспряженим оператором у просторі $L_2(\mathbb{R})$.

Еволюційне рівняння вигляду $u'(t) + Au(t) = 0, t \in (0; T]$, з гармонійним осцилятором відноситься до рівнянь параболічного типу, коефіцієнти яких необмежено зростають при $|x| \to \infty$.

У даній праці розглядається еволюційне рівняння

$$u'(t) + \varphi(A)u(t) = 0, t \in (0; T], \tag{1}$$

де $\varphi(A)$ трактується як гармонійний осцилятор нескінченного порядку. Знайдено зображення гладких розв'язків вказаного рівняння, описано множини початкових значень таких розв'язків, на підставі чого встановлюється коректна розв'язність задачі Коші для рівняння (1) у просторах ультрарозподілів.

1. Горбачук В.И., Горбачук М.Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – К.: Наук. думка, 1984. – 283 с.

Мирослав Шеремета, Олександр Волох

Львівський національний університет імені Івана Франка
vol-olexa@ua.fm

ПРО РАДІУСИ ОДНОЛИСТОСТІ ПОХІДНИХ ГЕЛЬФОНДА-ЛЕОНТЬЄВА ЛАКУНАРНИХ СТЕПЕНЕВИХ РЯДІВ

Нехай степеневий ряд

$$f(z) = f_0 + \sum_{p=0}^{\infty} f_{n_p+1} z^{n_p+1}, \quad f_{n_p+1} \neq 0 \quad (p \geq 0)$$

має радіус збіжності $R > 0$, а $D_l^n f$ – його похідна Гельфонда-Леонтьєва порядку n відносно функції $l(z) = \sum\limits_{p=0}^{\infty} l_p z^p$ з $l_p > 0$ для всіх p. Правильне таке твердження.

Теорема. *Якщо послідовність* $(l_{p-1}l_{p+1}/l_p)$ *неспадна, то*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}} \right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}} \rho\left(D_l^n f\right) \geq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} R.$$

Якщо до того ж $|f_{n_p+1}/f_{n_{p+1}-n_p}|^{1/(n_{p+1}-n_p)} \nearrow R$ *при* $p \to \infty$, *то*

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} R \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}} \right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}} \rho(D_l^n f) \leq$$

$$\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{l_{n_{j+1}-n_j+1}}{l_1} \frac{l_{n_j+1}}{l_{n_{j+1}+1}} \right)^{\frac{1}{n_{j+1}-n_j}} \rho(D_l^n f) \leq 2R.$$

Богдан Шувар, Михайло Копач

Національний університет „Львівська політехніка“
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
kopach@cit.if.ua

ДВОСТОРОННІ АНАЛОГИ НЕРІВНОСТІ БІХАРІ

Експлуатований в [1] підхід до побудови двосторонніх операторних нерівностей дозволяє отримати низку теорем, які охоплюють нерівно- сті Гронуолла-Беллмана, Біхарі, мало відомі нерівності Вендроффа. Один із результатів містить таке твердження (порівн. з [1, с. 148]).

Теорема. *Нехай: 1) неперервна за сукупністю аргументів строго додатна функція $\varphi(y,z)$ не спадає щодо y, не зростає щодо z при $y,z \in (\lambda_0,\lambda_1)$; 2) на сегменті $[a;b]$ задані неперервна невід'ємна функція β, неперервна функція H і неперервно диференційовні функції α, f, що задовольняють співвідношення*

$$f'(t)+\alpha'(t)\int_a^t \beta(s)\varphi(\lambda(s),\lambda(s))ds \le H(t)\varphi(\lambda(t),\lambda(t)) \qquad (1)$$

для будь-якої неперервної на $[a;b]$ функції λ; 3) неперервні функції u,v на сегменті $[a;b]$ задовольняють нерівності $u(t)\le T(u,v)$, $v(t)\ge T(v,u)$, де $T(x,y)=f(t)+\alpha(t)\int_a^t \beta(s)\varphi(x(s),y(s))ds$; 4) однозначно розв'язаною на сегменті $[a;b]$ є система $y=T(y,z)$, $z=T(z,y)$. Тоді правильна нерівність $U(t)\ge G^{-1}\{G(f(a)+\int_a^t(H(s)+\alpha(s)\beta(s))ds)\}$ за умови, що вираз у фігурних дужках належить до області існування функції $G_x^{-1}(x)$, оберненої до функції $G(x)$, означеної за формулою $G(x)=\int_{x_0}^x \varphi(\lambda,\lambda)^{-1}d\lambda \quad (x_0,x\in(\lambda_0,\lambda_1), x\ge x_0)$.

