Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2025»
27–29 травня 2025 р., Львів

УДК 512.6

ПРО ПРЯМІ ДОБУТКИ НЕМЕТАЦИКЛІЧНИХ p-ГРУП МІЛЛЕРА–МОРЕНО ТА ЦИКЛІЧНИХ p-ГРУП ЯК АДИТИВНІ ГРУПИ ЛОКАЛЬНИХ МАЙЖЕ-КІЛЕЦЬ

Ірина Раєвська

Інститут математики НАН України, raeirina@imath.kiev.ua

Питання про те, які групи можуть бути адитивними групами майже-кілець з одиницею, досліджується з кінця 1960-х років. Вивчення локальних майже-кілець було започатковано Мексоном [1]. В роботах [3] та [4] вивчались локальні майже-кільця на неметациклічних групах Міллера–Морено.

Очевидно, що прямим добутком майже-кілець з одиницею є майже-кільце з одиницею. Водночас прямий добуток двох довільних локальних майже-кілець не є локальним майже-кільцем.

В доповіді розглядаються прямі добутки неметациклічних p-груп Міллера–Морено та циклічних p-груп як адитивні групи майже-кілець з одиницею і, зокрема, локальних майже-кілець.

Лема 1. *Нехай G прямий добуток неметациклічної p-групи Міллера–Морено та циклічної p-групи. Тоді $G = ((< a > \times < c >) \rtimes < b >) \times < d >$ порядку $p^{m+n+k+1}$ з $a^{p^m} = b^{p^n} = c^p = d^{p^k} = 1$, $b^{-1}ab = ac$, $b^{-1}cb = c$, $d^{-1}ad = a$, $d^{-1}bd = b$, $d^{-1}cd = c$, де $m \geq n \geq 1$ та $m + n > 2$ при $p = 2$.*

Позначимо через $F(p^m, p^n, p, p^k)$ адитивно записану групу з леми 1 з такими твірними a, b, c та d порядків p^m, p^n, p та p^k, відповідно, що $-b+a+b = a+c$, $-b+c+b = c$, $-d+a+d = a$, $-d+b+d = b$, $-d+c+d = c$, де $m \geq n \geq 1$ та $m + n > 2$ при $p = 2$.

Лема 2. *Нехай R — майже-кільце з одиницею i, адитивна група R^+ якого ізоморфна групі $F(p^m, p^n, p, p^k)$ з $m \geq n \geq 1$, $m \geq k$ та $n > 1$ при $p = 2$. Тоді $R^+ =< a > + < b > + < c > + < d >$ з елементами a, b, c та d, що задовольняють співвідношенням $ap^m = bp^n = cp = dp^k = 0$, $-b+a+b = a+c$, $-b+c+b = c$, $-d+a+d = a$, $-d+b+d = b$, $-d+c+d = c$. Причому $a = i$ та кожний елемент $x \in R$ однозначно записується у вигляді $x = ax_1+bx_2+cx_3+dx_4$ з коефіцієнтами $0 \leq x_1 < p^m$, $0 \leq x_2 < p^n$, $0 \leq x_3 < p$ та $0 \leq x_4 < p^k$.*

Зокрема, з леми 2 випливає, що для кожного $x \in R$ виконується рівність $xa = ax = x$ та існують однозначно визначені відображення $\alpha_b : R \to \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_b : R \to \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_b : R \to \mathbb{Z}_p$, $\phi_b : R \to \mathbb{Z}_{p^k}$, $\alpha_d : R \to \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_d : R \to \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_d : R \to \mathbb{Z}_p$ та $\phi_d : R \to \mathbb{Z}_{p^k}$, для яких

$$xb = a\alpha_b(x) + b\beta_b(x) + c\gamma_b(x) + d\phi_b(x) \tag{1}$$

та

$$xd = a\alpha_d(x) + b\beta_d(x) + c\gamma_d(x) + d\phi_d(x). \tag{2}$$

Теорема 1. *Нехай R — локальне майже-кільце, адитивна група якого ізоморфна групі $F(p^m, p^n, p, p^k)$, $|R : L| = p$, $m \geq n \geq 1$, $m \geq k$ та $m > 1$ при $p = 2$. Якщо $x = ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4$ та $y = ay_1 + by_2 + cy_3 + dy_4$ — довільні елементи із R, то відображення $\alpha_b : R \to \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_b : R \to \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_b : R \to \mathbb{Z}_p$, $\phi_b : R \to \mathbb{Z}_{p^k}$, $\alpha_d : R \to \mathbb{Z}_{p^m}$, $\beta_d : R \to \mathbb{Z}_{p^n}$, $\gamma_d : R \to \mathbb{Z}_p$ та $\phi_d : R \to \mathbb{Z}_{p^k}$ можуть бути наступними:*

$\alpha_b(x) = 0 \pmod{p^m}$, $\gamma_b(x) = 0 \pmod{p}$, $\phi_b(x) = 0 \pmod{p^k}$, $\alpha_d(x) = 0 \pmod{p^m}$, $\beta_d(x) = 0 \pmod{p^n}$, $\gamma_d(x) = 0 \pmod{p}$, $\phi_d(x) = 1 \pmod{p^k}$ та

$$\beta_b(x) = \begin{cases} 1, & if\ x_1 \not\equiv 0 \pmod{p}; \\ 0, & if\ x_1 \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

1. *Maxon C. J.* On local near-rings // Math. Z. - 1968. - 106. - P. 197-205.

2. *Raievska I. Yu.*, *Raievska M. Yu.*. Finite nearrings with identity on Miller–Moreno groups // Mat. Stud. - 2014. - 42(1). - P. 15-20.

3. *Raievska I. Yu.*. Local nearrings on Miller-Moreno p-group // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Mathematics, Mechanics. - 2011. - 25. - P. 43-45 [in Ukrainian].

4. *Raievska I. Yu.*, *Raievska M. Yu.*, *Sysak Ya. P.* Local nearrings on non-metacyclic Miller-Moreno groups // Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics and Mathematics. - 2012. - 3. - P. 39-46 [in Ukrainian].

ON DIRECT PRODUCTS OF NON-METACYCLIC MILLER–MORENO p-GROUPS AND CYCLIC p-GROUPS AS ADDITIVE GROUPS OF LOCAL NEARRINGS

The question of which non-abelian p-groups can be additive groups of local nearrings is considered. Namely, it is proved that direct products of non-metacyclic Miller-Moreno p-groups and cyclic p-groups are additive groups of local nearrings. Examples of local nearrings on such groups are given.