

УДК 517.54

Застосування оцінок добутку конформних радіусів неперетинних областей до теорем спотворення

Ярослав Заболотний

Інститут математики НАН України, м. Київ,
yaroslavzabolotnii@gmail.com

Нехай $\mathbb{N}$ і $\mathbb{R}$ – множини натуральних і дійсних чисел відповідно, $\mathbb{C}$ – комплексна площина, $U = \{z : |z| < 1\}$ – відкритий одиничний круг, і нехай $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ – розширена комплексна площина.

Голоморфна (або мероморфна, тобто така, всі особливі точки якої – полюси) в області $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ функція $f(z)$ називається однолистою в B , якщо вона здійснює взаємно однозначне відображення області B на область $f(B)$. Будемо говорити, що функція $f(z)$, голоморфна і однолиста в U , належить до класу S , якщо виконуються рівності $f(0) = f'(0) - 1 = 0$.

Нехай функція $f(z)$, мероморфна в крузі $|z| < 1$, однолисто відображає круг $|z| < 1$ на область $B \subset \overline{\mathbb{C}}$ так, що $f(0) = a$, де $a \in B$.

Величина $R(B, a) = |f'(0)|$ називається конформним радіусом області B в точці a .

Теорема 1. *Нехай $n \in \mathbb{N}$ – деяке натуральне число, $n \geq 2$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, n}$ – деякий набір фіксованих точок комплексної площини. Тоді для довільного набору областей $B_k \subset \overline{\mathbb{C}}$, таких, що $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ правильна нерівність:*

$$\prod_{k=1}^n R(B_k, a_k) \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |a_p - a_k| \right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

Серед можливих застосувань результатів, отриманих в екстремальних задачах геометричної теорії функцій, є т.зв. теореми спотворення. Суть даних теорем полягає в дослідженні того, які обмеження накладає однолистість відображення на деякі елементи, пов'язані з даним відображенням, зокрема, на величину модуля і аргументу похідної даної функції, тобто на величину спотворення, яке робить дана функція у вибраних точках області.

Нехай $\theta_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$, причому $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 2\pi$, $\theta_0 := \theta_n$, $\theta_{n+1} := \theta_1$. Для кожного $k = \overline{1, n}$ позначимо через m_k найменше натуральне число, для якого

$$\frac{\pi}{m_k} \leq \min \left\{ \frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{2}, \frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2} \right\}.$$

Теорема 2. *Нехай $n \in \mathbb{N}$, $\rho_k \in (0, 1)$, $\rho_0 := \rho_n$, $\rho_{n+1} := \rho_1$, $z_k = \rho_k \exp i\theta_k$, $k = \overline{1, n}$. Тоді, для кожної функції $f(z) \in S$ виконується нерівність*

$$\prod_{k=1}^n |f'(z_k)| \leq (n-1)^{-\frac{n}{4}} \prod_{k=1}^n \left(\frac{4\rho_k}{m_k} \cdot \frac{1 - (\rho_k)^{m_k}}{1 + (\rho_k)^{m_k}} \right)^{-1} \left(\prod_{1 \leq p < k \leq n} |(f(z_p) - f(z_k))| \right)^{\frac{2}{n-1}}.$$

1. Бажтін О. К., Заболотний Я. В. Оцінки добутків внутрішніх радіусів багатозв'язних областей. // Український математичний журнал. – 2021. – **73**, № 1. – С. 9–22.
2. Denega I. V., Zabolotnyi Ya. V. Application of upper estimates for products of inner radii to distortion theorems for univalent functions. // Matematychni Studii. – 2023. – **60**, No 2. – P. 138 – 144.

APPLICATION OF UPPER ESTIMATES FOR PRODUCTS OF CONFORMAL RADII OF NON-OVERLAPPING DOMAINS TO DISTORTION THEOREMS.

We consider application of upper estimates for products of inner radii to distortion theorems for univalent functions in disk U .