Якщо в (1) виконується протилежна нерівність, то матимемо нерівність протилежного знаку, у якій зліва замість функції u фігурує функція v. Якщо $\varphi(y,z)$ не залежить від z, то з теореми випливає результат, що узагальнює нерівність Біхарі.

1. Курпель Н.С., Шувар Б.А. Двусторонние операторные неравенства и их применения. – К.: Наук. думка. – 1980. – 267 с.

Володимир Щедрик

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
shchedryk@iapmm.lviv.ua

ПРО ДІЛЬНИКИ МНОГОЧЛЕННИХ МАТРИЦЬ

Нехай P – поле, $A(x)$ – неособлива $n \times n$ матриця над $P[x]$. Для неї існують такі оборотні матриці $P(x)$ та $Q(x)$, що $P(x)A(x)Q(x) = \mathrm{diag}(\varepsilon_1(x), \dots, \varepsilon_n(x)) = \Psi(x)$ - канонічна діагональна форма (к.д.ф.) матриці $A(x)$. Нехай також матриця $\Phi(x) = \mathrm{diag}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ є дільником матриці $\Psi(x)$, причому $\varphi_i(x)|\varphi_{i+1}(x)$, $i = 1, \dots, n-1$. Ставиться задача опису всіх лівих неасоційованих справа дільників матриці $A(x)$, які мають канонічну діагональну форму $\Phi(x)$.

Розглянемо визначальну матрицю $V(\Phi)$, введену П.С. Казімірським. Позначимо через $\mathbf{V}(\Psi, \Phi)$ множину нижніх унітрикутних матриць, які отримуються із матриці $V(\Phi)$, коли кожний параметр k_{ijl} незалежно один від одного пробігає значення із поля P. Розглянемо всі многочлени $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$, степені яких не менші 1, $i = j_1, j_2, \dots, j_g$. Розкладемо многочлени $\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}}$, $\frac{\varepsilon_{i-1}}{\varphi_{i-1}}$ в добуток степенів нерозкладних множників:

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} = f_{i1}^{k_{i1}} \cdots f_{il_i}^{k_{il}}, \ \frac{\varepsilon_{i-1}}{\varphi_{i-1}} = f_{i1}^{q_{i1}} \cdots f_{il_i}^{q_{il}} h_{i1}^{p_{i1}} \cdots h_{ir_i}^{p_{ir}}, \ i = j_1, j_2, \dots, j_g.$$

Теорема 1. *Множина $(\mathbf{V}(\Psi, \Phi)P_A)^{-1}\Phi$ складається зі всіх лівих неасоційованих справа дільників матриці $A(x)$, які мають к.д.ф. Φ, тоді і тільки тоді, коли*

$$k_{ij} > q_{ij}, i = j_1, j_2, \dots, j_g, j = 1, \dots, l_i. \tag{1}$$

Якщо умова (1) не виконується, то множина $(\mathbf{V}(\Psi, \Phi)P)^{-1}\Phi(x)$ не вичерпує всіх шуканих дільників матриці $A(x)$.

Розглянемо верхню унітрикутну параметричну матрицю S з елементами s_{ij}, $i < j$. Позначимо через $\mathbf{V}(\Psi, \Phi)\mathbf{S}$ множину матриць, які отримуються із матриці $V(\Phi)S$, коли кожний із параметрів k_{ijl}, s_{ij} незалежно один від одного пробігає значення із поля P.

Теорема 2. *Нехай P - нескінченне поле і умова (1) не виконується. Тоді множина $(\mathbf{V}(\Psi, \Phi)\mathbf{S}P_A)^{-1}\Phi$ є множиною лівих дільників матриці $A(x)$, яка містить всі ліві неасоційовані справа дільники матриці $A(x)$ з к.д.ф. Φ.*

Мар'яна Юрків

Дрогобицький державний педуніверситет імені Івана Франка

ПРО АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ГОЛОМОРФНИХ У ПІВПЛОЩИНІ ФУНКЦІЙ ПОКРАЩЕНОГО РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ

Нехай $f(z)$ – голоморфна в півплощині $\mathbb{C}^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ функція , яка має скінченний порядок ρ, $\lambda_n = |\lambda_n| e^{i\varphi_n}$ – її нулі в $\mathbb{C}^+$, а $s(t)$ – її сингулярна гранична функція. Позначимо:

$$\sigma(r) = \sum_{1<|\lambda_n|<r} |\lambda_n| \sin\varphi_n - \frac{1}{2\pi}\int_1^r \ln|f(t)f(-t)|\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_1^r d[s(t)-s(-t)],$$

$$a(r) = \sum_{1<|\lambda_n|<r} \sin\varphi_n - \frac{1}{2\pi}\int_1^r \ln|f(t)f(-t)|\frac{1}{t}\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_1^r \frac{1}{t}\,d[s(t)-s(-t)].$$

Отримано наступний результат, який є аналогом деяких результатів М. В. Говорова [1].

