

ФРИКЦІЙНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ПРО ВЗАЄМОДІЮ ШАРУ З ШТАМПАМИ СКЛАДНОЇ ФОРМИ

Ольга Соляр

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача
НАН України, м. Львів, вул. Наукова, 36, solyaro@ukr.net

Тривимірні контактні задачі для гладких штампів (за відсутності тертя) добре вивчені в літературі, при цьому для широкого класу задач розв’язки отримані в аналітичному вигляді [1]. Для дослідження фрикційних контактних задач, як правило використовують числові методи. У роботі розглянуто фрикційну контактну задачу для шару, який знаходиться на гладкій жорсткій основі. Ядра інтегральних рівнянь записано вигляді відрізків швидкозбіжних рядів або апроксимовано поліномами, що дало змогу виконати числове розв’язування інтегрального рівняння із контрольованою точністю. Контактні напруження у наперед незаданій області взаємодії визначено за підходом, описаним раніше [3].

Розглянемо контактну задачу для шару $0 < z < h$, який розміщений на жорсткій гладкій основі при $z = 0$. Прийемо, що верхня межа взаємодії зі штампом, до якого прикладена сила P , яка діє нормально до меж шару, та горизонтальна сила T , що діє паралельно осі Ox . Взаємодія відбувається з тертям, штамп нерухомий, перебуває в стані спокою. В області контакту діють нормальні σ_z та дотичні τ_{xz} напруження, які згідно зі законом Кулона в області контакту пов’язані співвідношенням $\tau_{xz} = k\sigma_z$, де k – коефіцієнт тертя, який надалі приймаємо сталим, при цьому $T = -kP$, $\sigma_z < 0$. Позначимо модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона шару через G , ν , форму штампа, який вважаємо жорстким, в області контакту описує рівняння $z = f(x, y)$. Для запису інтегрального рівняння задачі попередньо знайдено переміщення верхньої межі шару, зумовлені зосередженими силами $(0, 0, Z)$ та $(X, 0, 0)$, які прикладені в довільній точці верхньої межі (ξ, η, h) .

Приймаючи відомими нормальні напруження і інтегруючи по області контакту, для визначення нормальних переміщень межі $z = h$, отримуємо

$$w(x, y, h) = \gamma h \int_D \sigma_z(\xi, \eta, h) K(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (1)$$

$$\text{де } \gamma = \frac{1-\nu}{2\pi G}, \quad K(\alpha, \beta) = F_0(\alpha, \beta) + F_1(\alpha, \beta). \quad F_0 = \frac{1}{\rho} + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} k \frac{x-\xi}{h\rho^2},$$

$$F_1 = \begin{cases} f_z(\rho) - 2 \frac{x-\xi}{h\rho} f_x(\rho), & \rho \leq 3, \\ -\frac{1}{\rho} - 2 \operatorname{Re} \sum_i t g^2 \alpha_i K_0(\alpha_i \rho) - k \frac{x-\xi}{h\rho} \left(\frac{1}{2\rho} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\alpha_i}{\cos^2 \alpha_i} K_1(\alpha_i \rho) \right] \right), & \rho > 3. \end{cases} \quad (2)$$

$\rho = R/h$, $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, $K_{0,1}(z)$ – функції Макдональда,
 α_i – корені з додатною дійсною частиною рівняння $\sin 2\alpha/2\alpha + 1 = 0$.

Функції $f_{z,x}(\rho)$, які визначені на основі перетворення Ханкеля на проміжку $\rho \leq 3$, апроксимовані поліномами. Коефіцієнти поліномів знайдено методом найменших квадратів. Розглянуто випадок, коли дотичні напруження діють в напрямку дії осі Ox . При заданих переміщеннях штампів рівняння (1) є інтегральним відносно невідомих контактних напружень.

Контактну задачу, в якій область взаємодії невідома, сформульовано у вигляді інтегральних рівнянь-нерівностей Сінйоріні [2]. З використанням кубатурних формул задачу трансформовано до системи лінійних алгебричних рівнянь-нерівностей. Розв'язування отриманої системи зведено до задачі квадратичного програмування.

Досліджено достовірність отриманих числових результатів. З метою тестування розраховано контактний тиск для півпростору та шару за різних значень зміщення штампів. Виявлено, що за малих його заглиблень контактні тиски в шарі і півпросторі практично збігаються. За більших заглиблень контактні тиски у шарі є більші, ніж у півпросторі, при цьому розмір області контакту для шару також збільшується порівняно з такою ж для півпростору. Контактні тиски для гладкого штампів добре узгоджуються з отриманими іншим методом. З використанням побудованого алгоритму розраховано контактні тиски для різних форм штампів за різних значень заглиблення та коефіцієнта тертя.

1. Galin L.A. Contact Problems. – Springer, 2008. – 316 p.
2. Kalker, Joost Jacques. Rolling contact phenomena: linear elasticity. Springer Vienna, 2000.
3. Kushnir R. M., Soliar O. I. Friction interaction of elastic bodies with unspecified contact zones. Physicochemical Mechanics of Materials. 2025. 61(2), 064-074

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2025»,
27–29 травня 2025 р., Львів**

**FRICTIONAL CONTACT PROBLEM INVOLVING THE INTERACTION
OF A LAYER WITH PUNCHES OF COMPLEX SHAPE**

A numerical approach has been developed to solve the frictional contact problem involving the interaction between an elastic layer and indenters of complex geometry. The method combines integral equation and inequality techniques with quadratic programming. The results confirm the efficiency of the algorithm and its ability to solve frictional contact problems with controllable accuracy