Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2026»
27–29 травня 2026 р., Львів

УДК 517.5

ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ НИЖНІХ Q-ГОМЕОМОРФІЗМІВ ВІДНОСНО p-МОДУЛЯ

Марія Стефанчук

Інститут математики НАН України, stefanmv43@gmail.com

Нехай задано сім'ю Γ кривих γ у комплексній площині $\mathbb{C}$. Борелеву функцію $\rho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ називають *допустимою* для Γ (пишуть $\rho \in \operatorname{adm}\Gamma$), якщо

$$\int\limits_{\gamma} \rho(z)\,|dz| \;\geqslant\; 1 \tag{1}$$

для кожної (локально спрямлюваної) кривої $\gamma \in \Gamma$.

При $p > 1$ *p-модулем* сім'ї Γ називається величина

$$\mathrm{M}_p(\Gamma) \;=\; \inf_{\rho \in \operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \rho^p(z)\,dxdy.$$

Нехай $z_0 \in \mathbb{C}$. Введемо наступні позначення

$$\mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\},$$

$$S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} :\ |z - z_0| = r\}, \quad \mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Кажуть, що деяка властивість виконується для *p-майже всіх* кривих γ сім'ї Γ, якщо підсім'я кривих сім'ї Γ, для яких ця властивість порушується, має p-модуль нуль.

Вимірну за Лебегом функцію $\rho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ називають *узагальнено p-допустимою* для сім'ї кривих Γ (пишуть $\rho \in \operatorname{ext}_p \operatorname{adm}\Gamma$), якщо нерівність (1) виконується для p-майже всіх $\gamma \in \Gamma$.

Нехай D — область у комплексній площині $\mathbb{C}$ та $Q : D \to (0, \infty)$ — вимірна за Лебегом функція. Гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{C}$ називають *нижнім Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля у точці* $z_0 \in D$, якщо нерівність

$$\mathrm{M}_p\left(f\Sigma_{\mathbb{A}}\right) \geqslant \inf_{\rho \in \mathrm{ext_p}\,\mathrm{adm}\,\Sigma_{\mathbb{A}}} \int\limits_{\mathbb{A}} \frac{\rho^p(z)}{Q(z)}\,dxdy \tag{2}$$

виконується для кожного кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$, де $\Sigma_{\mathbb{A}}$ — сім'я всіх кіл $S(z_0, r)$, $r \in (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Теорема 1 ([1]). *Нехай D — область у комплексній площині $\mathbb{C}$, $z_0 \in D$. Припустимо, що $f : D \to \mathbb{C}$ — нижній Q-гомеоморфізм відносно p-модуля у точці z_0, $1 < p < 2$, та для деяких чисел $r_0 \in (0, \operatorname{dist}(z_0, \partial D))$, $C_0 = C_0(z_0) > 0$ і $\beta > 0$ виконується умова*

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) := \left(\int\limits_{S(z_0,r)} Q^{\frac{1}{p-1}}(z)\,|dz| \right)^{p-1} \leqslant C_0\, t^2 e^{\frac{\beta}{t}}$$

для м.в. $t \in (0, r_0)$. Тоді

$$\limsup_{z \to z_0} |f(z) - f(z_0)|\, e^{\frac{\beta}{(2-p)|z-z_0|}} \geqslant (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2-p}{C_0\,\beta} \right)^{\frac{1}{2-p}}.$$

Наслідок 1 ([1]). *Припустимо, що $f : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ — нижній Q-гомеоморфізм відносно p-модуля у точці $z_0 = 0$ при $1 < p < 2$, $f(0) = 0$, та для деяких чисел $r_0 \in (0, 1)$, $C_0 > 0$ і $\beta > 0$ виконується умова*

$$\|Q\|_{\frac{1}{p-1}}(z_0, t) \leqslant C_0\, t^2 e^{\frac{\beta}{t}}$$

для м.в. $t \in (0, r_0)$. Тоді

$$\limsup_{z \to 0} |f(z)|\, e^{\frac{\beta}{(2-p)|z|}} \geqslant (2\pi)^{\frac{p-1}{2-p}} \left(\frac{2-p}{C_0\,\beta} \right)^{\frac{1}{2-p}}.$$

Робота була підтримана бюджетною програмою «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

1. *Стефанчук М. В.* Про експоненціальну асимптотику нижніх Q-гомеоморфізмів у точці комплексної площини // Праці Інституту прикладної математики і механіки НАН України. — 2025. — Т. 39, № 2. — С. 163–176.

ON THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF LOWER Q-HOMEOMORPHISMS WITH RESPECT TO THE p-MODULUS

The asymptotic behavior of exponential type at a point of the complex plane for lower Q-homeomorphisms with respect to the p-modulus, $1 < p < 2$, is investigated.