**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2026»**
**27–29 травня 2026 р., Львів**

УДК 517.927

# ПРО ГРАНИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ ІЗ НАЙБІЛЬШ ЗАГАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

**Віталій Солдатов**

Інститут математики НАН України, soldatov@imath.kiev.ua, soldatovvo@ukr.net

Нехай довільно вибрано числа $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, натуральні числа $m, l, r$ та ціле число $n \geq 0$. На скінченному інтервалі $(a, b) \subset \mathbb{R}$ розглянемо лінійну крайову задачу для системи $m$ диф. рівнянь порядку $r \geq 1$:

$$(Ly)(t) := y^{(r)}(t) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) y^{(r-j)}(t) = f(t), \quad t \in (a, b), \tag{1}$$

$$By = c. \tag{2}$$

Тут довільно задано $A_{r-j} \in (C^{(n)})^{m \times m}$, де $1 \leq j \leq r$, $f \in (C^{(n)})^m$, $c \in \mathbb{C}^l$ і лінійний неперервний оператор $B\colon (C^{(n+r)})^m \to \mathbb{C}^l$.

Крайова умова (2) задає $l$ скалярних крайових умов для системи $m$ диференціальних рівнянь порядку $r$. У випадку $l > rm$ ця крайова умова є *перевизначеною*, а у випадку $l < rm$ вона є *недовизначеною* щодо диференціальної системи (1).

Запишемо крайову задачу (1), (2) у вигляді рівняння $(L, B)y = (f, c)$ з допомогою лінійного неперервного оператора

$$(L, B)\colon (C^{(n+r)})^m \to (C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^l. \tag{3}$$

**Означення 1.** Блочну числову матрицю $M(L, B) := \big([BY_1], \ldots, [BY_r]\big) \in \mathbb{C}^{l \times rm}$ розміру $l \times rm$, утворену із $r$ прямокутних блоків $[BY_i] \in \mathbb{C}^{m \times l}$, називаємо *характеристичною матрицею* крайової задачі (1), (2).

Тут $[BY_i]$ позначає комплексну числову матрицю розміру $l \times m$, кожен $j$-й стовпець якої отримується в результаті дії оператора $B$ на $j$-й стовпець матричної функції $Y_i(\cdot) \in (C^{(n+r)})^{m \times m}$, яка для кожного номера $i \in \{1, \ldots, r\}$, є єдиним розв'язком сім'ї задач Коші

$$Y_i^{(r)}(t) + \sum\nolimits_{j=1}^{r} A_{r-j}(t) Y_i^{(r-j)}(t) = O_m, \quad t \in (a, b), \tag{4}$$

$$Y_i^{(j-1)}(a) = \delta_{i,j} I_m, \quad j \in \{1, \ldots, r\}, \tag{5}$$

де $O_m$ і $I_m$ позначають нульову і одиничну матриці розміру $m \times m$, а $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Поряд із (1), (2), розглянемо послідовність задач

$$L(k)y(t,k) := y^{(r)}(t,k) + \sum_{j=1}^{r} A_{r-j}(t,k) y^{(r-j)}(t,k) = f(t,k), \ t \in (a,b), \quad (6)$$

$$B(k)y(\cdot,k) = c(k), \quad (7)$$

Тут $k \in \mathbb{N}$, $A_{r-j}(\cdot,k) \in (C^{(n)})^{m\times m}$, $f(\cdot,k) \in (C^{(n)})^m$, $c(\cdot,k) \in \mathbb{C}^l$, а $B(k)$ — лінійний неперервний оператор на парі просторів $(C^{(n+r)})^m$ і $\mathbb{C}^l$. З (6), (7) пов'яжемо такі послідовності їх операторів і характеристичних матриць

$$(L(k), B(k)) \colon (C^{(n+r)})^m \to (C^{(n)})^m \times \mathbb{C}^l \quad (8)$$

$$M\big(L(k), B(k)\big) := \big(\, [B(k)Y_1(k)] \,, \ldots, [B(k)Y_r(k)] \,\big) \subset \mathbb{C}^{l\times rm}.$$

**Теорема 1.** *Якщо* $(L(k), B(k)) \xrightarrow{s} (L, B)$, *то* $M(L(k), B(k)) \to M(L, B)$.

**Теорема 2.** *Припустимо, що*

$$(L(k), B(k)) \xrightarrow{s} (L, B). \quad (9)$$

*Тоді*
$$\dim\ker(L(k), B(k)) \le \dim\ker(L, B) \quad \text{для всіх} \ \ k \gg 1,$$
$$\dim\operatorname{coker}(L(k), B(k)) \le \dim\operatorname{coker}(L, B) \ \ \text{для всіх} \ \ k \gg 1.$$

$(*) \xrightarrow{s} (**)$ позначає збіжність послідовності операторів у сильній операторній топології. Всі границі розглядаємо при $k \to \infty$.

**Наслідок 1.** *Припустимо, що виконується* (9), *тоді для всіх* $k \gg 1$
* *якщо оператор* (3) *є оборотним, то оператори* (8) *є оборотними*;
* *якщо крайова задача* (1), (2) *має розв'язок для кожних зазначених правих частин, то це правильно і для —* (6), (7);
* *якщо крайова задача* (1), (2) *має лише тривіальний розв'язок у випадку нульових правих частин, то це правильно і для —* (6), (7).

Представлені результати було опубліковано в роботі [1].

Дослідження автора підтримані стипендією Президента України для молодих вчених та грантом Simons Foundation (SFI-PD-Ukraine-00014586, V.O.S.).

1. *Soldatov V.* Solvability of linear boundary-value problems for ordinary high-order differential systems in spaces of continuously differentiable functions // Ukr. Mat. Zhurn. (accepted for publication). – 2026. – 16 p., DOI: 10.13140/RG.2.2.20015.39844.

## ON LIMIT PROPERTIES OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR HIGH-ORDER DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH THE MOST GENERAL BOUNDARY CONDITIONS

*We present limit theorems for sequences of the characteristic matrices of the boundary-value problems with the most general boundary conditions that are allowed to be overdetermined or underdetermined, and for the d-characteristics of the corresponding Fredholm operators.*