

## ВПЛИВ ТЕРТЯ НА РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ШТАМПА У ПІВПРОСТОРИ

Ольга Соляр

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН  
України, м. Львів, вул. Наукова, 36  
solyarolya@gmail.com

Тривимірні контактні задачі для гладких штампів за відсутності тертя добре вивчені в літературі, при цьому для широкого класу задач розв'язки отримані в аналітичному вигляді. Контактні задачі з урахуванням тертя ускладнюються у зв'язку з тим, що область контакту є невідомою. Тому для розв'язування фрикційних контактних задач в основному використовують числові методи. У літературі при розгляді контактних задач, в основному обмежуються визначенням тисків під штампом. Водночас при розгляді плоских задач показано, що тертя не тільки кількісно, але і якісно впливає на розподіл напружень біля штампів. Зокрема встановлено, що тут можуть виникати значні розтягувальні напруження, які можуть спричинити виникнення тріщин. Тому актуальним є завдання розробити методіку дослідження тривимірних напружень біля штампа за врахування тертя.

У роботі побудовано числово-аналітичний алгоритм визначення напружень біля штампа та виконано дослідження впливу тертя на їх розподіл.

Приймали, що штамп втискається у півпростір  $z < 0$ , основа штампа описується рівнянням  $z = g(x, y)$ , під штампом за дії тертя виникають дотичні напруження. Алгоритм визначення контактних напружень, який базується на використанні методу інтегральних рівнянь-нерівностей Сінйоріні [2] з подальшим зведенням до задачі квадратичного програмування викладено у праці [1]. Нормальні контактні напруження  $\sigma_{nm} = \sigma_z(nh, mh)$  знаходили на системі вузлових точок  $(nh, mh)$ ,  $-N < n < N$ ,  $-M < m < M$ ,  $h$  – крок [1]. Дотичні напруження визначали через нормальні напруження згідно закону Кулона  $\tau_{hm} = k\sigma_{nm}$ .

Для заходження напружень на межі півпростору з урахуванням тертя побудовано кубатурну формулу, яка дозволяє на основі контактних напружень знайти напруження у довільних точках межі півпростору.

Для побудови цих формул запишемо напруження у півпросторі, які відповідають дії вертикальної сили  $P$  та горизонтальної сили  $X = kP$  на

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2026»,  
27–29 травня 2026 р., Львів**

межу півпростору в т.  $(0, 0, 0)$ . Використовуючи розв’язки задач Бусінеска і Черутті, для визначення напружень отримано співвідношення

$$\sigma_x = P \frac{\partial^4 F_1(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2}, \quad \sigma_y = P \frac{\partial^4 F_2(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (1)$$

Розглядали задачу про визначення напружень на межі півпростору, які зумовлені знайденими тиском  $p(x, y)$  та дотичними напруженнями  $\tau(x, y)$ , відмінними від нуля у заданій області  $S$ . Знайдені напруження від зосереджених сил, прикладених у довільній точці  $(\xi, \eta)$  визначали через функції вигляду  $F_{1,2}(x - \xi, y - \eta)$ . Напруження, які зумовлені контактними тисками визначались через інтеграли вигляду

$$\varphi_j(x, y) = \int_S \sigma(\xi, \eta) \frac{\partial^4}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} F_j(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta. \quad (2)$$

Функції  $\sigma(x, y)$  визначали в області  $S$  за допомогою інтерполяційної формули [1], яку підставляли у формулу (2). Поклавши  $x = x_\nu$ ,  $y = y_\mu$ , що належать області  $S$ , для визначення введеної функції  $\varphi_j(x, y)$  у вибраних вузлових точках отримали кубатурну формулу для визначення напружень біля штампа. На основі виконаних розрахунків встановлено, що у просторовій фрикційній контактній задачі для випадку параболічного штампа виникають розтягувальні напруження, які за величиною можуть бути співмірними з максимальним тиском під штампом або перевищувати його. Ці напруження зростають при збільшенні коефіцієнта тертя. Зокрема при коефіцієнті тертя  $k = 0.9$  відношення максимальних розтягувальних напружень до максимального тиску досягає 1.1. Тому за дії штампів з тертям біля штампа можуть виникати вертикальні тріщини, зумовлені розтягувальними напруженнями.

1. *Kushnir R. M., Soliar O. I.* Friction interaction of elastic bodies with unspecified contact areas // *Materials Science*. 2025. **61**. № 2. P. 200-210. <https://doi.org/10.1007/s11003-025-00980-1>.

2. *Signorini A.* Questioni di elasticita non linearizzata e semilinearizzata // *Rend. di Matem. e delle sue appl.* – 1959. – **18**, № 1 -2. – P. 95-139.

**EFFECT OF FRICTION ON STRESS DISTRIBUTION NEAR A PUNCH IN  
A HALF-SPACE**

*A numerical-analytical algorithm is developed to determine stresses in a half-space for spatial frictional contact problems involving arbitrary punches. For a parabolic punch, it is shown that tensile stresses near the contact area increase with the friction coefficient and can reach magnitudes comparable to the maximum pressure.*