УДК 517.988

ПОРІВНЯННЯ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Артем Уразовський

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
urazovskyartem@gmail.com

У роботі порівнюються методи розв'язання варіаційних нерівностей. Нехай H – дійсний гільбертовий простір, $C \subset H$ – непорожня замкнена опукла множина, а $V : C \to H$ – монотонний та ліпшицевий оператор. Варіаційна нерівність має вигляд: знайти $z^* \in C$ таке, що

$$\langle V(z^*), z - z^* \rangle \geq 0, \quad \forall z \in C. \tag{1}$$

Якщо P_C – метрична проєкція на множину C, то задача (1) еквівалентна задачі про нерухому точку $z^* = P_C(z^* - \gamma V(z^*))$, $\gamma > 0$ [1].

Основним методом у роботі для порівняння є метод операторної екстраполяції з адаптивним неспадним регулюванням величини кроку (NSC). Обираємо $x_0, x_1 \in C$, числа $0 < \tau_1 < \tau_0 < \frac{1}{2}, \lambda_0 > 0$, та додатну послідовність (α_n) таку, що $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < +\infty$. На кожній ітерації спочатку оновлюється довжина кроку:

$$\lambda_n = \begin{cases} \tau_1 \frac{\|x_{n-1} - x_n\|}{\|Vx_{n-1} - Vx_n\|}, & \text{якщо } \|Vx_{n-1} - Vx_n\| > \frac{\tau_0}{\lambda_{n-1}} \|x_{n-1} - x_n\|, \\ (1 + \alpha_n)\lambda_{n-1}, & \text{інакше.} \end{cases} \tag{2}$$

Після цього обчислюється наступне наближення:

$$x_{n+1} = P_C \left(x_n - \lambda_n V x_n - \lambda_{n-1}(V x_n - V x_{n-1}) \right). \tag{3}$$

Цей метод порівнюється з двома відомими алгоритмами: модифікованим екстраградієнтним методом Tseng'а [2] та методом fOGDA-VI [3]. Для чисельного порівняння розглядаються чотири тестові задачі: матрична гра двох гравців з нульовою сумою, усунення шуму з одномірного та двовимірного сигналів (сідлова постановка), а також сідлова задача зі скінченною сумою.

Чисельні експерименти (точність зупинки $r_\gamma(z_k) < 10^{-6}$) показали, що поведінка методів суттєво залежить від задачі. На матричній грі найкращий результат за кількістю ітерацій показав fOGDA-VI. Це узгоджується з тим, що цей метод спеціально побудований для монотонних варіаційних нерівностей, якими є чисто сідлові білінійні задачі без сильної монотонності.

Водночас на задачах знешумлення та задачі зі скінченною сумою метод NSC потребує найменшої кількості ітерацій і найменшого числа викликів оператора серед трьох методів. Це особливо важливо для задач, де виклик оператора V є обчислювально дорогим (наприклад, метод Tseng'а потребує два виклики на ітерацію, що суттєво збільшує час роботи).

Головний висновок експерименту полягає в тому, що метод NSC є найбільш стабільним і зручним у задачах, де важко наперед підібрати гарний сталий крок. Адаптивне регулювання дозволяє автоматично підлаштовуватися до локальної поведінки оператора: крок λ_n дуже швидко зростає на початку, після чого стабілізується. На відміну від методів Tseng'а та fOGDA-VI, які фіксують параметри заздалегідь і виявилися чутливими до їх вибору, NSC сам знаходить найбільш придатний крок на початку роботи.

1. Семенов В. В. Варіаційні нерівності: теорія та алгоритми. – Київ: ВПЦ "Київський університет", 2021. – 167 с.

2. Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings // SIAM Journal on Control and Optimization. – 2000. – Vol. 38, No. 2. – P. 431–446. – 16 p.

3. Sedlmayer M., Nguyen D.-K., Bot R. I. A fast optimistic method for monotone variational inequalities // Proceedings of the 40th International Conference on Machine Learning. – Proceedings of Machine Learning Research. – 2023. – Vol. 202. – P. 30406–30438. – 33 p.

4. Rudin L. I., Osher S., Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms // Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1992. – Vol. 60, No. 1–4. – P. 259–268. – 10 p.

COMPARISON OF METHODS FOR SOLVING VARIATIONAL INEQUALITIES

The work compares methods for solving monotone variational inequalities and equivalent fixed-point projection problems. The main method is operator extrapolation with adaptive nondecreasing step-size control (NSC). It is compared with Tseng's modified extragradient method and the fast optimistic method (fOGDA-VI). Four model problems are considered: a zero-sum matrix game, one-dimensional denoising, two-dimensional denoising and a finite-sum saddle-point problem. The numerical comparison is based on the number of operator calls and computational time. Special attention is paid to the adaptive behavior of the step-size in the method NSC.