

УДК 517.968

ПРО КОРЕКТНІСТЬ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРОМ ФРЕДГОЛЬМА ЗІ СЛАБОСИНГУЛЯРНИМ ЯДРОМ

Оксана Паляниця

Львівський національний університет імені Івана Франка, e-mail:
oksana.palianytsia@lnu.edu.ua

Просторові нелокальні ефекти у задачах дифузії та теплопровідності зазвичай описуються параболічними інтегро-диференціальними рівняннями із інтегральним оператором Фредгольма зі слабосингулярним ядром [1–3]. В цій роботі проводиться теоретичне обґрунтування коректності відповідної початково-крайової задачі як основа для побудови та аналізу числових методів.

В обмеженій однозв'язній області $D \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) розглядається задача знаходження функції $u(x, t)$, що задовольняє:

$$\begin{cases} u_t(x, t) - \Delta u(x, t) + \lambda(Au)(x, t) = f(x, t), & (x, t) \in D \times (0, T], \\ u(x, t) = 0, & (x, t) \in \partial D \times [0, T], \\ u(x, 0) = w(x), & x \in D, \end{cases} \quad (1)$$

де $\lambda > 0$, а A — лінійний оператор Фредгольма зі слабосингулярним ядром:

$$(Au)(x, t) = \int_D \frac{K(x, y)}{|x - y|^\alpha} u(y, t) dy, \quad \alpha \in [0, d), \quad K \in L^\infty(D \times D). \quad (2)$$

Вводимо Гельфандову трійку $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$, де $H = L^2(D)$, $V = H_0^1(D)$. Білінійна форма $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_H$ — коерцитивна, а з властивостей слабосингулярних інтегральних операторів випливає обмеженість $A : H \rightarrow H$. За теоремою Ліонса–Маженеса простір $W(0, T) = \{v \in L^2(0, T; V) : v' \in L^2(0, T; V')\}$ неперервно вкладається у $C([0, T]; H)$, що гарантує коректність початкової умови. Перейдемо до слабкого формулювання задачі (1) з розв'язком $u \in W(0, T)$, $u(0) = w$, яка для майже всіх $t \in (0, T)$ задовольняє:

$$\langle u'(t), v \rangle_{V', V} + a(u(t), v) + \lambda(Au(t), v)_H = \langle f(t), v \rangle_{V', V}, \quad \forall v \in V. \quad (3)$$

Існування слабкого розв'язку встановлюється методом Гальоркіна. Його наближення шукається у вигляді $u_m(x, t) = \sum_{j=1}^m c_j^m(t) v_j(x)$, де $\{v_j\}$

— система функцій, що утворює ортонормований базис у H та ортогональний у V . Підстановка u_m у (3) зводить задачу до системи звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) відносно коефіцієнтів $c_j^m(t)$. Просторова природа оператора Фредгольма не породжує інтегро-диференціальної системи за часом, що дозволяє застосувати класичну теорію лінійних ЗДР для гарантування глобальної розв'язності на $[0, T]$.

Оцінюючи енергетичну тотожність завдяки коерцитивності $a(\cdot, \cdot)$, нерівності Юнга та обмеженості оператора A (а саме: $|(Au_m, u_m)_H| \leq C_A \|u_m\|_H^2$), та застосувавши лему Грьонвалля–Беллмана отримуємо апріорні оцінки (що не залежать від m):

$$\|u_m\|_{L^\infty(0,T;H)}^2 + \|u_m\|_{L^2(0,T;V)}^2 \leq C(\|w\|_H^2 + \|f\|_{L^2(0,T;V')}^2), \quad (4)$$

а також $\|u'_m\|_{L^2(0,T;V')} \leq \text{const}$. За теоремою Обена–Ліонса вкладення $W(0, T) \hookrightarrow L^2(0, T; H)$ — компактне, що породжує сильну збіжність у H . Завдяки неперервності оператора A це забезпечує коректний граничний перехід при $m \rightarrow \infty$ в інтегральному члені та доводить існування розв'язку. Єдиність випливає з енергетичної оцінки різниці двох розв'язків та застосування лемі Грьонвалля–Беллмана.

Теорема 1. *Нехай $f \in L^2(0, T; V')$, $w \in H$, $K \in L^\infty(D \times D)$, $\alpha \in [0, d)$. Тоді існує єдиний слабкий розв'язок $u \in W(0, T)$ задачі (1), що неперервно залежить від вхідних даних, і виконується оцінка:*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|u'\|_{L^2(0,T;V')} \leq C(\|w\|_H + \|f\|_{L^2(0,T;V')}). \quad (5)$$

1. *Chapko R., Palianytsia O.* On the boundary-domain integrals approach for a partial integro-differential equations // Visnyk Lviv. un-tu. Ser. prykl. matem ta inf. — 2022. — Vol. 30. — P. 38–44.
2. *Borachok I., Palianytsia O., Chapko R.* Method of radial basis functions for solving the partial integro-differential equation of diffusion with nonlocal effects // Cybernetics and Systems Analysis. — 2024. — Vol. 60, No. 4. — P. 621–632.
3. *Borachok I., Chapko R., Palianytsia O.* On the numerical solution of a parabolic Fredholm integro-differential equation by the RBF method // Results in Applied Mathematics. — 2025. — Vol. 26. — P. 1–11.

**ON THE WELL-POSEDNESS OF AN INITIAL-BOUNDARY
VALUE PROBLEM FOR A PARABOLIC
INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH A FREDHOLM
INTEGRAL OPERATOR WITH A WEAKLY SINGULAR
KERNEL**

This paper investigates the well-posedness of an initial-boundary value problem for a parabolic integro-differential equation with a spatial Fredholm operator and a weakly singular kernel. Using the Galerkin method, uniform a priori estimates, and the Aubin–Lions theorem, the existence, uniqueness, and continuous dependence on the data of the weak solution in the Sobolev–Bochner spaces are proved. The key difference from the Volterra problem is that the spatial nature of the Fredholm operator allows one to apply the classical theory of linear ODE systems in the Galerkin framework.