

УДК 517.518

Наближення класів періодичних функцій багатьох змінних узагальненої мішаної гладкості східчастими гіперболічними сумами Фур'є

Гембарська С. Б., Балабуха В. І., Ковтун А. С.

Волинський національний університет імені Лесі Українки

gembarskaya72@gmail.com, vitia1488.vb@gmail.com,
artem.kovtun.kp71@gmail.com

В доповіді мова буде йти про наближення класів типу Нікольського-Бесова $B_{p,\theta}^\Omega$ [1] періодичних функцій багатьох змінних східчастими гіперболічними сумами Фур'є у просторі $B_{\infty,1}$ (див., наприклад, [2]). Норма в цьому просторі є більш сильною ніж L_∞ - норма. Далі вважаємо, що $\Omega(t) = w(\prod_{j=1}^d t_j)$, і $w(\tau)$ - функція однієї змінної типу модуля неперервності порядку l , яка задовольняє умови Барі-Стечка (S^α) та (S_l) [3].

Означимо апроксимаційну характеристику, яка нами досліджується. Поставимо у відповідність кожному вектору $s \in \mathbb{N}^d$ множину вигляду

$$\rho(s) := \{k \in \mathbb{Z}^d : 2^{s_j-1} \leq |k_j| < 2^{s_j}, j = \overline{1, d}\}$$

і для $n \in \mathbb{N}$ покладемо

$$Q_n := \bigcup_{\|s\|_1 < n} \rho(s), \text{ де } \|s\|_1 := s_1 + \dots + s_d.$$

Множину Q_n називають східчастим гіперболічним хрестом. Для сумовної функції $f \in L_1(T^d)$, $T^d := \prod_{j=1}^d [0, 2\pi)$ позначимо

$$S_{Q_n}(f) := S_{Q_n}(f, x) = \sum_{k \in Q_n} \widehat{f}(k) e^{i(k,x)}, x \in \mathbb{R}^d,$$

де $\widehat{f}(k) := (2\pi)^{-d} \int_{T^d} f(t) e^{-i(k,t)} dt$ - коефіцієнти Фур'є функції f .

Поліноми $S_{Q_n}(f)$ називаються східчастими гіперболічними сумами Фур'є.

Якщо X - функціональний простір з нормою $\|\cdot\|_X$, то для $f \in L_1(T^d)$ позначимо

$$E_{Q_n}(f)_X := \|f - S_{Q_n}(f)\|_X$$

і для функціонального класу $F \subset X$

$$E_{Q_n}(F)_X := \sup_{f \in F} E_{Q_n}(f)_X.$$

Нами одержано наступне твердження.

Теорема. Нехай $d \geq 2$, $1 < p < \infty$, $1 \leq \theta \leq \infty$, $\Omega(t) = w(\prod_{j=1}^d t_j)$, де $w(\tau)$ задовольняє умову (S^α) з деяким $\alpha > \frac{1}{p}$ і умову (S_l) . Тоді справедливою є оцінка

$$E_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_{B_{\infty,1}} \asymp w(2^{-n})2^{\frac{n}{p}}n^{(d-1)(1-\frac{1}{\theta})}.$$

Зауваження. Порівнявши встановлений результат з відомою оцінкою відповідної апроксимаційної характеристики класів $B_{p,\theta}^\Omega$ у просторі L_∞ [4] приходимо до висновку про справедливість співвідношення

$$E_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_{B_{\infty,1}} \asymp E_{Q_n}(B_{p,\theta}^\Omega)_\infty.$$

1. *Yongsheng S., Heping W.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness. // Tr. Mat. Inst. Steklova. 1997. Т. 219. С. 356-377.
2. *Романюк А.С., Романюк В.С.* Апроксимаційні характеристики класів періодичних функцій багатьох змінних у просторі $B_{\infty,1}$. // Укр. мат. журн., 2019. Т.71, №2. С.271-282.
3. *Бари Н.К., Стечкин С.Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. 1956. Т.5. С. 483–522.
4. *Конограй А.Ф., Стасюк С.А.* Найкращі ортогональні тригонометричні наближення класів $B_{p,\theta}^\Omega$ періодичних функцій багатьох змінних. // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. 2007. Т.4, №1. С.151-171.

APPROXIMATION OF CLASSES OF PERIODIC FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES WITH GENERALIZED MIXED SMOOTHNESS BY STEPWISE HYPERBOLIC FOURIER SUMS

In this paper, we consider the approximation of classes of periodic functions of several variables of the Nikol'skii–Besov type with mixed smoothness by step hyperbolic Fourier sums in the space $B_{\infty,1}$.