Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2026»
27–29 травня 2026 р., Львів

УДК 512.552.13

КІЛЬЦЯ 2-ЕВКЛІДОВОГО РАНГУ 1

Андрій Плаксін, Олег Романів, Андрій Саган

Львівський національний університет імені Івана Франка,
andrii.plaksin@lnu.edu.ua, oleh.romaniv@lnu.edu.ua,
andriisahan@lnu.edu.ua

Нехай R — комутативне асоціативне кільце з відмінною від нуля одиницею.

Під елементарними матрицями з елементами кільця розуміємо квадратні матриці таких типів: 1) діагональні з оборотними елементами на головній діагоналі; 2) матриці, відмінні від одиничної деяким ненульовим елементом поза головною діагоналлю; 3) матриці, отримані з одиничної перестановкою рядків чи стовпчиків.

Групу всіх елементарних матриць порядку n з елементами з кільця R позначатимемо $GE_n(R)$.

Кільце називається *кільцем Безу* [1], якщо довільний скінченнопороджений ідеал цього кільця є головним.

Кільце R називається *кільцем Ерміта* [2], якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують такий елемент $d \in R$ і така оборотна матриця Q другого порядку, що $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} d & 0 \end{pmatrix}$.

Кільце R називається *елементарно головним* [3], якщо для довільних елементів $a, b \in R$ існують такий елемент $q \in R$ і матриця $Q \in GE_2(R)$, що $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} Q = \begin{pmatrix} q & 0 \end{pmatrix}$.

Норма над кільцем R визначається як функція $\varphi\colon R \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, яка задовольняє умовам $\varphi(0) = 0$, $\varphi(a) > 0$ для $a \in R \backslash \{0\}$, $\varphi(ab) > \varphi(a)$ для довільних $a, b \in R$ таких, що $ab \neq 0$.

Елемент a кільця R називається 2-*евклідовим*, якщо для довільного ненульового елемента b цього кільця існує норма φ та послідовність рівностей

$$a = bq_1 + r_1, \quad b = r_1 q_2 + r_2, \tag{1}$$

така, що $\varphi(r_2) < \varphi(b)$.

Кільце R називається *кільцем* 2-*евклідового рангу* 1, якщо для довільних елементів $a, b \in R$, де $aR + bR = R$, існує такий елемент $y \in R$, що $a + by$ — 2-евклідовий елемент.

Теорема 1. *Якщо R — кільце 2-евклідового рангу 1, то для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $aR + bR = R$, існують елемент $u \in R$ і матриці $P_1, \ldots, P_n \in GE_2(R)$, що*

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot P_1 \cdots P_n = \begin{pmatrix} u & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Комутативна область Безу 2-евклідового рангу 1 є елементарно головною.*

Теорема 3. *Комутативна область Безу 2-евклідового рангу 1 є кільцем Ерміта.*

Теорема 4. *Довільна оборотна матриця над комутативною областю 2-евклідового рангу 1 розкладається у скінченний добуток елементарних матриць.*

1. *Henriksen M.* Some remarks about elementary divisor rings, Michigan Math. J. – 1955. – Vol. 156 – P. 150-163.

2. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules, Trans. Amer. Math. Soc. **66**(2) (1949), 464-491.

3. *Bougaut B.* Anneaux Quasi-Euclidiens // These de docteur troisieme – 1976. 67p.

RINGS 2-EUCLIDEAN RANGE 1

In this paper we proved that a commutative Bezout domain of 2-euclidean range 1 is Hermite ring. It is also shown that every invertible matrix over a commutative domain of 2-euclidean range 1 is a finite product of elementary matrices.