

МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ШОРСТКОСТІ НА ЕФЕКТИВНИЙ МОДУЛЬ ЮНГА У ТОНКИХ ПЛІВКАХ

Тарас Нагірний, Костянтин Червінка

ЛНУ імені Івана Франка, Львів, Україна, k.tchervinka@gmail.com
Університет Зеленогурський, Польща, t.nahirnyj@gmail.com

У рамках моделі локально неоднорідного пружного тіла досліджується вплив шорсткості реальної поверхні тіла на ефективний модуль Юнга. За вихідні прийнято співвідношення [1]

$$\frac{d^2 \varrho}{dx^2} - \xi_m^2 (\varrho - \varrho_*) = -\xi_m^2 d_{sm}, \quad (1)$$

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} = 0, \quad \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_{\gamma\gamma} - \frac{\nu}{E} \sigma \right) = -\frac{d^2}{dx^2} (a_m (\varrho - \varrho_*)), \quad \gamma = \{y, z\},$$

що описують одновимірний стаціонарний стан тіла. Тут $\{x, y, z\}$ – декартова система координат, у якій тіло займає область $|x| \leq l$, l – півтовщина шару, ϱ , ϱ_* – густина маси та її значення у середовищі, матеріал якого ідентичний матеріалу тіла, $\sigma_{\gamma\gamma}$ – нормальні компоненти тензора напружень ($\gamma = \{x, y, z\}$), $\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}$, E, ν – локальні модуль Юнга і коефіцієнт Пуасона, ξ_m, a_m – сталі, d_{sm} – функція, що враховує джерела маси, для якої прийнято [2]

$$d_{sm} = -\varrho_* \left\{ a \left[\exp \left(-(\xi_s (l+x))^k \right) + \exp \left(-(\xi_s (l-x))^k \right) \right] + b \frac{\text{ch } \xi_{sd} x}{\text{ch } \xi_{sd} l} \right\}, \quad (2)$$

де $a + b = 1$, k, ξ_s, ξ_{sd} – сталі параметри. Ця формула враховує особливості профілю шорсткості реальної поверхні тіла, зокрема області піків та впадин, а також основної зони кривої опорної поверхні.

Наведені рівняння доповнюємо крайовими умовами на поверхнях тіла $x = \pm l$ та умовами на головний вектор та момент у довільному поперечному перерізі тіла, що відповідають одноосному розтягу шару у напрямку осі Ox .

Приймаємо також, що модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона залежать від густини тіла

$$E = E_* \left(\frac{\rho}{\rho_*} \right)^{\beta_E}, \quad \nu = \nu_* \left(1 - \beta_\nu \left(1 - \frac{\rho}{\rho_*} \right) \right). \quad (3)$$

На основі одержаного розв'язку вивчено залежність ефективного модуля Юнга E^{ef} від параметрів матеріалу та параметрів, що характеризують профіль шорсткості реальної поверхні тіла. На рисунках 1 та 2 показано залежність ефективного модуля Юнга E^{ef} від товщини шару (розмірний ефект) та

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2026»,
27–29 травня 2026 р., Львів**

залежність від параметра ξ_s/ξ_m . Криві на рис. 1 відповідають $\nu_* = 0.33, k = 2, \xi_{sd}/\xi_m = 0.08, \xi_s/\xi_m = 0.8$; 0.2 (лінії 1,2), $a = 0.5$ (суцільні лінії) і $a = 1$ (пунктирні лінії) та описують розмірний ефект ефективного модуля Юнга E^{ef} . Крива 3 відповідає $k = 1$ (нехтуємо областю піків кривої опорної поверхні). Криві на рис. 2 відповідають $\nu_* = 0.33, k = 2, \xi_m l = 20, \xi_s/\xi_m = 0.2; 0.4; 0.8$ (лінії 1,2,3).

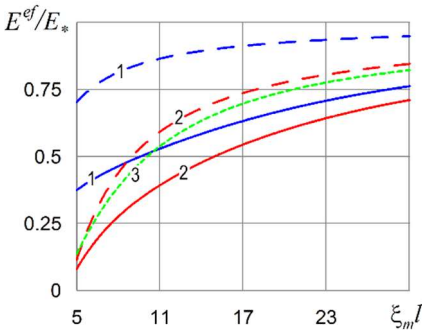


Рис. 1.

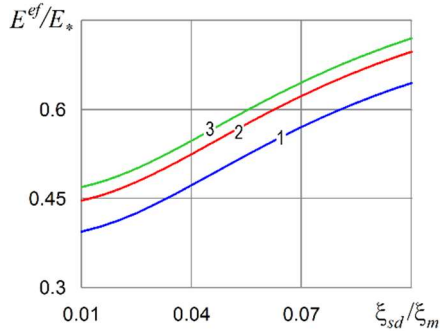


Рис. 2.

Ефективний модуль Юнга у тонких плівках відображає властивості реальної шорсткої поверхні тіла. Йому властивий розмірний ефект: зі збільшенням товщини плівки його значення монотонно зростає до значення модуля Юнга матеріалу. Характерні розміри цього ефекту зумовлені структурною неоднорідністю матеріалу та параметрами профілю шорсткості поверхні.

1. *Nahirnyj T, Sqsiaiek M, Tchervinka K.* Modeling the effect of surface roughness on mechanical fields in an elastic solid bounded by nominally flat surfaces // *International Journal of Solids and Structures.* – 2024. – **302.** – 112979.
2. *Нагірний Т. С., Червінка К. А.* Основи механіки локально неоднорідних деформівних твердих тіл. – Львів: Растр-7, 2018. – 204 с.

**MODELING THE ROUGHNESS EFFECT ON THE EFFECTIVE
YOUNG'S MODULUS IN THIN FILMS**

Within the framework of a locally inhomogeneous elastic body model, the effect of real surface roughness on the effective Young's modulus is investigated. The formulation incorporates spatial variations of local elastic properties associated with density fluctuations and mass sources, allowing one to quantify size-dependent effects and to evaluate how surface morphology alters the effective elastic response of thin layers.