УДК 519.612

АНСАМБЛЕВЕ МАШИННЕ НАВЧАННЯ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ КОРТЕЖІВ РОЗВ'ЯЗКІВ КУБІЧНИХ МАТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

Маріан-Северин Шевчук

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, e-mail: marian-severyn.shevchuk@lnu.edu.ua
Науковий керівник: проф. Недашковський М. О.

Розглядається кубічне матричне рівняння $X^3 + A_2X^2 + A_1X + A_0 = O$, $A_i, X \in \mathbb{R}^{p\times p}$ [1, 2]. Згідно з [3], воно має до $\binom{np}{p}$ ізольованих розв'язків (для $p = n = 3$ – 84). Ефективним інструментом їх обчислення є матричні гіллясті ланцюгові дроби (МГЛД) [4], які подають розв'язок як ітераційний процес, керований парою параметрів $(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$. Кожна вдала пара дає кортеж (q_1, q_2, X), проте ручний підбір (q_1, q_2) дозволяє знайти лише декілька найочевидніших кортежів. У роботі запропоновано автоматизувати пошук таких пар за допомогою ансамблю моделей машинного навчання.

Для канонічної форми ітерація МГЛД має вигляд [4]

$$X_{(t)} = q_0 + p_1\big(q_1E + X_{(t-1)}\big)^{-1} + p_2\big(q_2E + X_{(t-1)}\big)^{-1}, \tag{1}$$

E – одинична матриця, $q_0 = (q_1 + q_2)E - A_2$, p_1, p_2 – аналітичні від q_1, q_2 і A_i; $X_{(0)} = O$, критерій зупину $\|X_{(t)} - X_{(t-1)}\|_F / \|X_{(t)}\|_F < 10^{-10}$ або $t_{\max} = 5000$. Якість оцінюється нев'язкою $r = \|X^{*3} + A_2X^{*2} + A_1X^* + A_0\|_F$.

Метод. Пошук (q_1, q_2) переформульовується як бінарна класифікація: $y = 1$, якщо процес (1) збіжний з прийнятною нев'язкою, інакше $y = 0$. Замість двох координат використовується 12 ознак (зокрема q_1q_2, $q_1 \pm q_2$, q_i^2, $|q_i|$, $\sqrt{q_1^2 + q_2^2}$). Алгоритм складається з п'яти фаз: стохастичне дослідження $[-80, 80]^2$ на 4000 пар; навчання ансамблю з градієнтного бустингу (gradient boosting, GB; 200 дерев), випадкового лісу (random forest, RF; 200) та багатошарового перцептрона (multilayer perceptron, MLP) 128–64–32 із зваженою агрегацією; відбір 3000 кандидатів з пулу 45 000; локальний пошук у δ-околі ($\delta = 1$); два раунди адаптивного перенавчання з вибіркою за невизначеністю (uncertainty sampling). Бюджет $\sim 10^4$ обчислень (1); час виконання – 16 хв і 32 хв (для канонічного та неканонічного прикладів відповідно) на одному ядрі процесора.

Результати. Метод апробовано на двох прикладах із [4] ($p = 3$): канонічному $X^3 + A_2X^2 + A_1X + A_0 = O$ та неканонічному $X^3 + X^2A_2 + XA_1 + A_0 = O$. Для кожного знайдено по **6 унікальних кортежів** замість 4, доступних ручному підбору [4], тобто +50%. Усі нові розв'язки незалежно перевірено підстановкою (нев'язки $\leq 10^{-6}$). Деталі для канонічного рівняння – у табл. 1.

№	Статус	q_1	q_2	r	Ітер.
1	базов.	$-6{,}38$	34,94	$1{,}2{\cdot}10^{-6}$	1015
2	базов.	0,18	24,50	$3{,}2{\cdot}10^{-8}$	472
3	базов.	$-14{,}41$	2,91	$3{,}3{\cdot}10^{-8}$	87
4	базов.	9,12	5,80	$6{,}2{\cdot}10^{-7}$	1034
5	**новий**	$-23{,}04$	$-15{,}67$	$3{,}9{\cdot}10^{-7}$	3786
6	**новий**	$-23{,}26$	$-15{,}98$	$5{,}6{\cdot}10^{-7}$	2054

Табл. 1: Унікальні кортежі для канонічного рівняння.

Частка валідації (validation rate, VR) – частка згенерованих пар, що дають збіжний розв'язок – для пошуку на основі штучного інтелекту (ШІ) становить 99,5% та 96,3% проти 11,6% і 16,1% для випадкового (прискорення 6–8 разів). На п'яти запусках із різними зернами генератора всі знайшли той самий набір; CV(VR) $< 0{,}81\%$, парний тест Вілкоксона $p = 0{,}016$.

Висновки. Запропонований п'ятифазний алгоритм на основі ШІ дозволяє знаходити більше кортежів розв'язків кубічних матричних рівнянь, ніж ручний підбір параметрів: +50% до кількості кортежів та у 6–8 разів вища ефективність використання обчислювального бюджету ($p = 0{,}016$, CV $< 1\%$).

1. *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Matrix Polynomials. New York: Academic Press, 1982. 409 p.
2. *Tisseur F., Higham N. J.* Structured pseudospectra for polynomial eigenvalue problems // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2001. Vol. 23, No 1. P. 187–208.
3. *Dennis J. E., Traub J. F., Weber R. P.* The algebraic theory of matrix polynomials // SIAM J. Numer. Anal. 1976. Vol. 13, No 6. P. 831–845.
4. *Недашковський М. О.* Обчислення кортежів розв'язків матричних поліноміальних рівнянь // Мат. та комп. моделювання. 2019. Вип. 19. С. 78–84.

ENSEMBLE MACHINE LEARNING FOR COMPUTING SOLUTION TUPLES OF CUBIC MATRIX EQUATIONS

A five-phase AI-guided algorithm combining stochastic exploration with an ensemble of three classifiers (GB, RF, MLP) on 12 engineered features is proposed for systematic computation of solution tuples of cubic matrix equations via matrix branched continued fractions. For two 3×3 test problems, 6 unique tuples are discovered vs. 4 by manual tuning (+50%). The validation rate of AI search reaches 96–99% against 12–16% for random sampling; the advantage is statistically significant (Wilcoxon $p = 0{,}016$, $CV < 1\%$).