**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2026»,
27–29 травня 2026 р., Львів**

УДК 517.9

СИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ВЗАЄМОДІЇ НАЙБЛИЖЧИХ СУСІДІВ ЗАМКНЕНОГО ЛАНЦЮЖКА НА ПРЯМІЙ

Андрій Вус

Львівський національний університет імені Івана Франка
andriy.vus@lnu.edu.ua

Розглядаються динамічні системи взаємодіючих частинок на прямій, в яких частинки взаємодіють лише з найближчими сусідами (одновимірні ланцюжки). Динаміка 'замкненого' (періодичного) ланцюжка описується гамільтоніаном:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n} V(x_i - x_{i+1}),\;\; x_{n+1} = x_1 . \tag{1}$$

Розглянемо, зокрема, систему чотирьох взаємодіючих частинок на прямій з гамільтоніаном (1), що допускає повний набір перших інтегралів, поліноміальних за імпульсами та аналітичних за координатами x_i. Виконаємо редукцію задачі замкненого ланцюжка 4 частинок до системи з 2 ступенями вільності, розташувавши частинки симетрично відносно початку координат і вибравши відповідні симетричні початкові умови. Тоді гамільтоніан (1) набуває вигляду

$$\mathrm{H}^* = p_1^2 + p_2^2 + 2V(x_2 - x_1) + V(2x_1) + V(2x_2) = T + W.$$

Умова

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x_i}\right) = 0$$

для випадку поліноміального за імпульсами першого інтеграла $2N$ степеня зводиться до системи рівнянь ($m = 0, 2, \ldots, 2N$, $F_{2N+2} \equiv 0$) :

$$\partial_{p_1} F_{2m+2} \cdot W_{x_1} + \partial_{p_2} F_{2m+2} \cdot W_{x_2} = p_1 \partial_{x_1} F_{2m} + p_2 \partial_{x_2} F_{2m} . \tag{2}$$

Означення 1. [1] *Нехай* $R_k\left(x_1, x_2, p_1, p_2\right) = \sum_{i=0}^{k} f_i\left(x_1, x_2\right) p_1^{k-i} p_2^{i}$ *деякий однорідний степеня k поліном за імпульсами. Введемо диференціальний оператор* $\left[\,\cdot\,\right]$ *, що діє за правилом*

$$\left[\, R_k \,\right] = R_k\left(x_1, x_2, \partial_{x_2}, -\partial_{x_1}\right) = \sum_{i=0}^{k}\left(\partial_{x_2}\right)^{k-i}\left(-\partial_{x_1}\right)^{i} f_i\left(x_1, x_2\right).$$

Тоді з рівнянь (2) отримаємо

$$P_m(V) = \left[\partial_{p_1} F_{2m} \cdot W_{x_1} + \partial_{p_2} F_{2m} \cdot W_{x_2}\right] = 0. \tag{3}$$

Означення 2. *Перше нетривіальне рівняння (3) називатимемо теоремою додавання для невідомого потенціалу взаємодії V.*

Позначимо

$$\rho = 2\left(V''(2x_2) - V''(2x_1)\right)\cdot V(x_2 - x_1) + \left(V(2x_2) - V(2x_1)\right)\cdot$$
$$\cdot V''(x_2 - x_1) + 3\left(V'(2x_1) + V'(2x_2)\right)\cdot V'(x_2 - x_1).$$

Теорема. *Для нетривіального першого інтеграла теорема додавання має вигляд* $L\rho = 0$*, де оператор* $L = \sum_{i=0}^{n} a_i \partial_{x_1}^{i} \partial_{x_2}^{n-i}$, $\sum_{i=0}^{n} a_i^2 \neq 0.$

Доведено, що за умови аналітичності потенціала $V(t)$, $V(\infty) = 0$ з теореми додавання для довільного поліноміального за імпульсами додаткового першого інтеграла випливає $\rho = 0$. Розв’язуючи це рівняння у відповідних функціональних класах, показано, що за додаткової умови парності потенціала побудована редукована система не допускає існування додаткового інтеграла, поліноміального за імпульсами.

1. *Довгань Б.* Інтегровні потенціали симетричних задач чотирьох та п'яти попарно взаємодіючих частинок на прямій / *Б. Довгань, А. Вус.* Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. – 2010. – Вип. 72 – С. 107-126..
2. *Calogero F.* Solution of the one-dimensional *N*-body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials // Jour. Math. Phys. – 1971. – v.12. – P. 419 – 436.

SYMMETRIC PROBLEM OF CLOSEST NEIGHBORS INTERACTION OF CLOSED CHAIN ON LINE

The reduced systems of closed chain of four particles on the line with closest neighbor interaction are investigated. The properties of interaction potentials are considered under assumption that the given system has the first integral polynomial of prescribed degree in the momenta. The functional equations for those potentials are obtained. Non-existence of their non-trivial solutions has been proven for interaction potential vanishing at infinity.