

УДК 539.3:534.1:629.7

## ЧИСЛОВЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ МОДУЛЯ ЮНГА ТА МОДУЛЯ ЗСУВУ НА КРИТИЧНЕ ЧИСЛО МАХА ФЛАТЕРА КОМПОЗИТНОЇ ПЛАСТИНИ-СМУГИ

Володимир Боднар

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.  
Я. С. Підстригача НАН України, Львів, volodymyrbodnar.97@gmail.com

Флатер тонкостінних елементів авіакосмічних конструкцій є одним із характерних механізмів втрати аеропружної стійкості в надзвуковому потоці. Для композитних пластин-смуг ця задача ускладнюється тим, що зміна схеми армування впливає одночасно на згинальну жорсткість, пов'язану з модулем Юнга  $E$ , і на трансверсальну зсувну жорсткість, пов'язану з модулем зсуву  $G$ . Тому незалежна зміна одного з цих параметрів за фіксованого іншого не завжди коректно описує поведінку реального композиту.

Метою роботи є числове дослідження впливу узгодженої зміни модулів  $E$  та  $G$  на критичне число Маха  $M_{cr}$  флатера шарнірно закріпленої вздовж видовжених ребер композитної пластини-смуги. Розглянуто уточнену детерміновану модель флатера, яка враховує податливість пластини до трансверсального зсуву. Власні форми подано у вигляді

$$w(x, t) = W(x)e^{\Omega t}, \quad \Omega = \delta + i\omega, \quad (1)$$

де  $\delta$  є швидкістю наростання або зникання амплітуди коливань, а  $\omega$  — коловою частотою. Критичне число Маха визначали за переходом системи через межу стійкості, тобто за зміною знака параметра  $\delta$ .

Після підстановки власного подання задача зводиться до характеристичного рівняння для просторових власних значень та системи лінійних алгебраїчних рівнянь для сталих інтегрування. Умова існування нетривіального розв'язку має вигляд

$$\Delta(M, \omega; E, G) = \det A(M, \omega; E, G) = 0, \quad (2)$$

де матриця  $A$  визначається граничними умовами шарнірного закріплення. Для кожного значення числа Маха мінімізували  $|\Delta|$ , а знайдену частоту  $\omega$  використовували як початкове наближення на наступному кроці за  $M$ . Критичне значення  $M_{cr}$  уточнювали методом бісекції.

Як матеріал вибрано склопластик GFRP. Для врахування реальної зміни фізико-механічних характеристик під час переходу від зсувного укладання  $\pm 45^\circ$  до повздовжнього укладання  $0^\circ$  використано лінійну апроксимацію

$$E(\eta) = 12 + 23\eta \text{ ГПа}, \quad G(\eta) = 4.6 - 1.1\eta \text{ ГПа}, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (3)$$

Тут  $\eta = 0$  відповідає зсувному укладанню, а  $\eta = 1$  — укладанню, домінованому повздовжніми волокнами.

Схема укладання	$E$ , ГПа	$G$ , ГПа <sup>c</sup>	$E/G$
Зсувне, $\pm 45^\circ$	12	4.6	2.6
Квазіізотропне	21	4.2	5.0
Доміноване, $0^\circ$	35	3.5	10.0

Числові результати показують, що зі зростанням  $E/G$  критичне число Маха  $M_{cr}$  зростає монотонно. Збільшення модуля Юнга приводить до суттєвого зростання згинальної жорсткості пластини-смуги, тому для виникнення флатера потрібний більший аеродинамічний тиск. Водночас зменшення модуля зсуву  $G$  знижує трансверсальну зсувну жорсткість і діє в протилежному напрямі, сприяючи ранішій втраті стійкості. Для розглянутого GFRP домінантним виявляється вплив згинальної жорсткості, тому загальна тенденція полягає у зростанні  $M_{cr}$ .

Отримана залежність має нелінійний характер із поступовим насиченням: за малих значень  $E/G$  критичне число Маха змінюється швидше, а за великих значень  $E/G$  приріст  $M_{cr}$  сповільнюється. Отже, під час аналізу флатера армованої композитної пластини-смуги модулі  $E$  та  $G$  доцільно розглядати як узгоджені параметри, що змінюються разом зі схемою укладання. У дослідженому діапазоні визначальним є зростання згинальної жорсткості, яке підвищує критичне число Маха і розширює діапазон аеропружної стійкості пластини-смуги.

1. Ashley H., Zartarian G. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician // Journal of the Aeronautical Sciences. – 1956. – Vol. 23, No. 12. – P. 1109–1118.
2. Bodnar V. O., Marchuk M. V., Pakosh V. S. Characteristic equation of the mathematical model of the flutter a plate-strip pliable to transversal shear and its solution algorithm // Applied Problems of Mechanics and Mathematics. – 2024. – Iss. 22. – P. 69–74.
3. Sun Qiaozhen, Xing Yufeng, Liu Bo, Zhang Bocheng, Wang Zekun. Accurate closed-form eigensolutions of three-dimensional panel flutter with arbitrary homogeneous boundary conditions // Chinese Journal of Aeronautics. – 2023. – Vol. 36, No. 1. – P. 266–289.

**NUMERICAL STUDY OF THE INFLUENCE OF YOUNG'S  
MODULUS AND SHEAR MODULUS ON THE CRITICAL  
FLUTTER MACH NUMBER OF A COMPOSITE  
PLATE-STRIP**

*The paper investigates the coupled effect of Young's modulus and shear modulus on the critical flutter Mach number ( $M_{cr}$ ) of a composite plate-strip with hinged edges. A refined deterministic model is used to account for the material's sensitivity to transverse shear. Numerical analysis for a GFRP material shows that  $M_{cr}$  increases monotonically with the growth of the  $E/G$  ratio. Although a decrease in the shear modulus acts to reduce stability, the simultaneous increase in Young's modulus plays a dominant role, leading to an overall expansion of the aeroelastic stability domain*