

УДК 514.07

Про одну властивість другої квадратичної форми у просторах першого класу

Андрій Соловйов

Одеський національний університет імені І. І. Мечникова,
andrey-solovyov@stud.onu.edu.ua

Розглянемо псевдоріманів простір V_n з метричним тензором $g_{ij}(x)$.

Означення 1. Простором V_n першого класу називають гіперповерхню плаского простору.

Тензорні ознаки просторів першого класу мають вигляд

$$R_{hijk} = e(b_{hk}b_{ij} - b_{hj}b_{ik}), \quad b_{ij,k} - b_{ik,j} = 0, \quad (1)$$

де R_{hijk} - тензор кривини V_n , b_{ij} - друга квадратично форма цього простору, $e = \pm 1$, а « \cdot » - знак коваріантної похідної за зв'язістю V_n . Для просторів першого класу виконується

$$R_{ij} = e(bb_{ij} - b_{i\alpha}b_j^\alpha), \quad b = b_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}. \quad (2)$$

Про довільні тензори ζ_{ij} та ι_{ij} для яких виконуються умови $\zeta_{i\alpha}\iota_j^\alpha = \zeta_{j\alpha}\iota_i^\alpha$ кажуть, що вони комутують.

Доведено, що у псевдоріманових просторах першого класу тензор Річчі комутує з тензором b_{ij} , тобто виконується $b_{h\alpha}R_k^\alpha = b_{k\alpha}R_h^\alpha$.

Таким чином, для просторів першого класу отримано спеціальну властивість другої квадратичної форми. Це відкриває можливості для розвитку теорії та вивчати характеристики внутрішньої геометрії розглянутих просторів.

1. Eisenhart L. P. Riemannian Geometry. – Princeton: Princeton University Press, 1997. – 272 p.
2. Лесечко О., Соловйов А. Конформно-пласкі келерові простори. – Дослідження в математиці і механіці, 2023. – Т. 28, № 1-2(41-42). – С. 47–63.

On one property of the second quadratic form in spaces of class one

This work considers a pseudo-Riemannian space V_n of class one equipped with a metric tensor $g_{ij}(x)$. The defining tensorial conditions of such spaces are given in terms of the curvature tensor and the second fundamental form b_{ij} . Using these conditions, an explicit expression for the Ricci tensor is obtained. The main result establishes that, in pseudo-Riemannian spaces of class one, the Ricci tensor commutes with the tensor b_{ij} . The proof is based on tensorial identities derived from the curvature properties and involves suitable contractions leading to the required commutation relation.