

ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ВСТАНОВЛЕННЯ ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ ШОРСТКОСТІ ВНУТРІШНІХ ПОВЕРХОНЬ КОНЦЕНТРАТОРІВ НАПРУЖЕНЬ

Андрій Гавриляк¹, Микола Кузін²

1, 2 - Національний університет «Львівська політехніка»,
1 - andriy.g.havrylyak@lpnu.ua, 2 - mykola.o.kuzin@lpnu.ua

Однією із особливостей сучасної інженерії, є широке використання деталей, що містять різноманітні концентратори напружень. При функціонуванні таких виробів дані концентратори можуть суттєво спотворювати напружений стан в локальних зонах, що у свою чергу впливає на надійність всієї конструкції. Актуальність цієї проблеми як з позицій теоретичних досліджень, так і прикладних питань висвітлена в багатьох публікаціях. І через практичну затребуваність, об'єм публікацій із даних досліджень є таким, що постійно зростає [1].

Разом із тим задачі математичного моделювання із дослідження впливу топології поверхні концентраторів на працездатність виробів на даний момент практично не представлені.

Для встановлення впливу шорсткості поверхні концентратора напружень на надійність виробу запропонуємо наступну постановку задачі.

Прийmemo, що в досліджуваній області присутній геометричний концентратор напружень (Z), загальна топологія поверхні якого ∂Z характеризується наступною суперпозицією функцій, що описують його геометрію на різних розмірних (масштабних) рівнях:

$$f(x) = f_1(x) \circ f_2(x) \circ \dots \circ f_n(x), \quad (1)$$

де $f_i(x)$ - функція рівня гладкості 0 і вище, яка описує геометрію поверхні на i -тому масштабному рівні, \circ - символ суперпозиції, $x \in \partial Z$.

Також додатково прийmemo, виходячи із фізичних міркувань, що на функції $f_i(x)$ є накладені обмеження виду:

$$Q_i^1(x) \leq f_i(x) \leq Q_i^2(x), \quad x \in \partial Z. \quad (2)$$

В результаті зовнішніх впливів в деталі формується поле переміщень, деформацій та напружень.

Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2026», 27–29 травня 2026 р., Львів

Оскільки параметри напруженого стану однозначно не визначають працездатність деталей, для аналізу міцності тіла в локальній зоні використаємо наступний вираз, який назвемо точковою міцністю конструкції:

$$k(x) = 1 - \sigma_*(x) / \sigma_0(x), \quad (3)$$

де $k(x)$ - коефіцієнт запасу міцності, $\sigma_*(x)$ - скалярний еквівалент тензора напружень у формі Мізеса, $\sigma_0(x)$ - скалярний міцністний еквівалент матеріалу.

Прийmemo, що критерію оптимальності функціонування деталі відповідає найбільше інтегральне значення виразу $k(x)$:

$$L = \int_V k(x) dx \rightarrow \max, \quad (4)$$

де V - об'єм досліджуваної області.

Функціонал (4) залежить від крайових умов, властивостей матеріалу та топології поверхні концентратора:

$$L \equiv L(K(x), G(x), \{f_1(x), \dots, f_n(x)\}). \quad (5)$$

В результаті задача встановлення впливу шорсткості поверхні концентраторів, буде полягати у визначенні функцій $f_1(x), \dots, f_n(x)$, які забезпечують максимізацію функціонала (4) з врахуванням обмежень (2).

При розв'язуванні даної задачі у випадку дослідження впливу кругового концентратора напружень було встановлено, що для даного типу концентратора напружень існує оптимальне значення шорсткості внутрішньої поверхні на рівні $0.7..0.8 \cdot 10^{-6}$ м, при якому зростає інтегральна міцність конструкції (функціонал L). Тобто, для того, щоб підвищити працездатність деталей, що мають внутрішні концентратори напружень, необхідно забезпечувати оптимальний рівень шорсткості їх внутрішніх поверхонь.

1. *Murakami, Y.* Theory of Elasticity and Stress Concentration, John Wiley & Sons, (2017).

VARIATIONAL FORMULATION OF THE PROBLEM OF ESTABLISHING OPTIMAL ROUGHNESS PARAMETERS OF THE INTERNAL SURFACES OF STRESS CONCENTRATORS

A variational formulation of the problem is given to establish the optimal parameters of the roughness of the inner surfaces of stress concentrators. For circular-type stress concentrators, it was found that there is an optimal value of the roughness of the inner surface at the level of $0.7..0.8 \cdot 10^{-6}$ m, at which the operational reliability of parts with this type of concentrator increases significantly.

<http://www.iapmm.lviv.ua/chyt2026>