

УДК 517.95

ПОБУДОВА ФУНКЦІЇ ГРІНА ДЛЯ ОДНІЄЇ ДВОШАРОВОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З ЛІНІЙНИМИ УМОВАМИ СПРЯЖЕННЯ

Михайло Митрофанов, Іван Савка

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, ivan.savka@pnu.edu.ua

У багатьох практичних задачах теплопровідності для багат шарових середовищ система зазнає періодичного внутрішнього впливу або періодично змінних зовнішніх умов. У таких випадках класичні початкові умови втрачають фізичний зміст, оскільки еволюція системи веде до сталого періодичного режиму, який не залежить від початкового стану.

Нехай $\Omega = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\mathcal{D} = (x_0, x_2)$ – інтервал дійсної прямої \mathbb{R} , $\mathcal{D}_1 = (x_0, x_1)$, $\mathcal{D}_2 = (x_1, x_2)$, $u_j = u_j(x, t)$, $j = 1, 2$; $\mathbf{H}_q = \mathbf{H}_q(\Omega)$, $q \in \mathbb{R}$, – простір Соболева всіх тригонометричних рядів $\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_k \exp(ikt)$ із

скінченною нормою $\|\varphi; \mathbf{H}_q\| = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|)^{2q} |\varphi_k|^2}$; $\mathbf{C}^n(\mathcal{D}; \mathbf{H}_q)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, –

простір функцій $u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k(x) \exp(ikt)$, $u_k(x) \in \mathbf{C}^n(\mathcal{D})$, таких, що

для кожного фіксованого $x \in \mathcal{D}$ функції $\partial^j u / \partial x^j \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k^{(j)}(x) \exp(ikt)$,

$0 \leq j \leq n$, належать до простору $\mathbf{H}_{q-j/2}$ і як елементи цього простору є неперервними за t на \mathcal{D} ; норму в просторі $\mathbf{C}^n(\mathcal{D}; \mathbf{H}_q)$ задаємо формулою

$\|u; \mathbf{C}^n(\mathcal{D}; \mathbf{H}_q)\| = \sum_{j=0}^n \max_{x \in \mathcal{D}} \|\partial^j u(x, \cdot) / \partial x^j; \mathbf{H}_{q-j/2}\|$.

В області $\mathcal{D} \times \Omega$ для $u = (u_1, u_2)$ розглядається двошарова періодична за часом задача спряження для неоднорідних рівнянь теплопровідності з однорідними крайовими умовами

$$L_j u_j \equiv \frac{\partial u_j}{\partial t} - \alpha_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = f_j(t, x), \quad (x, t) \in \mathcal{D}_j \times \Omega, \quad j = 1, 2. \quad (1)$$

$$\left(\nu_1 u_1 + \nu_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_0} = 0, \quad \left(\nu_3 u_2 + \nu_4 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \Big|_{x=x_2} = 0, \quad t \in \Omega, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_{1-}} h_1 u_1 = \lim_{x \rightarrow x_{1+}} h_2 u_2, \quad \lim_{x \rightarrow x_{1-}} \kappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow x_{1+}} \kappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad t \in \Omega, \quad (3)$$

де $\alpha_j, h_j, \kappa_j \in \mathbb{R}_+$, $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \in \mathbb{R}$, $|\nu_1| + |\nu_2| \neq 0$, $|\nu_3| + |\nu_4| \neq 0$, $f_j \in \mathbf{C}(\overline{\mathcal{D}_j}; \mathbf{H}_{q-1})$, $j = 1, 2$, $q \in \mathbb{R}$ – довільне фіксоване. Умови (3) узагальнюють класичні умови неперервності, вводячи лінійний зв'язок між температурами по обидва боки інтерфейсу. Такі умови можуть враховувати

тепловий опір або наявність контактного шару між двома середовищами, фактично моделюючи додатковий тепловий бар'єр на межі розділу.

Розклад у ряд Фур'є за часовими гармоніками зводить задачу (1)–(3) до зліченної сім'ї крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, що параметризується цілим індексом k . Для кожного такого k визначається та будується відповідна функція Гріна $G_k(x, \xi)$ двошарової задачі [5], існування якої залежить від властивостей характеристичного визначника $\Delta(k)$. Це дозволяє отримати точний аналітичний розв'язок вихідної задачі (1)–(3) з компонентами у вигляді формальних рядів

$$u_j(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_{x_0}^{x_2} G_k(x, \xi) f_k(\xi) d\xi \right) e^{ikt}, \quad x \in \overline{\mathcal{D}}_j, \quad j = 1, 2,$$

який включають повний спектр часових гармонік, а також встановити достатні умови гладкості на вхідні дані f_1 і f_2 , за яких ці ряди збігаються в нормі відповідних просторів Соболева $\mathbf{C}^2(\overline{\mathcal{D}}_j; \mathbf{H}_q)$.

1. Carslaw H.S., Jaeger J.C. Conduction of Heat in Solids. – Oxford: Clarendon Press. 1959.
2. Hahn D. W., Ozisik M. N. Heat Conduction. – New York: Wiley, 2012.
3. Lu Xiaoshu, Thanh Viljanen M. A new analytical method to simulate heat transfer process in buildings // Applied Thermal Engineering. – 2006. – 26. – pp. 1901-1909.
4. Chiba R. An analytical solution for transient heat conduction in a composite slab with time-dependent heat transfer coefficient // Math. Probl. Eng. – 2018. – ID 4707860.
5. Melnikov Yu., Borodin V. Green's Functions. Potential Fields on Surfaces. – Springer Cham. 2017.
6. Umbricht G., Rubio D., Tarzia D. Bilayer one-dimensional Convection–Diffusion–Reaction–Source problem: Analytical and numerical solution // International Journal of Thermal Sciences, 208. – 2025. – 109471.

GREEN'S FUNCTION CONSTRUCTION FOR A TWO-LAYER HEAT CONDUCTION PROBLEM WITH LINEAR CONJUGATION CONDITIONS

The Fourier series expansion in temporal harmonics reduces the problem to a countable family of boundary value problems for ODEs with characteristic determinant $\Delta(k)$, parameterized by an integer index k . For each k , the corresponding Green's function of the two-layer problem is defined and constructed. Its existence depends on the properties of the determinant $\Delta(k)$. This allows one to obtain an exact analytical solution of the original problem and to establish sufficient smoothness conditions on the input data under which this solution belongs to the corresponding Sobolev spaces.