**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2025»**
**27–29 травня 2025 р., Львів**

УДК 517.958

# ПРИХОВАНІ ЛІЇВСЬКІ РЕДУКЦІЇ БЕЗДИСПЕРСІЙНОГО РІВНЯННЯ НИЖНИКА

**Олександра Вінніченко**

Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
*oleksandra.vinnichenko@imath.kiev.ua*

Класичний симетрійний аналіз бездисперсійного рівняння Нижника

$$u_{txy} = (u_{xx}u_{xy})_x + (u_{xy}u_{yy})_y, \tag{1}$$

що є бездисперсійним потенціальним аналогом системи Нижника [2], виконано в [1, 4]. Опис алгебраїчних і геометричних властивостей рівняння (1) в [1] створив основу для вичерпної класифікації одно- та двовимірних підалгебр його максимальної алгебри ліївської інваріантності, а також всіх його ліївських редукцій у [4]. Серед таких підалгебр виокремлено одну цікаву сім'ю одновимірних підалгебр $\mathfrak{s}^{\rho}_{1.3} = \big\langle P^x(1) + P^y(\rho)\big\rangle$, де $\rho = \rho(t)$ — довільна гладка функція від $t$ разом з $\rho(t) \neq 0$ для будь-якого $t$ в області визначення $\rho$ та $\rho \not\equiv 1$ на кожному відкритому інтервалі цієї області. За всіма підалгебрами $\mathfrak{s}^{\rho}_{1.3}$ у [3] побудовано оптимальні анзаци, які зводять рівняння (1) до диференціальних рівнянь з частинними похідними від двох незалежних змінних того ж самого вигляду

$$w_{122} + w_{22}w_{222} = 0. \tag{2}$$

Рівняння (2) має багато цікавих властивостей. Зокрема, воно є чудовим за Лі, і до того ж повністю визначеним не лише своєю (нескінченновимірною) максимальною алгеброю ліївської інваріантності, але й деякими скінченновимірними підалгебрами цієї алгебри. Також, його максимальна алгебра ліївської інваріантності повністю визначає його псевдогрупу $G_{1.3}$ точкових симетрій, що дає другий, після бездисперсійного рівняння Нижника (1), але простіший приклад такого явища в літературі.

**Теорема 1.** *Псевдогрупу $G_{1.3}$ точкових симетрій рівняння* (2) *складають перетворення вигляду*

$$\tilde z_1 = \frac{c_1z_1+c_2}{c_3z_1+c_4}, \quad \tilde z_2 = \frac{z_2+c_5z_1+c_6}{c_3z_1+c_4},$$
$$\tilde w = \frac{\Delta^{-1}}{c_3z_1+c_4}\left(w - \frac{c_3}{c_3z_1+c_4}\frac{z_2^3}{6} - \frac{c_3c_6-c_4c_5}{c_3z_1+c_4}\frac{z_2^2}{2}\right) + W^1(z_1)z_2 + W^0(z_1),$$

*де $c_1, \dots, c_6$ — довільні сталі з $\Delta = c_1c_4 - c_2c_3 \neq 0$, а $W^0$ і $W^1$ — довільні гладкі функції від $z_1$.*

Підстановка $w_{22} = h$ відображає (2) у нев'язке рівняння Бюргерса

$$h_1 + hh_2 = 0. \tag{3}$$

Цей факт використано в [3] для зведення процедури ліївської редукції рівняння (2) до аналогічної процедури для рівняння (3) за його ліївськими симетріями, що відповідають ліївським симетріям рівняння (2), з подальшими подвійними квадратурами. У результаті, нові сім'ї точних розв'язків у явному вигляді в термінах елементарних функцій, функцій Ламберта та параметричному вигляді побудовано для обох зазначених рівнянь. Розмноження цих розв'язків рівняння (2) його точковими симетріями, які не індуковані точковими симетріями рівняння (1), з наступною підстановкою їх в анзаци за підалгебрами $\mathfrak{s}^{\rho}_{1.3}$ дає широкі сім'ї нових точних розв'язків рівняння (1), які не можна отримати за допомогою стандартної процедури ліївської редукції.

На прикладі ліївської редукції рівняння (1) до рівняння (2), також вперше розглянуто індукцію точкових симетрій включно з дискретними у процесі ліївської редукції, що є складнішим явищем, ніж аналогічна індукція ліївських симетрій.

*Авторка висловлює щиру вдячність доктору фізико-математичних наук, професору Роману Омеляновичу Поповичу та доктору фізико-математичних наук Вячеславу Миколайовичу Бойку за визначення напрямку дослідження та постановку задач. Це дослідження підтримано грантом від Simons Foundation (1290607, O.O.V.).*

1. *Boyko V.M., Popovych R.O. and Vinnichenko O.O.* Point- and contact-symmetry pseudogroups of dispersionless Nizhnik equation // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2024. — V. 132, no. 107915. — 19 pp., arXiv:2211.09759.

2. *Nizhnik L.P.* Integration of multidimensional nonlinear equations by the inverse problem method // Soviet Phys. Dokl. — 1980. — V. 25. — P. 706–708.

3. *Vinnichenko O.O., Boyko V.M. and Popovych R.O.* Hidden symmetries, hidden conservation laws and exact solutions of dispersionless Nizhnik equation. — 2025. — 44 pp., arXiv:2505.02962.

4. *Vinnichenko O.O., Boyko V.M. and Popovych R.O.* Lie reductions and exact solutions of dispersionless Nizhnik equation // Anal. Math. Phys. – 2024. — V. 14, no. 82. — 56 pp., arXiv:2308.03744.

## HIDDEN LIE REDUCTIONS OF DISPERSIONLESS NIZHNIK EQUATION

*We exhaustively study the most interesting codimension-one submodel of the dispersionless Nizhnik equation within the framework of classical symmetry analysis. As a result, we construct new wide families of closed-form hidden Lie-invariant solutions of this equation.*