Теорема 1. *Нехай для голоморфної в $\mathbb{C}^+$ функції $f(z)$ порядку $\rho \in (0;1)$ з індикатором $h(\varphi)$ існує $\rho_1 \in (0,\rho)$ і послідовність (r_k) такі, що $0 < r_k \uparrow +\infty$, $r_{k+1}^\rho - r_k^\rho = o(r_k^{\rho_1})$ $(k \to +\infty)$ і рівномірно за $\varphi \in [0;\pi]$ виконується рівність*

$$\ln|f(r_k e^{i\varphi})| = r_k^\rho h(\varphi) + o(r_k^{\rho_1}), \quad k \to +\infty.$$

Тоді

$$\int_0^\pi \ln|f(re^{i\varphi})|\sin\varphi\,d\varphi = r^\rho \int_0^\pi h(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi + o(r^{\rho_1}), \quad r \to +\infty,$$

$$\sigma(r) = \frac{\rho-1}{2\pi} r^{\rho+1} \int_0^\pi h(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi + o(r^{\rho_1+1}), \quad r \to +\infty,$$

$$a(r) = \frac{\rho^2-1}{2\pi\rho} r^{\rho} \int_0^\pi h(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi + o(r^{\rho_1}), \quad r \to +\infty.$$

1. Говоров Н.В. Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.

Ігор Юрченко, Любов Ясинська

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
yurchiv@chnu.cv.ua

СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМИ МАРКОВСЬКИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Нехай $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} \equiv \{\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \geq 0\})$ – ймовірнісний базис; $\{\xi(t), t \geq 0\}$ – феллерівський марковський процес зі значеннями в метричному просторі $\mathbb{Y}$ з перехідною ймовірністю $\mathbb{P}(s, y, t, \Gamma)$; $\eta_k, k \geq 0$, – феллерівський ланцюг Маркова зі значеннями в метричному просторі $\mathbb{H}$ з перехідною ймовірністю на k-му кроці $\mathbb{P}_k(h, G)$. Розглянемо диференціально-функціональне рівняння збуреного руху, яке будемо трактувати як динамічну систему випадкової структури

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x_t)dt \tag{1}$$

з імпульсною дією

$$\Delta x(t)|_{t=t_k} = g(t_k - 0, \xi(t_k - 0), \eta_k, x(t_k - 0)), \tag{2}$$

$$\xi(t_0) = y \in \mathbb{Y}, \quad \eta_{k_0} = h; \quad x_{t_0} = \varphi_0(\theta) \in C([-\tau, 0]) \equiv C, \tag{3}$$

де $t_k \in S \equiv \{t_n, n \in \mathbb{N}\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$, $x \equiv x(t) \in \mathbb{R}^m$, $x_t \equiv \{x(t+\theta)\}$, $-\tau \leq \theta \leq 0$, $\tau > 0$.

Припустимо, що вимірні за сукупністю змінних відображення $a : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Y} \times C \to \mathbb{R}^m$; $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{Y} \times \mathbb{H} \times C \to \mathbb{R}^m$ задовольняють за останнім аргументом умову Ліпшиця рівномірно за всіма іншими аргументами для $\forall\, \varphi, \psi \in C([-\tau, 0])$, $\forall\, t \geq t_0 \geq 0$, $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$ і при всіх $t \geq t_0 \geq 0$, $y \in \mathbb{Y}$, $h \in \mathbb{H}$ умову $\sup\limits_{t \geq t_0 \geq 0, y \in \mathbb{Y}, h \in \mathbb{H}} (|a(t, y, 0)| + |g(t, y, h, 0)|) = l < \infty$.

Теорема. *Нехай: 1) $|t_{k+1} - t_k| \leq \Delta$, $\Delta > 0$, $k \in \mathbb{N}$; 2) виконується умова Ліпшиця; 3) існують послідовності функціоналів Ляпунова-Красовського $\{v_k(y, h, \varphi)\}$ і $\{a_k(y, h, \varphi)\}$, $k \in \mathbb{N}$, такі, що внаслідок системи (1)-(3) $(Lv_k)(y, h, \varphi) \leq -a_k(y, h, \varphi)$, де $Lv_k(y, h, \varphi)$ – дискретний оператор Ляпунова. Тоді система випадкової структури (1)-(3) асимптотично стохастично стійка в цілому.*

Михайло Яджак, Марія Тютюнник

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України
dept25@iapmm.lviv.ua

ОПТИМАЛЬНИЙ АЛГОРИТМ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ЦИФРОВОЇ ФІЛЬТРАЦІЇ

Зазвичай розв'язок задач цифрової фільтрації (ЗЦФ) необхідно одержувати в режимі реального часу за умови накладання обмежень на обсяг використовуваних обчислювальних засобів. Тому в [1-3] запропоновано оптимальні за швидкодією та використанням пам'яті паралельноконвеєрні алгоритми для розв'язування ЗЦФ різної вимірності. У згаданих працях розмір рухомого вікна задається для кожної задачі.

