

УДК 517.954

ОСОБЛИВОСТІ АНАЛІТИЧНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ДЕЯКОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНОГО МОДИФІКОВАНОГО РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Денис Куціль

ЛНУ імені Івана Франка, denis.kutsil@gmail.com)

Різноманітні важливі задачі в науці та інженерії зводяться до розв'язання рівняння

$$\Delta u - k^2 u = f, \quad (1)$$

за відповідних граничних умов. Це рівняння називається модифікованим рівнянням Гельмгольца. Воно виникає, наприклад, у градієнтних теоріях пружності із внутрішньою довжиною (параметр $1/k$), при описі фільтрації, дифузії та теплопровідності, при напівнеявній часовій дискретизації рівняння рівнянь Нав'є-Стокса ($1/k$ пропорційне до кроку за часом), у лінеаризованому рівнянні Пуассона-Больцмана, у задачах обробки сигналів і зображень та у численних інших задачах.

Оператор модифікованого рівняння Гельмгольца є строго еліптичним і коерцитивним, тому крайові задачі для нього, на відміну від класичного рівняння Гельмгольца, добре поставлені майже у всіх стандартних постановках [1]. Разом із тим, залишаються актуальними задачі практичного відшукування та побудови розв'язку [2], зокрема інтерес становить пошук методів швидкої побудови розв'язку для різних потреб, а також дослідження його залежності від крайових умов та вигляду неоднорідної частини рівняння.

Розглянемо одновимірну крайову задачу для цього рівняння у півбезмежній області $x \geq 0$. При $x = 0$ задаємо умову Діріхле, а на безмежності – умову обмеженості розв'язку. У [3] отримано аналітичний розв'язок цієї задачі у вигляді

$$u(x) = u(0)e^{-kx} - \frac{1}{2k}e^{kx} \int_x^{+\infty} f(t)e^{-kt} dt + \frac{1}{2k}e^{-kx} \left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-kt} dt - \int_0^x f(t)e^{kt} dt \right) \quad (2)$$

Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2026», 27–29 травня 2026 р., Львів

проте не обговорено питання збіжності невластивих інтегралів у цьому виразі, а також властивості розв'язку у залежності від властивостей функції $f(x)$.

Зокрема, важливим є встановлення достатніх умов на функцію $f(x)$, що гарантують збіжність інтегралів у (2), а також дослідження гладкості та асимптотичної поведінки розв'язку при $x \rightarrow +\infty$. Ці питання безпосередньо пов'язані з коректністю задачі та фізичною інтерпретацією отриманих результатів.

У рамках дослідження уточнено функціональний клас, у якому розглядається розв'язок, та проаналізовано його залежність від вхідних даних. Також досліджено збіжність отриманих інтегральних виразів шляхом встановлення достатніх умов на праву частину $f(x)$ та обґрунтовано коректність переходів до невластивих інтегралів. Проведено порівняння чисельних досліджень шляхом побудови графіку розв'язку задачі за допомогою різних програмних продуктів та за різних умов на межі й різних функцій $f(x)$ (що прямують до нуля на безмежності).

Подальші дослідження можуть бути спрямовані на узагальнення розглянутої задачі на випадок одновимірної задачі у циліндричних та сферичних координатах, випадок багатовимірних областей та складнішої геометрії, а також на розширення класу допустимих правих частин $f(x)$, включно з розривними функціями. Перспективним є дослідження аналогічних крайових задач для нелінійних модифікацій рівняння Гельмгольца, а також аналіз впливу різних типів граничних умов на структуру розв'язку. Окремий інтерес становить побудова та обґрунтування чисельних методів, що узгоджуються з отриманими аналітичними результатами.

1. *Gilbarg D., Trudinger N. S., Gilbarg D., Trudinger N. S.* Elliptic partial differential equations of second order. – Berlin: Springer, 1998.
2. *Kropinski M. C. A., Quaife B. D.* Fast integral equation methods for the modified Helmholtz equation // Journal of Computational Physics. – 2011. – **230**(2). – P. 425-434.
3. *Nahirnyj T., Sqsiaadek M., Tchervinka K.* Modeling the effect of surface roughness on mechanical fields in an elastic solid bounded by nominally flat surfaces // International Journal of Solids and Structures. – 2024. – **302**. – P. 112979.

ON THE ANALYTICAL SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE INHOMOGENEOUS MODIFIED HELMHOLTZ EQUATION

An explicit solution to a one-dimensional boundary value problem for the inhomogeneous modified Helmholtz equation in a semi-infinite domain is studied. Sufficient conditions for convergence of the associated improper integrals are established, and the dependence of the solution on the source term is analyzed. Regularity and asymptotic behavior are also discussed.

<http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2026>