**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2026»,
27–29 травня 2026 р., Львів**

УДК 517.958:532.72

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЇ ДОМІШКИ У ВИПАДКОВО НЕОДНОРІДНІЙ СМУЗІ ЗА ДІЇ ВНУТРІШНІХ ДЕТЕРМІНОВАНИХ ДЖЕРЕЛ МАСИ

Юрій Чернуха

Національний університет «Львівська політехніка», yurii.a.chernukha@lpnu.ua

Нехай домішкова речовина дифундує у багатофазному випадково неоднорідному тілі, яке складається з $N+1$ твердих, різних за густиною та коефіцієнтом дифузії фаз – матриці і включень довільної форми. Вважаємо, що об'ємна частка матриці v_0 є набагато більшою, ніж об'ємні частки включень v_j ($j=1,\ldots,N$). [1] Густина тіла та коефіцієнт дифузії є сталими в об'ємі кожної фази. У тілі діють внутрішні детерміновані джерела маси $\sigma_{mj}(\vec{r},t)$ ($\vec{r}=(x,y,z)$).

Рівняння на концентрації $c_i(\vec{r},t)$ домішкової речовини в матриці Ω_0 і включеннях Ω_j , $j=1,\ldots,N$, сформульовані для кожної фази окремо

$$\rho_j \frac{\partial c_j(\vec{r},t)}{\partial t} = D_j \Delta c_j(\vec{r},t) + \sigma_{mj}(\vec{r},t)\,,\ \vec{r}\in\Omega_j\,,\ t\in[0,\theta],\ \theta<\infty\,. \tag{1}$$

Тут ρ_j – густина j-ї фази; D_j – кінетичний коефіцієнт перенесення домішки в Ω_j .

Задані початкові та граничні умови першого роду:

$$c_0(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in\delta V} = \tilde{c}(t)\,,\quad c_j(\vec{r},t)\Big|_{t=0} = \hat{c}_j(\vec{r})\,,\quad j=0,\ldots,N\,, \tag{2}$$

де δV – зовнішня границя тіла.

На границях контакту областей Ω_{ji} ($j=0,\ldots,N$, $i=1,\ldots,N_j$, N_j - кількість однозв'язних областей у фазі j) виконуються умови неідеального контакту щодо випадкового поля концентрації [2]

$$a_j c_j(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in S_{ji}-0} = a_i c_i(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in S_{ji}+0}\,;$$

$$\rho_j D_j \vec{\nabla} c_j(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in S_{ji}-0} = \rho_i D_i \vec{\nabla} c_i(\vec{r},t)\Big|_{\vec{r}\in S_{ji}+0}\,, \tag{3}$$

де a_j , a_i - кінетичні коефіцієнти, які визначають величину стрибка поля концентрації на границях контакту, S_{ji} – межа i -ї однозв'язної області j -ї фази.

Для побудови розв'язку контактно-крайової задачі (1)-(3) отримано рівняння масоперенесення для стохастичного поля концентрації в усьому тілі. Одержану крайову задачу зведено до еквівалентного інтегро-диференціального рівняння з випадковим ядром, розв'язок якого знайдено у вигляді ряду Неймана. Для його дослідження застосована техніка діаграм Фейнмана. Отримано рівняння Дайсона для усередненого поля концентрації $\left\langle c(\vec{r},t)\right\rangle$:

$$\left\langle c(\vec{r},t)\right\rangle = c^{\hom}(\vec{r},t) + F(\vec{r},t) + \int_0^t \iiint_V G(\vec{r},\vec{r}',t,t')\Sigma(\vec{r}',t')\left\langle c(\vec{r}',t')\right\rangle d\vec{r}'dt' , \quad (4)$$

$$F(\vec{r},t) = \int_0^t \iiint_V G(\vec{r},\vec{r}',t,t')\sigma_m(\vec{r}',t') \; d\vec{r}'dt' ,$$

де $c^{\hom}(\vec{r},t)$ - розв'язок однорідної крайової задачі, $G(\vec{r},\vec{r}',t,t')$ - детермінована функція Гріна, $\Sigma(\vec{r}',t')$ - ядро масового оператора.

На основі рівняння (4) досліджено усереднені поля концентрації мігруючої речовини за дії різних типів джерел маси, а саме просторово розподілених: діє поодиноке точкове джерело, сукупність декількох точкових джерел, джерело на одному та двох інтервалах, і часо́во розподілених: діє імпульсне у дискретні часові моменти джерело та стале джерело на визначеному часовому інтервалі.

1. *Atkins P., de Paula J., Keeler J.* Physical Chemistry. 11th ed. – Oxford University Press. Oxford, UK, 2018. – 908 pp.
2. *Chernukha O., Chuchvara A., Bilushchak Y., Pukach P., Kryvinska N.* Mathematical modelling of diffusion flows in two-phase stratified bodies with randomly disposed layers of stochastically set thickness // Mathematics. – 2022. Vol. 10. Art. 3650.

MATHEMATICAL MODELING OF IMPURITY DIFFUSION IN A RANDOMLY INHOMOGENEOUS STRIP UNDER THE ACTION OF INTERNAL DETERMINISTIC MASS SOURCES

This study examines impurity diffusion in a multiphase randomly inhomogeneous medium in the presence of internal deterministic mass sources. The solution is constructed in the form of a Neumann series, and Feynman diagram techniques are used to derive the Dyson equation for the averaged concentration field. Particular cases of the obtained equation are analyzed for different types of internal mass sources.