

ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ КУСКОВО-ОДНОРІДНОГО ТЕРМОЧУТЛИВОГО ПРОСТОРУ З ІМПУЛЬСНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ ТЕПЛА

Володимир Шуфляк

ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, v.shufliak@gmail.com

Розглядається задача теплопровідності для простору, що складається з двох півпросторів ($\tilde{z} \leq 0, \tilde{z} \geq 0$) із залежними від температури коефіцієнтами теплопровідності $\lambda_{ti}(t_i) = \lambda_t^{(i)} \Lambda_i(t_i)$ та об'ємної теплоємності $c_{vi}(t_i) = c_v^{(i)} C_i(t_i)$. У півпросторах на віддальх h_1, h_2 діють джерела тепла $w_{ti}(\tilde{z}, \tau) = w_{0i}(\tau) \delta(\tilde{z} - (-1)^i h_i)$, де $w_{0i}(\tau) = q_{0i} \sum_{p=0}^{m_i-1} [S(\tau - b_{pi}) - S(\tau - b_{pi} - \tau_{ai})]$, $b_{pi} = p(\tau_{ai} + \tau_{bi})$, $m_i, \tau_{ai}, \tau_{bi}$ – кількість імпульсів, тривалість імпульсу та паузи відповідно; $i = 1, 2$.

Для визначення температурного поля використовуємо записане в безрозмірних величинах рівняння теплопровідності

$$\bar{\lambda}_t^{(i)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{\Lambda}_i(\bar{t}_i) \frac{\partial \bar{t}_i}{\partial z} \right] = \bar{c}_v^{(i)} \bar{C}_i(\bar{t}_i) \frac{\partial \bar{t}_i}{\partial Fo} - \bar{w}_{ti}(z, Fo), \quad (1)$$

умови контакту

$$\bar{t}_1(z, Fo)|_{z=0} = \bar{t}_2(z, Fo)|_{z=0}, \quad \bar{\lambda}_t^{(1)} \bar{\Lambda}_1(\bar{t}_1) \frac{\partial \bar{t}_1}{\partial z} |_{z=0} = \bar{\lambda}_t^{(2)} \bar{\Lambda}_2(\bar{t}_2) \frac{\partial \bar{t}_2}{\partial z} |_{z=0}, \quad (2)$$

початкову та граничні умови

$$\bar{t}_i|_{Fo=0} = 0, \bar{t}_1, \bar{t}_2 \rightarrow 0, z \rightarrow \mp \infty. \quad (3)$$

Тут $\bar{w}_{ti}(z, Fo) = \bar{w}_{0i}(Fo) \delta(z - (-1)^i h_i)$, $\bar{b}_{pi} = p(Fo_{ai} + Fo_{bi})$, $\bar{q}_i = \frac{l^2 q_i}{\lambda_t^* t_s}$, $Fo = \frac{\lambda_t^* \tau}{c_v^* l^2}$, $Fo_{ai} = \frac{\lambda_t^* \tau_{ai}}{c_v^* l^2}$, $Fo_{bi} = \frac{\lambda_t^* \tau_{bi}}{c_v^* l^2}$, $z = \frac{\tilde{z}}{l}$, $\bar{t}_i = \frac{t_i}{t_s}$; λ_t^*, c_v^*, l – величини які мають розмірності коефіцієнтів $\lambda_t^{(i)}, c_v^{(i)}$ та одиниці довжини відповідно.

