Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2026»
27–29 травня 2026 р., Львів

УДК 512.5

ПЕРВИННІ ПІДНАПІВМОДУЛІ НАД НЕКОМУТАТИВНИМИ НАПІВКІЛЬЦЯМИ

Андрій Андрушко, Іванна Мельник

Кафедра алгебри, топології та основ математики,
механіко-математичний факультет,
Львівський національний університет імені Івана Франка, e-mail:
andrii.andrushko@lnu.edu.ua, ivannamelnyk@yahoo.com

Теорія напівкілець і напівмодулів є узагальненням класичної теорії кілець і модулів, що має важливі застосування в різних галузях математики та інформатики. Фундаментальна монографія Джонатана Голана заклала основи для цієї дисципліни. Проте, детальний аналіз спеціалізованих структур, таких як первинні піднапівмодулі, потребує глибшого вивчення, особливо для некомутативного випадку.

Більшість сучасних досліджень у цій сфері спирається на умову комутативності напівкільця, що суттєво спрощує встановлення зв'язків між властивостями піднапівмодулів та ідеалів. Робота має на меті розширити теорію первинних піднапівмодулів для некомутативних напівкілець, використовуючи апарат m-систем.

Означення 1. Непорожня підмножина S напівкільця R називається m-системою, якщо для будь-яких $a, b \in S$ існує такий $r \in R$, що $arb \in S$.

Означення 2. Якщо S — довільна m-система напівкільця R і M — лівий R-напівмодуль, то непорожню підмножину X напівмодуля M називатимемо S_m-системою напівмодуля M, якщо для будь-яких $s \in S$ та $x \in X$ існує такий $r \in R$, що $srx \in X$.

Означення 3. Лівий R-напівмодуль M називається *мультиплікаційним напівмодулем*, якщо для кожного піднапівмодуля N напівмодуля M існує такий ідеал I напівкільця R, що $N = IM$.

Основний критерій первинності формулюється через доповнення до піднапівмодуля.

Піднапівмодуль N напівмодуля M є первинним тоді і тільки тоді, коли його доповнення $M \setminus N$ є S_m-системою в M для деякої m-системи S напівкільця R.

Ідеал P напівкільця R є первинним тоді і тільки тоді, коли $R \setminus P$ є m-системою в R.

Якщо P — первинний піднапівмодуль лівого R-напівмодуля M, то анулятор $(P : M)$ є первинним ідеалом напівкільця R.

Теорема 1. *Нехай M — мультиплікаційний лівий R-напівмодуль. Якщо N — власний k-піднапівмодуль напівмодуля M, для якого його анулятор $(N : M)$ є максимальним k-ідеалом у напівкільці R, то N є первинним k-піднапівмодулем.*

Теорема 2. *Нехай M — мультиплікаційний лівий R-напівмодуль. Тоді відображення*

$$\psi : Spec(R) \to Spec(M), \quad \psi(P) = PM$$

де $Spec(R)$ — множина первинних k-ідеалів, а $Spec(M)$ — множина первинних k-піднапівмодулів, є бієкцією.

Окрему увагу приділено k-замкненим структурам. Нагадаємо, що піднапівмодуль N називається k-піднапівмодулем (або замкненим), якщо з умов $x + y \in N$ та $y \in N$ обов'язково випливає $x \in N$.

Лема 1. *Нехай M — мультиплікаційний лівий R-напівмодуль. Якщо N є k-піднапівмодулем в M, то його анулятор $I = (N : M)$ є k-ідеалом у напівкільці R.*

Теорема 3. *Для власного k-піднапівмодуля N напівмодуля M наступні твердження є еквівалентними:*

1. *N — первинний k-піднапівмодуль M;*
2. *$(N : M)$ — первинний k-ідеал R;*
3. *$N = PM$ для деякого первинного k-ідеалу P напівкільця R.*

Як наслідок, для мультиплікаційного лівого R-напівмодуля M встановлюється строга бієкція між множиною первинних k-ідеалів напівкільця та множиною первинних k-піднапівмодулів.

1. *Golan J. S.* Semirings and their Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. — 395 p.
2. *Ebrahimi Atani S., Ebrahimi Atani R.* Prime Subsemimodules of Semimodules // International Journal of Algebra. — 2010. — Vol. 4, No. 21. — P. 1021–1031.

PRIME SUBSEMIMODULES OVER NONCOMMUTATIVE SEMIRINGS

The theory of prime subsemimodules over noncommutative semirings is considered. A criterion for primeness using S_m-systems is established. It is shown that for a multiplicative left R-semimodule M, there is a bijection between the set of prime k-ideals of the semiring R and the set of prime k-subsemimodules of M.