Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2025»
27–29 травня 2025 р., Львів

УДК 517.95+511.2

МЕТРИЧНІ ОЦІНКИ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО ВИЗНАЧНИКА ДВОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ З ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Іван Тимків, Оксана Медвідь

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,
e-mail tymkiv_if@ukr.net,
Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна
e-mail: medoks@ukr.net

Нехай $L = -\sum\limits_{i,j=1}^{p} \partial x_i (p_{ij}(x)\partial x_j) + q(x)$, де $p_{ij}(x) = p_{ji}(x) > 0$, $i,j \in \{1,\ldots,p\}$, $q(x) \geq 0$, $x \in Q$, $Q \subset \mathbb{R}^p$; λ_k, $k \in \mathbb{N}$, та $X_k(x), k \in \mathbb{N}$, власні значення та відповідні їм власні функції задачі $LX = \lambda X$, $X(x)\Big|_{\partial Q} = 0$; E_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, – простір рядів $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x)$ для яких $\|\varphi; E_\alpha\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|^2 \lambda_k^{2\alpha} < \infty$; E_α^4 — простір рядів $u(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x)$, коефіцієнти $u_k(t)$ яких є аналітичними за t на $[0,T]$, з нормою $\|u; E_\alpha^4\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{4} \max\limits_{t\in[0,T]} |u_k^{(j)}(t)|^2 \lambda_k^{2\alpha} < \infty$; $J_n(t)$, $n \in \mathbb{R}$, — функція Бесселя I-го роду порядку n.

Умови корректної розв'язності в просторі E_α^4 задачі для рівняння з оператором Бесселя

$$\prod_{q=1}^{2} \left(\partial_t^2 + \tfrac{2\nu}{t}\partial_t - a_q L\right) u(t,x) = 0,\ (t,x) \in (0,T) \times Q, \tag{1}$$

$$u(t_1,x) = \varphi_1(x),\, u(t_2,x) = \varphi_2(x),\, x \in Q,\, 0 < t_1 < t_2 \leq T, \tag{2}$$

$$u(t,x)\Big|_{\Sigma} = 0,\ Lu(t,x)\Big|_{\Sigma} = 0,\ \Sigma = [0,T] \times \partial Q, \tag{3}$$

де, $\nu \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2 > 0$, $a_1 \neq a_2$, пов'язані з властивостями визначників

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_1\lambda_k}t_1) & J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_2\lambda_k}t_2) \\ J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_1\lambda_k}t_2) & J_{\nu-\frac{1}{2}}(\sqrt{a_2\lambda_k}t_2) \end{vmatrix},\ \ k \in \mathbb{N}.$$

Вирази $\Delta(k)$, входять знаменниками у формулу для коефіцієнтів ряду Фур'є, яким зображується розв'язок задачі (1) – (3). Будучи відмінними від нуля, вони можуть ставати, як завгодно малими за модулем для нескінченнної кількості натуральних k, що зумовлює розбіжність цього ряду Фур'є. Важливим є дослідження питання про оцінки знизу модулів визначників $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{N}$. За допомогою метричного підходу [1] та властивостей функцій Бесселя встановлено результат.

Теорема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^2$) векторів $(t_1, t_2) \in [T_0, T]^2$, $T_0 > 0$ нерівність*

$$|\Delta(k)| > \lambda_k^{-\omega}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k при $\omega > (\nu+1)(2\nu + \frac{3p}{2} + \frac{5}{4}) + p + \frac{1}{4}$.

Якщо $\varphi_1, \varphi_2 \in E_{\alpha_1}$, де $\alpha_1 = \alpha_1(\alpha, \nu, p)$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}^2$) векторів $(t_1, t_2) \in [T_0, T]^2$, існує єдиний розв'язок задачі (1) – (3) з простору E^4_α, який неперервно залежить від функцій φ_1, φ_2.

Результати теореми 1 розширюють та доповнюють діофантові оцінки функцій Бесселя [2].

1. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. Київ: Наук. думка, 2002.

2. *Симотюк М. М., Тимків І. Р.* Крайова задача для одного виродженого параболічного рівняння // Вісник НУ "Львівська політехніка". – "Фіз.-мат. науки". – 2014. – №804. – С.57–63.

METRIC ESTIMATES OF THE CHARACTERISTIC DETERMINANT OF THE TWO-POINT PROBLEM FOR THE FOURTH-ORDER HYPERBOLIC EQUATION WITH THE BESSEL OPERATOR

The estimates from below are established for the characteristic determinant of the problem with two-point problem in the time variable with Dirichlet-type conditions in the spatial coordinates for a 4th-order hyperbolic equation with the Bessel operator in a bounded cylindrical domain. The metric approach is used to establish lower bound estimates for expression values involving Bessel functions of a half-integer index.