**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2026»
27–29 травня 2026 р., Львів**

УДК 519.8

ДИНАМІКА КОНФЛІКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ В ТЕРМІНАХ ДОМІНУЮЧИХ ГРАВЦІВ

Оксана Сатур

Інститут математики НАН України, orlassat@gmail.com

Дослідження динамічних систем конфлікту зазвичай базується на перерозподілі ймовірнісних мір, що моделюють присутність опонентів у певному просторі станів [1]. У роботі [2] розглянуто випадок, коли гравці діють за принципом мінімізації, взаємодіючи лише в точках своєї найменшої присутності. Проте цілком реальною є зворотна ситуація, тобто взаємодія у точках максимальної присутності (позиціях домінування).

Розглянемо двокомпонентну дискретну динамічну систему конфлікту. Нехай двом гравцям A та B у початковий момент часу $t = 0$ задані незалежні розподіли ймовірностей на просторі позицій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$:

$$A \sim \mathbf{p}^0 = (p_1^0, p_2^0), \quad B \sim \mathbf{r}^0 = (r_1^0, r_2^0).$$

Очевидно, що початкові вектори $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{r}^0$ є стохастичними. Також припускаємо виконання умови $0 < (\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0) < 1$. Координати векторів інтерпретуються як незалежні ймовірності присутності гравців A та B у відповідних позиціях.

У наступні моменти дискретного часу $t = 1, 2, \ldots$ гравці вступають у конфліктну взаємодію, яку позначимо оператором $\circledast$. Еволюція системи описується ітераційною послідовністю стохастичних векторів:

$$\{\mathbf{p}^0, \mathbf{r}^0\} \xrightarrow{\circledast} \{\mathbf{p}^1, \mathbf{r}^1\} \xrightarrow{\circledast} \cdots \xrightarrow{\circledast} \{\mathbf{p}^t, \mathbf{r}^t\} \xrightarrow{\circledast} \cdots \tag{1}$$

Згідно з концепцією max-взаємодії, гравці концентрують свої зусилля виключно на позиціях домінування. Позначимо максимальні координати векторів стану на кроці t як $p_{\max}^t = \max\{p_1^t, p_2^t\}$, $r_{\max}^t = \max\{r_1^t, r_2^t\}$.

Нехай індекси $i, m \in \{1, 2\}$ вказують на позиції, де досягаються ці максимуми, тобто $p_i^t = p_{\max}^t$ та $r_m^t = r_{\max}^t$. Тоді закон зміни координат при переході від кроку t до $t + 1$ набуває вигляду:

$$\begin{aligned} p_i^{t+1} &= \frac{p_{\max}^t (1 - r_{\max}^t)}{z^t}, \qquad & r_m^{t+1} &= \frac{r_{\max}^t (1 - p_{\max}^t)}{z^t}, \\ p_j^{t+1} &= \frac{p_j^t}{z^t} \quad (j \neq i), \qquad & r_k^{t+1} &= \frac{r_k^t}{z^t} \quad (k \neq m). \end{aligned} \tag{2}$$

де $z^t = 1 - p_{\max}^t r_{\max}^t$.

Асимптотична поведінка системи суттєво залежить від початкових умов.

Теорема 1. *Кожна траєкторія динамічної системи конфлікту* (1), *еволюція якої задана формулами* (2), *з парою початкових стохастичних векторів* $\mathbf{p^0}, \mathbf{r^0} \in \mathbb{R}^2_+$, *що задовольняють умову рівності* ($\mathbf{p}^0 = \mathbf{r}^0$) *або дзеркальної симетрії* ($p_1^0 = r_2^0$), *збігається до стійкого граничного циклу періоду 2. Зокрема, граничний цикл визначається станами:*

1) якщо $\mathbf{p}^0 = \mathbf{r}^0$, *то*

$$\{(x^*, 1-x^*), (x^*, 1-x^*)\} \longleftrightarrow \{(1-x^*, x^*), (1-x^*, x^*)\};$$

2) якщо $p_1^0 = r_2^0$, *то*

$$\{(x^*, 1-x^*), (1-x^*, x^*)\} \longleftrightarrow \{(1-x^*, x^*), (x^*, 1-x^*)\};$$

де $x^* = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ *– єдиний додатний корінь рівняння* $x^2 + x - 1 = 0$.

Теорема 2. *Кожна траєкторія динамічної системи конфлікту* (1), *еволюція якої задана формулами* (2), *з парою початкових стохастичних векторів* $\mathbf{p^0}, \mathbf{r^0} \in \mathbb{R}^2_+$, $\mathbf{p}^0 \neq \mathbf{r}^0$, $p_1^0 \neq r_2^0$, *глобально асимптотично збігається до стійкого граничного циклу періоду 4:*

$$\{(x^*, 1-x^*), (1-y^*, y^*)\} \xrightarrow{*} \{(y^*, 1-y^*), (x^*, 1-x^*)\} \xrightarrow{*}$$
$$\xrightarrow{*} \{(1-x^*, x^*), (y^*, 1-y^*)\} \xrightarrow{*} \{(1-y^*, y^*), (1-x^*, x^*)\} \xrightarrow{*} \ldots$$

де x^* *є єдиним дійсним коренем кубічного рівняння* $x^3 + x^2 - 1 = 0$, $y^* = \frac{1}{1+x^*}$.

Зауважимо, що додатний корінь $x^* = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ рівняння $x^2 + x - 1 = 0$ є оберненим *Золотим перерізом* ($\Phi^{-1} \approx 0.618$), єдиний дійсний корінь $x^* \approx 0.7548$ рівняння $x^3 + x^2 - 1 = 0$ є оберненим значенням *Пластичного числа* (Plastic number, $\rho \approx 1.3247$, корінь рівняння $\rho^3 - \rho - 1 = 0$).

Цю роботу частково підтримано грантом Фонду Саймонса SFI-PD-Ukraine-00014586 (O.R.S.) та проєктом “Математичне моделювання складних систем та процесів, пов’язаних із безпекою” (№ 0125U000299).

1. *Кошманенко В. Д.* Спектральна теорія динамічних систем конфлікту. – Київ: Наукова думка, 2016.

2. *Satur O.* Dynamics of Conflict Interaction in Terms of Minimal Players. In: Timokha, A. (eds) Analytical and Approximate Methods for Complex Dynamical Systems. Understanding Complex Systems. – Springer, Cham., 2025. – P. 57–67.

TWO-COMPONENT DYNAMICS OF CONFLICT INTERACTION IN TERMS OF DOMINANT PLAYERS

This work investigates a two-component discrete dynamical system modeling the max-interaction of two players. We prove that trajectories converge to periodic attractors linked to fundamental constants.