Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2025»
27–29 травня 2025 р., Львів

УДК 512.6

ПРО ЛОКАЛЬНІ МАЙЖЕ-КІЛЬЦЯ З НІЛЬПОТЕНТНОЮ МУЛЬТИПЛІКАТИВНОЮ ГРУПОЮ

Марина Раєвська

Інститут математики НАН України, raemarina@imath.kiev.ua

Майже-кільце R — це непорожня множина з двома бінарними операціями, додаванням " $+$ " і множенням " $\cdot$ ", яка відрізняється від кільця тим, що комутативність першої операції та один із дистрибутивних законів (у нашому випадку, правий) не обов'язково виконуються (див., наприклад, [2]).

Група $(R, +)$ позначається через R^+ та називається *адитивною групою*, а її нейтральний елемент 0 — *нулем* майже-кільця R. Майже-кільце R називається *нуль-симетричним*, якщо також $0 \cdot x = 0$, та *майже-кільцем з одиницею* i, якщо напівгрупа $(R, \cdot)$ є моноїдом з одиничним елементом i. Група всіх оборотних елементів моноїда $(R, \cdot)$ називається *мультиплікативною групою* в R та позначається через R^*.

Майже-кільце R з одиницею називається *локальним*, якщо множина $L = R \setminus R^*$ всіх необоротних елементів із $(R, \cdot)$ утворює адитивну підгрупу в R^+, та *майже-полем*, коли $L = 0$.

Актуальним є питання встановлення взаємозв'язків між локальним майже-кільцем та його мультиплікативною групою. Городником [1] вивчались локальні майже-кільця, мультиплікативні групи яких є абелевими, і які не є кільцями.

Дослідження локальних майже-кілець, мультиплікативні групи яких є в певному сенсі близькими до абелевих, зокрема, мінімальними неабелевими або, в іншій термінології, *групами Міллера–Морено* є природним узагальненням. В статтях [4], [6], [7] описано локальні майже-кільця та майже-поля з мультиплікативними групами Міллера–Морено.

Наведемо означення нільпотентної групи (див., наприклад, [3]).

Нехай G — група. Нормальний ряд

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n = G$$

групи G називається *центральним*, якщо при $i = 0, 1, \ldots, n-1$ фактор-група G_{i+1}/G_i міститься в центрі фактор-групи G/G_i. Група G, що має хоча б один центральний ряд, називається *нільпотентною*.

Нагадаємо, що *групою Шмідта* або *мінімальною ненільпотентною* називається скінченна ненільпотентна група, будь-яка власна підгрупа якої нільпотентна.

В статті [8] описується будова груп Шмідта. Локальні майже-кільця з мультиплікативною групою Шмідта вивчені в [5].

В наступній теоремі встановлений зв'язок між нільпотентною мультиплікативною групою та адитивною групою в локальному майже-кільці.

Теорема 1. *Нехай R — локальне майже-кільце порядку p^n з нільпотентною мультиплікативною групою R^*. Якщо $p > 2$ або $p = 2$ та $-i \in Z(R^*)$, то мають місце такі твердження:*

1. *Адитивна група R^+ — абелева.*
2. *L — абелева та має індекс 2 в R^+.*

Зокрема, R/L є поле.

1. *Gorodnik A.* Local near-rings with commutative groups of units // Houston J. Math. - 1999. - 25. - P. 223-234.
2. *Pilz G.* Near-rings. The theory and its applications. - North Holland, Amsterdam, 1977. - 470 p.
3. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. - М.: Наука, 1967. - 648 с.
4. *Раєвська І. Ю.*, *Раєвська М. Ю.* Майже-поля з неабелево спадковими мультиплікативними групами // Мат. студії. - 2010. - 34, № 1. - С. 38-43.
5. *Раєвська І. Ю.*, *Раєвська М. Ю.* Локальні майже-кільця з мультиплікативною групою Шмідта // Укр. мат. журн. - 2019. - 71(10). - С. 1435-1440; переклад Ukrainian Math. J. - 2020. - 71(10). - P. 1643-1649.
6. *Раєвська М. Ю.* Локальні майже-кільця з мультиплікативною групою Міллера–Морено // Вісн. Київ. Ун-ту. Математика, Механіка. - 25. - С. 45-48.
7. *Раєвська М. Ю.*, *Сисак Я. П.* Про локальні майже-кільця з мультиплікативною групою Міллера–Морено // Укр. мат. журн. - 2012. - 64, № 6. - С. 811–818; переклад Ukrainian Math. J. - 2012. - 64(6). - P. 930–937.
8. *Шмидт О. Ю.* Группы, все подгруппы которых специальные // Мат. сб. - 1924. - 31. - С. 366-372.

ON LOCAL NEARRINGS WITH NILPOTENT MULTIPLICATIVE GROUP

An important issue is establishing the relationships between a local nearring and its multiplicative group. In the paper, local nearrings with nilpotent multiplicative group are studied. In particular, under certain restrictions, the additive groups and the subgroups of non-invertible elements of such nearrings are described.