Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2026»,
27–29 травня 2026 р., Львів

УДК 517.988

ЗБІЖНІСТЬ МЕТОДУ ОПЕРАТОРНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ З СУМОВНИМИ ПОХИБКАМИ

Анна Кравець, Володимир Семенов

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
kravets-anna@knu.ua, semenov.volodya@gmail.com

Доповідь присвячена аналізу методу операторної екстраполяції при його реалізації з неточними ітераціями (що можуть бути спричинені неповною інформацією про задачу чи обчислювальними похибками). За умови сумовності ряду похибок було встановлено слабку збіжність неточного методу.

Задача полягає у знаходженні розв'язку класичної варіаційної нерівності (ця задача має численні застосування [1-5]). Нехай H – дійсний гільбертовий простір зі скалярним добутком $\langle\cdot,\cdot$ та породженою нормою $\|\cdot\|$. Необхідно

$$\text{знайти } x \in C: \quad \langle Vx, y - x \;\; \geq 0 \;\; \forall\, y \in C, \tag{1}$$

де C – непорожня опукла та замкнена підмножина простору H, $V: H \to H$ – монотонний та ліпшицевий (зі сталою $L > 0$) оператор. Множину розв'язків (1) позначимо через S та припускатимемо, що S непорожня. За P_C – позначатимемо оператор метричного проектування H на C.

Алгоритм операторної екстраполяції (також відомий як «forward-reflected-backward») був досліджений у роботі [6]. Ми розглядаємо його модифікацію з неточними ітераціями.

Алгоритм 1. *Обираємо* $x_0 = x_1 \in H$, $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2L}\right)$. *Далі генеруємо послідовність* $(x_n) \subset H$: *для* $n \geq 1$ *обчислюємо* x_{n+1}, *що задовольняє:*

$$\left\| x_{n+1} - P_C\big(x_n - \lambda(2Vx_n - Vx_{n-1})\big) \right\| \leq \Delta_n.$$

Припускаємо, що $\sum_n \Delta_n = \Delta < +\infty$ *(сумовність похибок).*

Для цього алгоритму була встановлена наступна лема.

Лема. *Для послідовності* (x_n), *що породжена алгоритмом 1, виконується нерівність*

$$\|x_{n+1} - z\|^2 + 2\lambda\langle Vx_n - Vx_{n+1}, x_{n+1} - z \;\; + \lambda L\|x_{n+1} - x_n\|^2 \leq$$
$$\leq \|x_n - z\|^2 + 2\lambda\langle Vx_{n-1} - Vx_n, x_n - z \;\; + \lambda L\|x_n - x_{n-1}\|^2 -$$

$$-(1-2\lambda L)\|x_{n+1}-x_n\|^2+E_n, \qquad (2)$$

де $z \in S,\ E_n = O(\Delta_n)$.

При доведенні леми було розлянуто аналог функцій Ляпунова, а саме послідовності:

$$W_{n+1} = \|x_{n+1}-z\|^2 + 2\lambda\langle Vx_n - Vx_{n+1}, x_{n+1}-z \ + \lambda L\|x_{n+1}-x_n\|^2,$$

$$\mathrm{W}_1 = \|x_0 - z\|^2,$$

$$\overline{W}_{n+1} = \left\|x_{n+1}-z\right\|^2 + 2\lambda\langle Vx_n - Vx_{n+1}, x_{n+1}-z \ + \lambda L\left\|x_{n+1}-x_n\right\|^2,$$

де $x_{n+1} = P_C\left(x_n - \lambda(2Vx_n - Vx_{n-1})\right)$ – це результат виконання точного кроку методу операторної екстраполяуії. Було показано обмеженість послідовностей $\left(\left\|x_{n+1}-x_n\right\|\right), \left(\left\|x_{n+1}-z\right\|\right), (\overline{W}_n), (W_n)$ та встановлено зазначену в лемі нерівність.

За допомогою даної леми було встановлено факт слабкої збіжності послідовності (x_n), згенерованої алгоритмом 1 до точки з множини S, тобто до розв’язку варіаційної нерівності (1).

1. *Kinderlehrer D., Stampacchia G.* An introduction to variational inequalities and their applications. – New York: Academic Press, 1980. – 313 c.
2. *Baiocchi C., Capelo A*. Variational and Quasivariational Inequalities: Applications to Free Boundary Problems. – New York: John Wiley & Sons, 1984. – 462 c.
3. *Alber Y., Ryazantseva I.* Nonlinear Ill-posed Problems of Monotone Type. – Dordrecht:Kluwer Academic Publishers, 2006. – 410 c.
4. *Nagurney A.* Network Economics. – Boston, MA:Springer US, 1999. – 416 c.
5. *Gidel G., Berard H., Vincent P., Lacoste-Julien S. A.* Variational Inequality Perspective on Generative Adversarial Nets // ArXiv. – 2018. – abs/1802.10551.
6. *Malitsky Y., Tam M. K.* A Forward-Backward Splitting Method for Monotone Inclusions Without Cocoercivity // SIAM Journal on Optimization. – 2020. – Вип. 30, № 2. – С. 1451–1472.

CONVERGENCE OF THE OPERATOR EXTRAPOLATION METHOD IN THE PRESENCE OF SUMMABLE ERRORS

The report considers a variant of the operator extrapolation method with an inaccurate implementation of the step. It is assumed that the error sequence is summable. Weak convergence is established for variational inequalities with monotone and Lipschitz-continuous operators acting on a Hilbert space.