The conference of young scientists «Pidstryhach readings – 2026»
May 27–29, 2026, Lviv

UDC 519.642

ADAPTIVE NEWTON METHOD WITH CHEBYSHEV INTERPOLATION FOR IMPROVED ACCURACY

Daniil Doroshenko

Oles Honchar Dnipro National University,
daniil.e.doroshenko@gmail.com

The paper proposes a combined numerical approach based on Chebyshev interpolation and an adaptive Newton method for solving nonlinear equations. The connection between interpolation error and iterative stability is used to improve accuracy and convergence.

Let $f \in C^{n+1}[a,b]$. The interpolation polynomial $P_n(x)$ satisfies

$$P_n(x_k) = f(x_k), \quad k = 0, \ldots, n. \tag{1}$$

In Lagrange form,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \prod_{j \neq k} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

The interpolation error is given by [1]

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{k=0}^{n} (x - x_k), \quad \xi \in [a,b]. \tag{2}$$

Let $\omega_{n+1}(x) = \prod_{k=0}^{n}(x - x_k)$. Then the error estimate reads

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} |\omega_{n+1}(x)|.$$

As shown in [2], the magnitude of $\omega_{n+1}(x)$ strongly depends on the choice of nodes. The optimal Chebyshev nodes are given by

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right). \tag{3}$$

Consider the nonlinear equation $f(x) = 0$. Newton method is defined as

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}, \tag{4}$$

while its adaptive modification proposed in (4) takes the form

$$x_{m+1} = x_m - \alpha_m \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}, \quad 0 < \alpha_m \leq 1. \tag{5}$$

To improve numerical stability, the function is approximated by the interpolation polynomial $f(x) \approx P_n(x)$, which leads to the modified iteration scheme

$$x_{m+1} = x_m - \alpha_m \frac{P_n(x_m)}{P_n'(x_m)}. \tag{6}$$

where the derivative is computed analytically as

$$P_n'(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_k'(x).$$

This allows the parameter α_m to be linked with the interpolation accuracy, improving the stability of the iterative process. As established in [1] and [2], both interpolation node selection and adaptive iterative strategies significantly influence convergence behavior and numerical stability.

Thus, the combination of Chebyshev interpolation and the adaptive Newton method provides both improved approximation accuracy and enhanced stability.

Conclusions. The proposed approach combines optimal node selection with adaptive iterative control, where the interpolation structure indirectly influences the convergence dynamics. This leads to higher accuracy and stability in solving nonlinear equations without increasing computational complexity, while preserving the efficiency of standard Newton-type iterations.

1. Doroshenko D.E. Method of approximating the roots of nonlinear equations with an adaptive step. Proc. of the Intern. Conf. "Innovative Research in Science", Brussels, Belgium, April 1–3, 2026, 303–305. - DOI: https://doi.org/10.70286/isu-01.04.2026.017

2. Doroshenko D.E. Approximation of functions by Chebyshov interpolation polynomials with increased accuracy. Proc. of the Intern. Conf. "The Future of Science and Technology", Sofia, Bulgaria, April 8–10, 2026, 342–344. - DOI: 10.70286/ISU-08.04.2026.011

АДАПТИВНИЙ МЕТОД НЬЮТОНА З ЧЕБИШОВСЬКОЮ ІНТЕРПОЛЯЦІЄЮ ДЛЯ ПІДВИЩЕННЯ ТОЧНОСТІ

У роботі запропоновано комбінований чисельний підхід для розв'язання нелінійних рівнянь, який базується на інтерполяції Чебишова та адаптивному методі Ньютона. Для підвищення обчислювальної стабільності досліджувану функцію апроксимовано інтерполяційним многочленом на оптимальних чебишовських вузлах, що дає змогу пов'язати параметр адаптивного кроку з точністю інтерполяції. Показано, що таке поєднання забезпечує вищу точність наближення та покращену стійкість ітераційного процесу. Запропонований підхід дозволяє ефективно знаходити розв'язки без збільшення обчислювальної складності алгоритму