Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2025»
27–29 травня 2025 р., Львів

УДК 517.927

ПРО ВЛАСТИВОСТІ ОПЕРАТОРІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ НАЙБІЛЬШ ЗАГАЛЬНИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ в C^n

Віталій Солдатов

Інститут математики НАН України,
soldatov@imath.kiev.ua, soldatovvo@ukr.net

Нехай довільно вибрано числа $m, l, n \in \mathbb{N}$. На скінченному інтервалі (a, b) розглянемо лінійну крайову задачу для системи m диференціальних рівнянь першого порядку:

$$(Ly)(t) := y'(t) + A(t)y(t) = f(t), \quad t \in (a, b), \tag{1}$$

$$By = c. \tag{2}$$

Тут довільно задано $A \in (C^{(n-1)})^{m\times m}$, $f \in (C^{(n-1)})^m$, вектор $c \in \mathbb{C}^l$ і лінійний неперервний оператор $B\colon (C^{(n)})^m \to \mathbb{C}^l$.

Крайова умова (2) задає l скалярних крайових умов для системи m диференціальних рівнянь першого порядку. У випадку $l > m$ ця крайова умова є *перевизначеною*, а у випадку $l < m$ вона є *недовизначеною* щодо диференціальної системи (1).

Перепишемо крайову задачу (1), (2) у вигляді рівняння $(L, B)y = (f, c)$ за допомогою лінійного неперервного оператора

$$(L, B)\colon (C^{(n)})^m \to (C^{(n-1)})^m \times \mathbb{C}^l. \tag{3}$$

Теорема 1. *Оператор* (3) *є фредгольмовим з індексом* $m - l$.

Позначимо $Y \in (C^{(n)})^{m\times m}$ єдиний розв'язок матричної задачі Коші:

$$Y'(t) + A(t)Y(t) = O_m, \quad t \in (a, b), \qquad Y(a) = I_m, \tag{4}$$

де O_m і I_m — це відповідно нульова і одинична матриці розміру $m \times m$.

Позначимо через $M(L, B)$ комплексну числову матрицю розміру $l \times m$, кожний стовпчик якої є результатом дії оператора B на стовпчик з тим же номером матриці-функції Y. Таку матрицю називаємо *характеристичною* для крайової задачі (1), (2).

Теорема 2. *Для d-характеристик фредгольмового оператора* (3) *правильні формули*

$$\dim\ker(L, B) = m - \operatorname{rank} M(L, B), \tag{5}$$

$$\dim\operatorname{coker}(L, B) = l - \operatorname{rank} M(L, B). \tag{6}$$

Поряд із задачею (1), (2), розглянемо послідовність крайових задач

$$(L_k y)(t) := y'(t) + A_k(t)y(t) = f_k(t), \quad t \in (a, b), \tag{7}$$

$$B_k y = c_k, \tag{8}$$

параметризованих числом $k \in \mathbb{N}$. Тут $A_k \in (C^{(n-1)})^{m \times m}$, $f_k \in (C^{(n-1)})^m$, $c_k \in \mathbb{C}^l$, а B_k — лінійний неперервний оператор на парі $(C^{(n)})^m$ і $\mathbb{C}^l$.

Пов'яжемо з крайовими задачами (7), (8) послідовність лінійних неперервних операторів $(L_k, B_k)\colon (C^{(n)})^m \to (C^{(n-1)})^m \times \mathbb{C}^l$ і послідовність їх характеристичних матриць $M(L_k, B_k) \in \mathbb{C}^{l \times m}$, параметризовані числом k. Як звичайно, $(L_k, B_k) \xrightarrow{s} (L, B)$ позначає збіжність послідовності операторів (L_k, B_k) до (L, B) у сильній операторній топології.

Теорема 3. *Якщо* $(L_k, B_k) \xrightarrow{s} (L, B)$, *то* $M(L_k, B_k) \to M(L, B)$ *(границі при* $k \to \infty$*).*

Теорема 4. *Припустимо, що*

$$(L_k, B_k) \xrightarrow{s} (L, B) \quad \textit{при} \quad k \to \infty. \tag{9}$$

Тоді

$$\dim \ker(L_k, B_k) \le \dim \ker(L, B) \quad \textit{для всіх} \quad k \gg 1,$$

$$\dim \operatorname{coker}(L_k, B_k) \le \dim \operatorname{coker}(L, B) \quad \textit{для всіх} \quad k \gg 1.$$

Припустимо, що виконується умова (9), тоді для всіх $k \gg 1$, з останньої теореми отримуємо наслідки:

Якщо оператор (3) є оборотним, то і оператори (L_k, B_k) є оборотними.

Якщо крайова задача (1), (2) має розв'язок для кожних зазначених правих частин, то це правильно і для крайових задач (7), (8).

Якщо крайова задача (1), (2) має лише тривіальний розв'язок у випадку нульових правих частин, то це правильно і для задач (7), (8).

Представлені результати опубліковані в роботі [1].

1. *Солдатов В.* Розв'язність лінійних крайових задач для звичайних диференціальних систем у просторі C^n // Укр. мат. журн. – 2025. – т. 77, № 3. – С. 206–2013.

ON PROPERTIES OF THE PROBLEM OPERATORS TO BOUNDARY-VALUE PROBLEMS WITH THE MOST GENERAL BOUNDARY CONDITIONS IN C^n

We study linear boundary-value problems for systems of first-order ordinary differential equations with the most general boundary conditions in the normed spaces of continuously differentiable functions on a finite closed interval. The boundary conditions are allowed to be overdetermined or underdetermined with respect to the differential system and may contain arbitrary derivatives of the unknown functions. We prove that the problem operator is Fredholm on appropriate pairs of normed spaces, find its index and d-characteristics, and prove limit theorems for sequences of the characteristic matrices of the boundary-value problems under study and d-characteristics of the corresponding Fredholm operators.