Розглянемо одновимірну ЗЦФ, яка полягає у виконанні C перерахунків згладжування [4] масиву N значень змінних. Вважаємо, що для всіх j=1,...,N перерахунки значення $x(j)$ здійснюються через вікно розміру $m(j)$.

Для чисельного розв'язування сформульованої задачі запропоновано паралельноконвеєрні алгоритми, орієнтовані на реалізацію на квазісистолічних обчислювальних структурах. Встановлено умови, за яких ці алгоритми є оптимальними за швидкодією та використанням пам'яті у відповідних класах еквівалентних за інформаційним графом алгоритмів.

1. Valkovskii V.A. An optimal algorithm for solving the problem of digital filtering // Pattern Recognition and Image Analysis. – 1994. – **4**, No 3. – P. 241–247.
2. Вальковский В.А., Яджак М.С. Оптимальный алгоритм решения двумерной задачи цифровой фильтрации // Проблемы управления и информатики. – 1999. – № 6. – С. 92–102.
3. Яджак М.С. Об оптимальном в одном классе алгоритме решения трёхмерной задачи цифровой фильтрации // Проблемы управления и информатики. – 2000. – № 6. – С. 66–81.
4. Файнзильберг Л.С. Адаптивное сглаживание шумов в информационных технологиях обработки физиологических сигналов // Математичні машини і системи. – 2002. – № 3. – С. 96–104.

Олесь Яцків

ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАН України

МЕТОД УЗАГАЛЬНЕНИХ РЯДІВ ФУР'Є ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОМАСОПЕРЕНОСУ В СКЛАДЕНИХ ПЛАСТИНКАХ З МІЖКОНТАКТНИМ ПРОШАРКОМ

Для покращення експлуатаційних властивостей тонкостінних елементів конструкцій їх часто проектують неоднорідними за структурою, зокрема шаруватими або складеними. На поверхнях, лініях розділу можуть формуватись у процесі виготовлення чи утворюватись під час експлуатації міжконтактні прошарки.

Поширеним підходом до опису деформування неоднорідних тіл з тонкими прошарками за перебігу процесів тепломасопереносу є моделювання їх тонкостінними елементами з подальшим зведенням до фізичної поверхні, наділеної усередненими фізико-механічними параметрами. В даній роботі для задач типу тепломасопереносу в двох складених пластинках-смугах з міжконтактним прошарком поширено розвинутий раніше в [1] метод власних функцій побудови розв'язків крайових задач за нестаціонарних гранично-контактних умов, які враховують кінетику теплофізичних процесів на межових поверхнях за наявності тонких прошарків. Система диференціальних рівнянь задачі за допомогою функціональних перетворень розділяється на незалежні рівняння для кожної з пластинок, після чого формулюється узагальнена задача Штурма-Ліувілля зі зв'язаними граничними умовами, які містять у явному вигляді спектральний параметр. У межах двох пластинок визначаються співвідношення узагальненої ортогональності власних функцій цієї задачі і записуються розвинення інтегральних характеристик фізичних полів для кожної пластинки в ряди Фур'є за власними функціями. За знайденими теплофізичними полями одержуються вирази для зусиль у пластинках та їх прогину.

Запропонована методика може бути поширена на складені оболонки, а також використана для розв'язування зв'язаних задач тепломасопереносу в тонкостінних елементах.

1. Швець Р., Яцків О. Поширення методу власних функцій на крайові задачі механодифузії для багатошарових тіл з прошарками // Мат. методи і фізико-мех. поля. – 1998. – № 4. – С. 155-161.

АВТОРСЬКИЙ ПОКАЖЧИК

Наукове видання

Міжнародна математична конференція
ім. В.Я. Скоробогатька

Тези доповідей

Відповідальний за випуск Р.М. Пляцко,
доктор фізико-математичних наук

Підписано до друку 03.09.2007.
Формат 60×84 1/16. Папір офсетний.
Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 18,4.
Облік.-видавн. арк. 15,8.
Тираж 400 прим. Зам. 70696.

Оригінал-макет підготовлено в Інституті прикладних проблем
механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України

Віддруковано в Поліграфічному центрі видавництва
Національного університету „Львівська політехніка“

вул. Ф. Колесси, 2, 79000, Львів