Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2026»
27–29 травня 2026 р., Львів

УДК 519.85

АЛГОРИТМ ГАЛЬПЕРНА З УСЕРЕДНЕННЯМ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ НЕРУХОМОЇ ТОЧКИ ФЕЙЄРІВСЬКОГО ОПЕРАТОРА

Владислава Чернорай, Володимир Семенов

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
vlada2002vlada2001@gmail.com, semenov.volodya@gmail.com

Фейєрівські (квазінерозтягуючі) оператори та породжені ними ітераційні процеси мають велике значення в оптимізаційній алгоритмиці.

В повідомленні розглянуто задачі пошуку нерухомих точок фейєрівських (квазінерозтягуючих) операторів, що діють у гільбертовому просторі, та варіаційні нерівності на множині нерухомих точок. Доведемо сильну збіжність алгоритму Гальперна з усередненням (алгоритму Гальперна-Сузукі) знаходження нерухомих точок фейєрівських операторів.

Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина.

Оператор $T : H \to H$ називають фейєрівським (квазінерозтягуючим), якщо $F(T) = \{x \in H : \ x = Tx\} \neq \emptyset$ та

$$\|Tx - z\| \leq \|x - z\| \quad \forall z \in F(T) \quad \forall x \in H.$$

Розглянемо задачу:

$$\text{знайти} \ \ x \in F(T), \tag{1}$$

де $T : C \to H$ — фейєрівський оператор.

Нехай $\alpha_n \in (0,1)$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = +\infty$. Розглянемо усереднені оператори

$$T_{\lambda_n} = \lambda_n I + (1 - \lambda_n) T,$$

де $\lambda_n \in [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}] \subseteq (0,1)$.

Для розв'язання задачі (1) використовуємо

Алгоритм 1. Алгоритм Гальперна-Сузукі. *Обираємо* $a \in H$, $x_1 \in C$, *генеруємо послідовність елементів* (x_n) *за допомогою ітераційної схеми*

$$x_{n+1} = P_C\left(\alpha_n a + (1 - \alpha_n) T_{\lambda_n} x_n\right).$$

Дослідження збіжності алгоритму 1 у класі нерозтягуючих операторів має довгу історію. Принципові результати отримано в роботах B. Halpern [1], P.-L. Lions [2], R. Wittmann [3], H.K. Xu [4], T. Suzuki [5] та F. Lieder [6].

Наша мета — доведення сильної збіжності алгоритму 1 для фейєрівських операторів $T : C \to H$ з демізамкненим в 0 оператором $I - T$.

Має місце

Лема 1. *Згенерована алгоритмом 1 послідовність (x_n) обмежена.*

Доведення сильної збіжності алгоритму 1 грунтується на такій лемі.

Лема 2. *Для $z = P_{F(T)}a$ та послідовності (x_n) виконується нерівність*

$$\|x_{n+1} - z\|^2 - \|x_n - z\|^2 + \alpha_n \|x_n - z\|^2 + \\ + (1 - \alpha_n)\lambda_n(1 - \lambda_n) \|x_n - Tx_n\|^2 \le 2\alpha_n (a - z, y_n - z) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

де $y_n = \alpha_n a + (1 - \alpha_n)T_{\lambda_n} x_n$.

Сформулюємо основний результат.

Теорема 1. *Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — непорожня опукла замкнена множина, $T : C \to H$ — фейєрівський оператор, оператор $I - T$ — демізамкнений в 0, $a \in H$. Тоді згенерована алгоритмом 1 послідовність (x_n) сильно збігається до точки $z = P_{F(T)}a$.*

1. Halpern B. Fixed points of nonexpanding maps. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. 73. P. 957–961.
2. Lions P.-L. Approximation de points fixes de contractions. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. A-B.* 1977. 284. P. A1357–A1359.
3. Wittmann R. Approximation of fixed points of nonexpansive mappings. *Arch. Math.* 1992. 58. P. 486–491.
4. Xu H.K. Another control condition in an iterative method for nonexpansive mappings. *Bull. Austral. Math. Soc.* 2002. 65 P. 109–113.
5. Suzuki T. A sufficient and necessary condition for Halpern-type strong convergence to fixed points of nonexpansive mappings. *Proc. of the AMS.* 2007. V. 135. N. 1. P. 99–106.
6. Lieder F. On the convergence rate of the Halpern-iteration. *Optim Lett.* 2021. Vol. 15. P. 405–418.

HALPERN ALGORITHM WITH AVERAGING FOR APPROXIMATION OF THE FIXED POINT OF THE FEJER OPERATOR

The report considers the problems of finding fixed points of Fejer (quasi-nonexpansive) operators acting in Hilbert space, and variational inequalities on the set of fixed points. Strong convergence of the Halpern algorithm with averaging (the Halpern–Suzuki algorithm) for finding fixed points of Fejer (quasi-nonexpansive) operators is proved.