Для розв'язання задачі (1)-(3) використовуємо перетворення Кірхгофа:

$$\Theta_i(z, Fo) = \Psi_i(\bar{t}_i(z, Fo)), \quad \text{де} \quad \Psi_i(x) = \int_0^x \bar{\Lambda}_i(\zeta) d\zeta.$$

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2025»,
27–29 травня 2025 р., Львів**

За припущення, що $\frac{\bar{c}_i(\bar{t}_i)}{\bar{\lambda}_i(\bar{t}_i)} = 1$, розглядали рівняння, яке еквівалентне (1)-(2):

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{\lambda}_t(z) \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] = \bar{c}_v(z) \frac{\partial \theta}{\partial Fo} - \sum_{i=1}^2 w_{0i}(Fo) \delta(z - (-1)^i h_i) + \bar{\lambda}_t^{(2)} F_2(Fo) \delta'(z),$$

де $F_2(Fo) = \Psi_2(\bar{t}_2(0, Fo)) - \Psi_1(\bar{t}_1(0, Fo))$; θ , $\bar{\lambda}_t$, $\bar{c}_v$ збігаються з θ_1 , $\bar{\lambda}_t^{(1)}$, $\bar{c}_v^{(1)}$ при $z \leq 0$ і з θ_2 , $\bar{\lambda}_t^{(2)}$, $\bar{c}_v^{(2)}$ при $z \geq 0$.

Застосовуючи метод функцій Гріна [1], розв'язок задачі подаємо у вигляді:

$$\theta_i(z, Fo) = \theta_{i1}^{(w)} + \theta_{i2}^{(w)} + \theta_i^{(F)}, \quad (4)$$

де

$$\theta_{i1}^{(w)} = \int_{-\infty}^0 \int_0^{Fo} \bar{w}_{t1}(\zeta, \xi) G_{i1}(z, \zeta, Fo - \xi) d\xi d\zeta,$$

$$\theta_{i2}^{(w)} = \int_0^{\infty} \int_0^{Fo} \bar{w}_{t2}(\zeta, \xi) G_{i2}(z, \zeta, Fo - \xi) d\xi d\zeta,$$

$$\theta_i^{(F)} = \lambda_{0,2} \int_0^{Fo} \frac{\partial G_{i2}(z, \zeta, Fo - \xi)}{\partial \zeta} F_2(\xi) d\xi.$$

У випадку лінійної $\lambda_i(t_i) = 1 + \beta_i t_i$ та експотенціальної $\lambda_i(t_i) = \exp(\beta_i t_i)$ залежностей, $F_2(Fo)$ визначається такими співвідношеннями:

$$F_2(Fo) = \frac{\left(1 - \sqrt{1 + 2\bar{\beta}_2 \theta_2(0, Fo) + \bar{\beta}_2 \theta_2(0, Fo)} \right) (\bar{\beta}_2 - \bar{\beta}_1)}{\bar{\beta}_2^2}$$

$$F_2(Fo) = \theta_2(0, Fo) - \frac{1}{\bar{\beta}_1} \left((\theta_2(0, Fo) \cdot \bar{\beta}_2) \right)^{\frac{\bar{\beta}_1}{\bar{\beta}_2}}.$$

Далі апроксимували $F_2(Fo)$ лінійним сплайном [2]. Значення $\theta_2(0, Fo)$ у вузлах сплайну знаходили з нелінійного алгебраїчного рівняння, яке отримали з (4) при $z = 0$. Підставивши $F_2(Fo)$ з урахуванням цих значень в (4), за відомими формулами обчислили температуру у фіксовані моменти часу.

1. Процюк Б. В., Верба І.І. Нестационарное одномерное температурное поле тришаровых тел с плоско-параллельными границами поділу // Вісник Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 1999. – Вип. 1. – С. 200-205.
2. Процюк Б.В. Нестационарные нелинейные задачи теплопроводности для півпростору // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – 61, №4. – С. 156-167.

**Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2025»,
27–29 травня 2025 р., Львів**

**TEMPERATURE FIELD OF A PIECEWISE-HOMOGENEOUS THERMO-
SENSITIVE MEDIUM WITH PULSED HEAT SOURCES**

The heat conduction problem for a piecewise-homogeneous thermosensitive medium with impulsive heat sources is reduced to solving a recursive sequence of nonlinear algebraic equations. The approach involves the use of the Kirchhoff transformation, generalized functions, the Green's function method, and linear spline approximation. Numerical results are presented.