The conference of young scientists «Pidstryhach readings – 2026»
May 27–29, 2026, Lviv

UDC 519.853

A VARIANCE REDUCTION STOCHASTIC EXTRAGRADIENT METHOD WITH RANDOMIZED FEASIBILITY UPDATES FOR VARIATIONAL INEQUALITY PROBLEMS

Bohdan Stupa

Taras Shevchenko National University of Kyiv,
bogdanstupa@gmail.com

Consider the following variational inequality problem of finding an optimal point $z^* \in S := X \cap Y$ that satisfies:

$$\begin{aligned} &\langle F(z^*), z - z^* \rangle \geq 0 \qquad \forall z \in S, \\ &\text{where } X := \bigcap_{a \in \mathcal{A}} X_a \text{ and } X_a := \{z \in \mathbb{R}^d \mid g_a(z) \leq 0\}, \end{aligned} \tag{1}$$

where $F : Y \to \mathbb{R}^d$ is the monotone operator and has a stochastic oracle F_ξ that is unbiased, $\mathbb{E}[F_\xi(z)] = F(z)$, and L-Lipschitz in mean $\mathbb{E}[||F_\xi(x) - F_\xi(y)||^2] \leq L^2||x-y||^2 \quad \forall x, y \in Y$. Assume that the set $Y \subseteq \mathbb{R}^d$ is closed, convex and bounded with $\max_{x,y \in Y} ||x-y||^2 \leq D$, and the set $S = X \cap Y$ is non-empty, and the function $g_a : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ is convex for all $a \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ is possibly infinite index set. Let us also denote the solution set of problem (1) with Sol.

Algorithm 1 (AlgRFU – Random Feasibility Updates [2])**.**
Input: $\hat{v} \in \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N}$, step size $\beta \in (0, 2)$. Set $v_k^0 = \hat{v}$.
Sample $\omega_k^i \in \mathcal{A}$
Compute $d_k^i \in \partial g^+_{\omega_k^i}(v_k^{i-1})$
$v_k^i = \Pi_Y \left[v_k^{i-1} - \beta \frac{g^+_{\omega_k^i}(v_k^{i-1})}{\|d_k^i\|^2} d_k^i \right]$
Return v_k^N.

We consider the following modification of the stochastic variance reduction extragradient method [1].

Algorithm 2.
Input: $p \in (0,1]$, $\alpha \in (0,1)$, $z_0 \in Y$, oracle F_ξ with distribution Q, step sizes $(\tau_k)_{k\geq 0}$, feasibility steps $(N_k)_{k\geq 0}$ with $N_k \geq 1$, total iterations K. Set $w_0 = z_0$.
$\bar{z}_k = \alpha z_k + (1-\alpha) w_k$
$z_{k+1/2} = \Pi_Y\Big[\bar{z}_k - \tau_k F(w_k)\Big]$
Sample $\xi_k \sim Q$
Compute $\widetilde{z}_{k+1} = \Pi_Y\Big[\bar{z}_k - \tau_k[F(w_k) + F_{\xi_k}(z_{k+1/2}) - F_{\xi_k}(w_k)]\Big]$
$z_{k+1} = \mathrm{AlgRFU}(\widetilde{z}_{k+1}, k, N_k, \beta)$
$$w_{k+1} = \begin{cases} z_{k+1} & \text{with probability } p \\ w_k & \text{with probability } 1-p \end{cases}$$
Return $\hat{z}_K = \dfrac{1}{K}\displaystyle\sum_{k=1}^{K} z_k$.

Define the feasibility tracking sequence for the iterates (z_k), (w_k) of Algorithm 2

$$\Theta_k = \alpha \mathrm{dist}^2(z_k, S) + \frac{1-\alpha}{p}\mathrm{dist}^2(w_k, S),$$

and the Lyapunov function

$$\Psi_k(z) = \Phi_k(z) + \lambda \Theta_k,$$

where $\Phi_k(z) = \alpha||z_k - z||^2 + \frac{1-\alpha}{p}||w_k - z||^2$. We obtain the following results for the Algorithm 2.

Theorem 1. *$\Psi_k(z_*)$ converges almost surely to a finite random variable for every $z_* \in Sol$; The sequence (z_k) is bounded almost surely, and every cluster point lies in S; $||z_k - z_*||$ converges almost surely for every $z_* \in Sol$.*

Theorem 2. *Let $\mathrm{T}_K = \sum_{k=0}^{K-1} \tau_k$ with $z_K^{\mathrm{mid}} = \frac{1}{\mathrm{T}_K}\sum_{k=0}^{K-1} \tau_k z_{k+1/2}$. Then:*

$$\max_{z\in S} \mathbb{E}\big[\langle F(z),\, z_K^{\mathrm{mid}} - z\rangle\big] = O\left(\frac{1}{K}\right). \tag{2}$$

1. Ahmet Alacaoglu, Yura Malitsky. *Stochastic Variance Reduction for Variational Inequality Methods.* Conference on Learning Theory, 2022, 778–816.

2. Abhishek Chakraborty, Angelia Nedić. *Randomized Feasibility Update Algorithms for Stochastic Variational Inequality Problems.*

СТОХАСТИЧНИЙ ЕКСТРАГРАДІЄНТНИЙ МЕТОД ЗІ ЗМЕНШЕННЯМ ДИСПЕРСІЇ ТА РАНДОМІЗОВАНИМИ ОНОВЛЕННЯМИ ДОПУСТИМОСТІ ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ

Запропоновано стохастичний екстраградієнтний метод зі зменшенням дисперсії та рандомізованими оновленнями допустимості для варіаційних нерівностей, допустима множина яких є перетином простої для проєкції множини Y та (можливо нескінченної) сім'ї множин опуклих функцій. Метод поєднує стохастичний екстраградієнтний метод зі зменшенням дисперсії [1] з рандомізованими кроками допустимості типу Поляка [2] і потребує лише проєкцій на Y. За стандартних припущень монотонності та ліпшицевості-в-середньому стохастичного оракула виведено спадну нерівність для функції Ляпунова, збіжність відстаней до кожного розв'язку та $O(1/K)$ швидкість збіжності.