УДК 517.956.4

ВЕРХНЯ ПОТОЧКОВА ОЦІНКА РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ПОРИСТОГО СЕРЕДОВИЩА ТА ШВИДКОЇ ДИФУЗІЇ, ЯКЕ МІСТИТЬ ВАГОВІ КОЕФІЦІЄНТИ

Євген Зозуля

Донбаська державна машинобудівна академія
albelgen27@gmail.com

Узагальнюємо представлення Пуассона на випадок рівняння пористого середовища з вагою

$$v\,(x)\,u_t - \mathrm{div}\;(w\,(x)\,u^{m-1}\nabla u) = f(x,t)\;,\; u \geqslant 0\;,\; m>1 \qquad (1)$$

Розглядаємо рівняння (1), вважаючи, що Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $0 < T < +\infty$, $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$. Будемо також вважати, що $f \in L^1(\Omega_T)$, а вагові коефіцієнти $v,\ w \geq 0$ належать до відповідних класів $v \in A_\infty,\ w \in A_2$. Нагадаємо тут, що w належить до класу Маккенхаупта A_p , $1 < p < \infty$, якщо $w(x) \geq 0$ для майже всіх $x \in \mathbb{R}^n$ та існує стала $K_{p,w} > 0$ така, що

$$\frac{w(B)}{|B|}\left(\frac{1}{|B|}\int_B w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\;dx\right)^{p-1} = K_{p,w} < +\infty, \quad \text{де} \quad w(B) = \int_B w\;dx\;,$$

для всіх куль $B \subset \mathbb{R}^n$.

Одне з наших припущень – це співвідношення між v та w. Тобто введемо функцію, яка пов'язує ці функції. Фіксуємо $y \in \Omega$ та R так, що $B_{8R}(y) \subset \Omega$ і покладемо $\psi_y(r) := r^2\frac{v(B_r(y))}{w(B_r(y))}$, $0 < r \leq R$.

Основний результат, отриманий для розв'язків (1) міститься у наступній теоремі (доведення наведено у [4]).

Теорема 1. *Нехай структурні умови рівняння задовольняються деякими додатними сталими (детальніше [4]). Тоді, для довільного невід'ємного слабкого розв'язку u рівняння* (1) *існують залежні лише від вхідних даних додатні сталі $\lambda_0 \in (0,1)$, c_1, такі, що для всіх $\lambda \in (0,\lambda_0)$, майже для всіх $(x_0,t_0) \in \Omega_T$ і будь-якого циліндра $Q_{R,\theta}(x_0,t_0) \subset \Omega_T$ наступна нерівність має місце*

$$u(x_0,t_0) \leq c_1\left(\frac{1}{v(B_R(x_0))\psi_{x_0}(R)}\iint\limits_{Q_{R,\theta}(x_0,t_0)} vu^{m+\lambda}dxdt\right)^{\frac{1}{1+\lambda}} +$$

$$+ c_1 \left(\frac{1}{w(B_R(x_0))\psi_{x_0}(R)} \iint\limits_{Q_{R,\theta}(x_0,t_0)} w u^{m+\lambda} dxdt \right)^{\frac{1}{1+\lambda}} +$$

$$+ c_1 \left(\frac{\psi_{x_0}(R)}{\theta} \right)^{\frac{1}{m-1}} + c_1 I_{v,w,f} \left(x_0, t_0, c_1 R, \frac{\theta}{\psi_{x_0}(R)} \right),$$

де ваговий потенціал Рісса визначається як

$$I_{v,w,f}(x_0,t_0,R,\theta) := \int\limits_0^R \frac{1}{v(B_\rho(x_0))} \iint\limits_{Q_{\rho,\theta\psi_{x_0}(\rho)}(x_0,t_0)} |f(x,t)| dxdt \frac{d\rho}{\rho}.$$

Тут, для $(x_0,t_0) \in \Omega_T$, та для будь-яких $\rho,\theta > 0$ визначаємо $Q_{\rho,\theta\psi_{x_0}(\rho)}(x_0,t_0) := B_\rho(x_0) \times (t_0 - \theta\psi_{x_0}(\rho), t_0)$.

Доведення теореми ґрунтується на відповідних модифікаціях метода внутрішнього масштабування (intrinsic scaling) Ді Бенедетто [1], після адаптації техніки Кілпелайнен - Мали [2] до параболічних рівнянь сумісно з ідеями [3].

1. Di Benedetto E., Gianazza U., Vespri V., Harnack inequality for degenerate and singular parabolic equations. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York, 2012.

2. Heinonen J., Kilpeläinen T., Martio O., Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations, in: Oxford Matematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993. Oxford Science Publications.

3. Liskevich V., Skrypnik I.I., Pointwise estimates for solutions to the porous medium equation with measure as a forsing term, Israel J. Math. 2013, V. 194, pp. 259-275.

4. Zozulia Y., Pointwise estimates of solutions to weighted porous medium and fast diffusion equations via weighted Riesz potentials, Journal of Mathematical Sciences, 2020, V. 248(2), pp. 233 - 254.

POINTWISE UPPER ESTIMATE FOR SOLUTIONS TO WEIGHTED POROUS MEDIUM AND FAST DIFFUSION EQUATIONS

An upper pointwise estimate of the solutions of a parabolic equation of porous medium with weight coefficients from Mackenhoupt classes and with a singular lower-order term is established.