

УДК 512.643:512.552

ЕЛЕМЕНТАРНА РЕДУКЦІЯ МАТРИЦЬ НАД КІЛЬЦЯМИ БЕЗУ ЦЕНТРАЛЬНО СТАБІЛЬНОГО РАНГУ 1

Андрій Саган

Львівський національний університет імені Івана Франка,
AndriiSahan@lnu.edu.ua

Всі розглядувані в цій роботі кільця є асоціативними з відмінною від нуля одиницею.

Через $U(R)$ позначимо групу оборотних елементів кільця R , а через $M_n(R)$ — множину квадратних матриць порядку n .

Під елементарними матрицями з елементами кільця розуміємо квадратні матриці таких типів: 1) діагональні з оборотними елементами на головній діагоналі; 2) матриці, відмінні від одиничної деяким ненульовим елементом поза головною діагоналлю.

Кільце R називається *кільцем центрально стабільно рангу 1* [2], якщо з $aR + bR = R$ існує $t \in Z(R)$, що $a + bt = u$, де $u \in U(R)$.

Кільце R називається *кільцем з елементарною редукцією матриць* [3], якщо довільна матриця A над кільцем R володіє елементарною редукцією, тобто існують такі елементарні над R матриці $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_s$ відповідних розмірів, що

$$P_1 \cdot P_2 \cdots P_k \cdot A \cdot Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_s = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r, 0, \dots, 0),$$

де $R\varepsilon_{i+1}R \subseteq R\varepsilon_i \cap \varepsilon_i R$ для $i = 1, 2, \dots, r - 1$.

Кільце R називається *EID-кільцем* [4], якщо ідемпотентна матриця E над ним має властивість елементарно-ідемпотентної редукції, тобто існують такі елементарні над R матриці $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_s$ відповідних розмірів, що

$$P_1 \cdot P_2 \cdots P_k \cdot E \cdot (Q_1 \cdot Q_2 \cdots Q_s) = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, 0, \dots, 0).$$

Всі інші необхідні означення можна знайти в роботах [1], [2], [3], [4].

Теорема 1. *Некомутативне кільце Безу центрально стабільного рангу 1 є кільцем з елементарною редукцією матриць.*

Теорема 2. *Некомутативне область Безу центрально стабільного рангу 1 є EID-кільцем.*

Теорема 3. *Нехай R некомутативне кільце Безу центрально стабільного рангу 1. Тоді довільна необоротна матриця є добутком ідемпотентних матриць.*

1. *Alahmadi A., Jain S. K., Leroy A.* Decomposition of singular matrices into idempotents // Linear Multilinear Algebra - 2014. - Vol. 62, №1. - P. 13-27.
2. *Calugareanu G.* Central stable range one for elements and rings // Sao Paulo Journal of Mathematical Sciences - 2025. - Vol. 19, №26. - P. 1-13.
3. *Zabavsky B.V.* Rings with elementary reduction matrix // Ring Theory Conf., Miskolc, July 15-20, 1996.
4. *Романів О. М., Саган А. В., Фірман О. І.* Елементарна редукція ідемпотентних матриць Прикл. проблеми мех. та мат. - 2016. - Vol. 14. - С. 7-11.

ELEMENTARY REDUCTION OF MATRICES OVER BEZOUT RING WITH CENTRAL STABLE RANGE 1

In this paper we proved that a noncommutative Bezout ring of central stable range 1 is a ring with elementary reduction of matrices and an EID-ring. It is also shown that every singular matrix over a noncommutative Bezout ring of central stable range 1 is a product of idempotent matrices