УДК 517.5

ПРО ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНУ АСИМПТОТИКУ КІЛЬЦЕВИХ Q-ГОМЕОМОРФІЗМІВ

Марія Стефанчук

Інститут математики НАН України, stefanmv43@gmail.com

Нехай задано сім'ю Γ кривих γ у комплексній площині $\mathbb{C}$. Борелеву функцію $\rho : \mathbb{C} \to [0, \infty]$ називають *допустимою* для Γ, пишуть $\rho \in \operatorname{adm} \Gamma$, якщо $\int\limits_{\gamma} \rho(z)|dz| \geqslant 1$ для кожної (локально спрямлюваної) кривої $\gamma \in \Gamma$. Нехай $p \in (1, \infty)$. *p-модулем* сім'ї Γ називається величина

$$\mathrm{M}_p(\Gamma) = \inf_{\rho \,\in\, \operatorname{adm} \Gamma} \int\limits_{\mathbb{C}} \rho^p(z)\, dxdy\,.$$

Для довільних множин E, F, і G в $\mathbb{C}$, через $\Delta(E, F; G)$ позначимо сім'ю всіх кривих $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, які з'єднують E і F в G, тобто $\gamma(a) \in E$, $\gamma(b) \in F$ і $\gamma(t) \in G$ при $a < t < b$.

Для точки $z_0 \in \mathbb{C}$ покладемо

$$\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}.$$

Нехай D — область у комплексній площині $\mathbb{C}$ і $Q : D \to [0, \infty]$ — вимірна за Лебегом функція. Будемо говорити, що гомеоморфізм $f : D \to \mathbb{C}$ є кільцевим Q-гомеоморфізмом відносно p-модуля в точці $z_0 \in D$, якщо співвідношення

$$\mathrm{M}_p(\Delta(fS_1, fS_2; f\mathbb{A})) \leqslant \int\limits_{\mathbb{A}} Q(z)\, \eta^p(|z - z_0|)\, dxdy$$

виконується для будь-якого кільця $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_0, r_1, r_2)$, $0 < r_1 < r_2 < d_0$, $d_0 = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$, і для кожної вимірної функції $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, такої, що $\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)dr = 1$.

Всюди далі будемо вважати, що $q_{z_0}(r) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{S(z_0, r)} Q(z)|dz|$ — середнє інтегральне значення функції Q по колу $S(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$.

Теорема 1. *Припустимо, що* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — *кільцевий* Q-*гомеоморфізм відносно* p-*модуля у точці* $z_0 \in \mathbb{C}$, $p > 2$, *та для деяких чисел* $r_0 > 0$, $\kappa = \kappa(z_0) > 0$ *і* $\alpha > 0$ *виконується умова*

$$q_{z_0}(t) \leqslant \kappa\, t^{-1} e^{-\alpha t}$$

для м.в. $t \in [r_0, \infty)$. *Тоді*

$$\liminf_{R\to\infty} M_f(z_0, R) e^{-\frac{\alpha R}{p-2}} \geqslant (p-2)^{\frac{p-1}{p-2}} \kappa^{-\frac{1}{p-2}} \alpha^{-\frac{p-1}{p-2}}, \tag{1}$$

де $M_f(z_0, R) = \max\limits_{|z-z_0|=R} |f(z) - f(z_0)|$.

Зауваження 1. Оцінка (1) є точною та досягається на кільцевому Q-гомеоморфізмі відносно p-модуля у точці $z_0 \in \mathbb{C}$

$$f = \begin{cases} k_0 e^{\frac{\alpha|z-z_0|}{p-2}} \frac{z-z_0}{|z-z_0|}, \ |z - z_0| \geqslant 1, \\ k_0 e^{\frac{\alpha}{p-2}} (z - z_0), \ |z - z_0| < 1, \end{cases}$$

$k_0 = (p-2)^{\frac{p-1}{p-2}} \kappa^{-\frac{1}{p-2}} \alpha^{-\frac{p-1}{p-2}}$, з функцією

$$Q(z) = \begin{cases} \kappa\, |z - z_0|^{-1} e^{-\alpha|z-z_0|}, \ |z - z_0| \geqslant 1, \\ (p-2)^{-(p-1)} \kappa\, \alpha^{p-1} e^{-\alpha}, \ |z - z_0| < 1. \end{cases}$$

Наслідок 1. *Припустимо, що* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — *кільцевий* Q-*гомеоморфізм відносно* p-*модуля у точці* $z_0 \in \mathbb{C}$, $p > 2$, *та для деяких чисел* $r_0 > 0$, $\kappa = \kappa(z_0) > 0$ *і* $\alpha > 0$ *виконується умова*

$$Q(z) \leqslant \kappa\, |z - z_0|^{-1} e^{-\alpha|z-z_0|}$$

для м.в. $z \in \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| \geqslant r_0\}$. *Тоді*

$$\liminf_{R\to\infty} M_f(z_0, R) e^{-\frac{\alpha R}{p-2}} \geqslant (p-2)^{\frac{p-1}{p-2}} \kappa^{-\frac{1}{p-2}} \alpha^{-\frac{p-1}{p-2}},$$

де $M_f(z_0, R) = \max\limits_{|z-z_0|=R} |f(z) - f(z_0)|$.

Робота була підтримана бюджетною програмою «Підтримка розвитку пріоритетних напрямів наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

1. *Stefanchuk M. V.* On exponential asymptotics of ring Q-homeomorphisms at infinity // J. Math. Sci. – 2024. – V. 282, no. 1. – P. 83–92.

ON THE EXPONENTIAL ASYMPTOTICS OF RING Q-HOMEOMORPHISMS

The asymptotic behavior of exponential type of ring Q-homeomorphisms with respect to the p-modulus as $p > 2$ at infinity on the complex plane has been investigated.