The conference of young scientists «Pidstryhach readings – 2026»
May 27–29, 2026, Lviv

UDC 532.526

OPTIMIZED POLYNOMIAL APPROXIMATION OF THE BLASIUS VELOCITY PROFILE IN A LAMINAR FLAT-PLATE BOUNDARY LAYER

Zakhar Sheiko

Zakhar Sheiko, Oles Honchar Dnipro National University
E-mail: sheiko_z@365.dnu.edu.ua

Polynomial approximations of velocity profiles are widely used in integral boundary layer methods because they allow closed-form evaluation of the boundary layer parameters. However, the accuracy of such methods depends strongly on the assumed velocity profile in the boundary layer. Therefore, the purpose of this work is to construct a polynomial profile that reduces the discrepancy with the Blasius reference solution. We consider steady two-dimensional incompressible laminar flow over a flat plate with zero pressure gradient. Velocity distribution in general case is given as [1]

$$\frac{u(x,y)}{U_\infty} = f(\eta), \qquad \eta = \frac{y}{\delta(x)} \tag{1}$$

The flow parameters are given below:

$$\frac{dp}{dx} = 0, \qquad \rho = 1.294\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \qquad \nu = 1.5\cdot 10^{-5}, \qquad U_\infty = 1\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{2}$$

Following the classical Pohlhausen [2] polynomial approach, we approximate the dimensionless velocity profile by a fifth-degree polynomial.

$$g(\eta) = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + d\eta^4 + e\eta^5 \tag{3}$$

With boundary conditions

$$g(1) = 1, \qquad g'(1) = 0, \qquad g(0) = 0, \qquad g''(0) = 0, \qquad g''(1) = 0 \tag{4}$$

By expressing the remaining coefficients in terms of a and applying the boundary conditions, the polynomial can be written as:

$$g(\eta, a) = -a(-1+\eta)^3\eta(1+3\eta) + \eta^3(10 - 15\eta + 6\eta^2) \tag{5}$$

The optimization functional is defined as follows:

$$J(a) = \int_0^1 \left(g(\eta,a) - f_B(\eta)\right)^2 d\eta + \lambda \left(\frac{\delta^*_{opt}}{\theta_{opt}} - H_B \right)^2 \tag{6}$$

Here, δ^*_{opt} is the displacement thickness, θ_{opt} is the momentum thickness, H_B is the Blasius shape factor, $g(\eta,a)$ is the considered velocity profile $f_B(\eta)$ is the normalized Blasius profile, and λ is the weighting coefficient for the shape-factor constraint. Minimization for λ=1 and $H_B = 2.59$ gives a=1.86. Rounding to hundredths, optimized profile becomes:

$$g(\eta) = 1.86\eta - 1.17\eta^3 + 0.10\eta^4 + 0.41\eta^5 \tag{7}$$

The optimized profile is compared with the classical Pohlhausen [2] profile. The average relative errors over the interval (0,L) for the Pohlhausen and optimized polynomial profiles are shown below (L=0.5).

Table 1. Comparison of the Pohlhausen and optimized polynomial profiles.

Profile	$\delta\overline{\delta^*}$, %	$\delta\overline{\theta}$, %	$\delta\overline{C_f}$, %	H	δH, %
Pohlhausen	3.24	1.75	3.22	2.55	1.45
Optimized	0.98	1.32	0.95	2.60	0.33

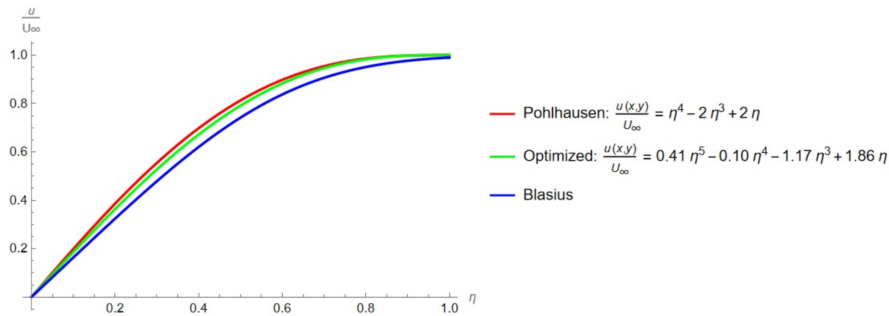

Figure 1 – Comparison of velocity profiles in dimensionless coordinates.

Thus, the proposed polynomial boundary-layer velocity profile reduces the relative errors of the main integral boundary-layer parameters compared with the Pohlhausen approximation.

1. Schlichting H. Boundary-Layer Theory. Nauka, Moscow, 1974. [Russian translation]

2. Pohlhausen K. Zur näherungsweisen Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 1921, 1, 252–268.

ОПТИМІЗОВАНЕ ПОЛІНОМІАЛЬНЕ НАБЛИЖЕННЯ ПРОФІЛЮ ШВИДКОСТІ БЛАЗІУСА В ЛАМІНАРНОМУ ПОГРАНИЧНОМУ ШАРІ НА ПЛОСКІЙ ПЛАСТИНІ

Поліноміальні апроксимації профілів швидкості широко використовуються в інтегральних методах пограничного шару, оскільки вони дозволяють оцінювати товщину зміщення, товщину імпульсу та дотичне напруження на стінці в замкнутій формі. Однак точність таких методів сильно залежить від передбачуваного профілю швидкості в пограничному шарі. Тому метою цієї роботи є побудова поліноміального профілю, який зменшує розбіжність з еталонним рішенням Блазіуса.