Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2026»
27–29 травня 2026 р., Львів

УДК 517.958

РІЗНОМАНІТТЯ МОДЕЛЕЙ НИЖНИКА ТА ЇХ СИМЕТРІЙНИЙ АНАЛІЗ

Олександра Вінніченко

Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
oleksandra.vinnichenko@imath.kiev.ua

Вперше у літературі система Нижника виникла у [4], де український математик, доктор фізико-математичних наук, професор Леонід Павлович Нижник досліджував застосовування методу оберненої задачі до інтегрування багатовимірних нелінійних рівнянь. Ця система має вигляд

$$w_t = k_1 w_{xxx} + k_2 w_{yyy} + 3(v^1 w)_x + 3(v^2 w)_y, \quad v^1_y = k_1 w_x, \quad v^2_x = k_2 w_y \quad (1)$$

з параметрами k_1 та k_2 і умовою $(k_1, k_2) \neq (0,0)$. Беручи до уваги ці параметри, уточнимо, що система (1) насправді є класом систем, який є об'єднанням двох комножин відносно масштабних перетворень еквівалентності. А саме, у симетричному випадку, коли обидва параметри k_1 і k_2 не дорівнюють нулю, $k_1 k_2 \neq 0$, можна покласти $(k_1, k_2) = (1,1)$, а у асиметричному випадку, коли тільки один з них дорівнює нулю, — $(k_1, k_2) = (1,0)$. Використовуючи введення потенціалів, граничні переходи, інтерпретацію незалежних та/або залежних змінних як дійсних або комплексних та диференціальних підстановок, з системи (1) можна отримати чималу кількість різноманітних інтегровних моделей, які будемо називати моделями Нижника [1, 2].

Серед моделей Нижника розрізняють симетричні або асиметричні, дисперсійні або бездисперсійні, стандартні з квадратичними нелінійностями або модифіковані з кубічними, окремі рівняння з частинними похідними або системи таких рівнянь, дійсні, комплексні, змішані або специфічні, де комплексні змінні розбиті на пари комплексно спряжених, а також лінійні або нелінійні та неізоспектральні лінійні представлення Лакса відповідно у дисперсійному або бездисперсійному випадку. За знаком нелінійностей модифіковані моделі додатково поділяються на дефокусуючі та фокусуючі. Існують також узагальнення моделей Нижника з більшою кількістю незалежних або залежних змінних. Класифікація моделей Нижника, наведена в [2], дозволяє чітко окреслити структурні та функціональні відмінності між групами моделей, створюючи підґрунтя для їх систематичного аналізу, а також виявлення їхніх генетичних зв'язків з іншими рівняннями математичної фізики.

Кожна з моделей Нижника має цікаві симетрійні властивості, але їх дослідження лише розпочато. Зокрема, розширений класичний симетрійний аналіз повністю виконано лише для (дійсного потенціального симетричного) бездисперсійного рівняння Нижника [3, 5]. Для усіх інших моделей пораховано лише їхні максимальні псевдоалгебри ліївської інваріантності, а для симетричних — також їхні псевдогрупи точкових симетрій [2].

Авторка висловлює щиру вдячність доктору фізико-математичних наук, професору Поповичу Р.О. та доктору фізико-математичних наук Бойку В.М. за визначення напрямку дослідження та постановку задач. А також вона висловлює подяку за фінансову підтримку Національній академії наук України в рамках проекту 0125U002856 для молодих вчених і дякує Інституту математики Сілезького університету в Опаві за гостинність і підтримку під час наукових візитів. Дослідження підтримано грантом від Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, O.O.V.).

1. *Вінніченко О.О.* Точкові симетрії і точні розвязки бездисперсійного рівняння Нижника // Матеріали наукової конференції студентів, аспірантів та молодих вчених “KyivAcademUs 2025” (Київ, Україна, 7–9 травня 2025 р.), Київський академічний університет. — 2025. — 10 с.

2. *Вінніченко О.О., Бойко В.М., Попович Р.О.* Ліївські та точкові симетрії моделей Нижника // (у процесі підготовки).

3. *Boyko V.M., Popovych R.O. and Vinnichenko O.O.* Point- and contact-symmetry pseudogroups of dispersionless Nizhnik equation // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2024. — V. 132, no. 107915. — 19 pp., arXiv:2211.09759.

4. *Nizhnik L.P.* Integration of multidimensional nonlinear equations by the inverse problem method // Soviet Phys. Dokl. — 1980. — V. 25. — P. 706–708.

5. *Vinnichenko O.O., Boyko V.M. and Popovych R.O.* Lie reductions and exact solutions of dispersionless Nizhnik equation // Anal. Math. Phys. — 2024. — V. 14, no. 82. — 56 pp., arXiv:2308.03744.

VARIETY OF NYZHNYK MODELS AND THEIR SYMMETRY ANALYSIS

The Nyzhnyk system has a number of interesting models. By introducing potentials,taking dispersionless limits, interpreting independent and/or dependent variables as real or complex or, in the complex case, as related by the complex conjugation and using differential substitutions, it is possible to obtain various models from it, namely symmetric and asymmetric, dispersive and dispersionless, real, complex, and mixed-type, in particular, with complex conjugate variables, standard with quadratic nonlinearities and modified with cubic ones.