

UDC 517.927

APPROXIMATION PROPERTIES OF MULTIPOINT BOUNDARY-VALUE PROBLEMS

Olena Atlasiuk, Vladimir Mikhailets

University of Helsinki, Institute of Mathematics of the National Academy of
 Sciences of Ukraine, King’s College London
 hatlasiuk@gmail.com, vladimir.mikhailets@gmail.com

Let $(a, b) \subset \mathbb{R}$ be a finite interval and let the parameters $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{m, r, k\} \subset \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$ be arbitrary. We denote the usual complex Sobolev space by

$$W_p^{n+r}([a, b]; \mathbb{C}) := \{y \in C^{n+r-1}([a, b]; \mathbb{C}) : y^{(n+r-1)} \in AC[a, b], y^{(n+r)} \in L_p[a, b]\}.$$

We consider a well-posed boundary-value problem with inhomogeneous boundary conditions

$$(L_0 y_0)(t) := y_0^{(r)}(t) + \sum_{\ell=1}^r A_{r-\ell,0}(t) y_0^{(r-\ell)}(t) = f_0(t), \quad t \in (a, b), \quad (1)$$

$$B_0 y_0 := \sum_{s=0}^{n+r-1} \alpha_{s,0} y_0^{(s)}(t_0) + \int_a^b \Phi_0(t) y_0^{(n+r)}(t) dt = c_0, \quad (2)$$

where the matrix-valued functions $A_{r-\ell}(\cdot) \in (W_p^n)^{m \times m}$, the vector-valued function $f_0(\cdot) \in (W_p^n)^m$, the vector $c_0 \in \mathbb{C}^{rm}$, the numerical matrices $\alpha_{s,0} \in \mathbb{C}^{rm \times rm}$ and the matrix-valued function $\Phi_0(\cdot) \in L_{p'}([a, b]; \mathbb{C}^{rm \times rm})$, $p \in [1, \infty)$, $p^{-1} + p'^{-1} = 1$, are given. As was proved in [1, Theorem 3.2], every arbitrary inhomogeneous boundary condition for equation (1) admits a unique canonical representation of the form (2), where t_0 is an arbitrary fixed point of the interval $[a, b]$.

Consider simultaneously a sequence of multipoint boundary-value problems

$$(L_k y_k)(t) := y_k^{(r)}(t) + \sum_{\ell=1}^r A_{r-\ell,k}(t) y_k^{(r-\ell)}(t) = f_k(t), \quad t \in (a, b), \quad (3)$$

$$B_k y_k := \sum_{s=0}^{n+r-1} \alpha_{s,k} y_k^{(s)}(t_0) + \sum_{j=0}^{N(k)} \beta_{j,k} y_k^{(n+r-1)}(t_{j,k}) = c_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

Here, the elements of the matrix-valued functions $A_{r-\ell,k}$ belong to some dense set \mathcal{F} in the space $(W_p^n)^{m \times m}$ and G is a dense set in space $(W_p^n)^m$ and $f_k \in G$ for all k . Moreover, for all indices, $\alpha_{s,k}, \beta_{j,k} \in \mathbb{C}^{m \times m}$ and the points $t_{j,k}$ belong to some dense set \mathcal{P} in the interval $[a, b]$, and we have $f_k \rightarrow f_0$, $c_k \rightarrow c_0$ as $k \rightarrow \infty$.

We study the natural problem of the existence of a sequence of boundary-value problems (3), (4), whose solutions satisfy the asymptotic formula $y_k \rightarrow y_0$, in $(W_p^{n+r})^m$ as $k \rightarrow \infty$. We provide a positive answer to this question by relying on [1, Theorem 2.2], which establishes the continuity of solutions of boundary-value problems with respect to a parameter belonging to an abstract metric space \mathcal{M} .

Theorem 1. *Assume that the homogeneous boundary-value problem has only a trivial solution. Then, there exists a sequence of well-posed boundary-value problems of the form (3), (4) with polynomial coefficients and right-hand sides such that*

(i) if $1 < p < \infty$

$$\| (L_k, B_k)^{-1} - (L_0, B_0)^{-1} \| \rightarrow 0, \quad \text{as } k \rightarrow \infty;$$

(ii) if $p = 1$

$$(L_k, B_k)^{-1} \xrightarrow{s} (L_0, B_0)^{-1} \quad \text{and } y_k \rightarrow y_0 \text{ in } (W_1^{n+r})^m, \quad \text{as } k \rightarrow \infty.$$

1. Atlasiuk O., Mikhailets V., Taskinen J. *Parameter-dependent inhomogeneous boundary-value problems in Sobolev spaces.* 2025 <https://doi.org/10.48550/arXiv.2512.21361>

АПРОКСИМАЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ БАГАТОТОЧКОВИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Ми вивчаємо широкий клас лінійних неоднорідних крайових задач r -го порядку для систем звичайних диференціальних рівнянь, які залежать від параметра μ , що належить абстрактному метричному простору \mathcal{M} . Розв'язки належать просторам Соболева $(W_p^{n+r})^m$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m, r \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq \infty$. Крайові умови мають найбільш загальний вигляд $Bu = c$, де B – довільний неперервний оператор, який діє з простору $(W_p^{n+r})^m$ в \mathbb{C}^m . Отже, крайові умови можуть містити похідні невідомої вектор-функції цілого та/або дробового порядків $\geq r$. Ми доводимо, що розв'язки вихідних задач можна апроксимувати у просторі $(W_p^{n+r})^m$, $p < \infty$, розв'язками систем звичайних диференціальних рівнянь з поліноміальними коефіцієнтами, правими частинами рівняння та багатоточковими крайовими умовами, які не залежать від правих частин вихідної задачі.