Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2025»
27–29 травня 2025 р., Львів

УДК 517.95

ПЕРІОДИЧНА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ З КРАЙОВИМИ УМОВАМИ РОБІНА У ДВОШАРОВІЙ ОБЛАСТІ

Михайло Митрофанов, Іван Савка

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, ivan.savka@pnu.edu.ua

Актуальними є спряжені задачі в композитних середовищах з крайовими умовами для матеріалів із різними фізичними властивостями [1,2], у яких фізичний стан на поверхні змінюються з певною періодичністю [3]. У даній роботі розглядається двошарова періодична задача спряження для рівнянь теплопровідності без початкової умови та з крайовими умовами, праві частини яких задаються 2π-періодичними функціями за часом.

Нехай $\Omega = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $\mathcal{D} = (x_0, x_2)$ — інтервал дійсної прямої $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_1 = (x_0, x_1)$, $\mathcal{D}_2 = (x_1, x_2)$, $u_j = u_j(x,t)$, $j = 1,2$; $\mathbf{H}_q = \mathbf{H}_q(\Omega)$, $q \in \mathbb{R}$, — простір Соболєва всіх тригонометричних рядів $\varphi(t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_k \exp(ikt)$ із скінченною нормою $\|\varphi; \mathbf{H}_q\| = \sqrt{\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \big(1+|k|\big)^{2q} |\varphi_k|^2}$; $\mathbf{C}^n(\mathcal{D}; \mathbf{H}_q)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, — простір функцій $u(x,t) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k(x) \exp(ikt)$, $u_k(x) \in \mathbf{C}^n(\mathcal{D})$, таких, що для кожного фіксованого $x \in \mathcal{D}$ функції $\partial^j u/\partial x^j \equiv \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} u_k^{(j)}(x) \exp(ikt)$, $0 \le j \le n$, належать до простору $\mathbf{H}_{q-j/2}$ і як елементи цього простору є неперервними за t на $\mathcal{D}$; норму в просторі $\mathbf{C}^n(\mathcal{D}; \mathbf{H}_q)$ задаємо формулою $\|u; \mathbf{C}^n(\mathcal{D}; \mathbf{H}_q)\| = \sum\limits_{j=0}^{n} \max\limits_{x\in\mathcal{D}} \|\partial^j u(x,\cdot)/\partial x^j; \mathbf{H}_{q-j/2}\|$.

В області $\mathcal{D} \times \Omega$ для $u = (u_1, u_2)$ розглядається задача

$$L_j u_j \equiv \frac{\partial u_j}{\partial t} - \alpha_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = 0, \quad (x,t) \in \mathcal{D}_j \times \Omega, \quad j = 1,2. \tag{1}$$

$$\begin{aligned} B_0 u_1 &\equiv \left(\nu_1 u_1 + \nu_2 \frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\Big|_{x=x_0} = g_1(t), \quad t \in \Omega, \\ B_2 u_2 &\equiv \left(\nu_3 u_2 + \nu_4 \frac{\partial u_2}{\partial x}\right)\Big|_{x=x_2} = g_2(t), \quad t \in \Omega, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\lim_{x\to x_{1-}} u_1 = \lim_{x\to x_{1+}} u_2, \quad \lim_{x\to x_{1-}} \kappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \lim_{x\to x_{1+}} \kappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad t \in \Omega, \tag{3}$$

де $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}_+$, $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4 \in \mathbb{R}$, $|\nu_1| + |\nu_2| \neq 0, |\nu_3| + |\nu_4| \neq 0$, $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}_+$ — коефіцієнти теплопровідності матеріалів, g_1 і g_2 — задані періодичні функції із простору Соболєва $\mathbf{H}_q$, $q \in \mathbb{R}$ — довільне фіксоване.

Означення 1. Розв'язком задачі (1)–(3) називаємо вектор-функцію $u := (u_1, u_2) \in \mathbf{C}^2(\mathcal{D}_1; \mathbf{H}_q) \times \mathbf{C}^2(\mathcal{D}_2; \mathbf{H}_q)$, що задовольняє умови

$$\|L_j u_j; \mathbf{C}(\mathcal{D}_j; \mathbf{H}_{q-1})\| = 0, \quad j = 1, 2;$$
$$\|B_0 u_1(x_0, \cdot) - g_1; \mathbf{H}_q\| = 0, \quad \|B_2 u_2(x_2, \cdot) - g_2; \mathbf{H}_q\| = 0,$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \|u_1(x_1 - \varepsilon, \cdot) - u_2(x_1 + \varepsilon, \cdot); \mathbf{H}_q\| = 0,$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \left\| \kappa_1 \tfrac{\partial u_1(x_1 - \varepsilon, \cdot)}{\partial x} - \kappa_2 \tfrac{\partial u_2(x_1 + \varepsilon, \cdot)}{\partial x}; \mathbf{H}_{q - \frac{1}{2}} \right\| = 0.$$

Умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі тісно пов'язані з властивостями визначника $\Delta(k)$ для цілих значень k, де

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} (\nu_1 + \nu_2\beta_{1k})e^{\beta_{1k}x_0} & (\nu_1 - \nu_2\beta_{1k})e^{-\beta_{1k}x_0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\nu_3 + \nu_4\beta_{2k})e^{\beta_{2k}x_2} & (\nu_3 - \nu_4\beta_{2k})e^{-\beta_{2k}x_2} \\ e^{\beta_{1k}x_1} & e^{-\beta_{1k}x_1} & -e^{\beta_{2k}x_1} & -e^{-\beta_{2k}x_1} \\ \beta_{1k}e^{\beta_{1k}x_1} & -\beta_{1k}e^{-\beta_{1k}x_1} & -\beta_{2k}e^{\beta_{2k}x_1} & \beta_{2k}e^{-b_2 x_1} \end{vmatrix},$$

$$\beta_{jk} = \sqrt{\tfrac{|k|}{2\alpha_j}}\,(1 + \operatorname{sgn}(k)\, i), \quad k \neq 0, \quad j = 1, 2;$$
$$\Delta(0) = \nu_1\nu_3(x_0 - x_2) + \nu_1\nu_4 x_0 - \nu_2\nu_3 x_2.$$

Теорема 1. *Нехай для скінченної кількості цілих k виконується умова*

$$(\forall k \in [-K, K] \cap \mathbb{Z}) \qquad \Delta(k) \neq 0,$$

де K — додатна стала, визначена певним чином. Якщо $g_1 \in \mathbf{H}_{q - \operatorname{sgn}|\nu_2|/2}$, $g_2 \in \mathbf{H}_{q - \operatorname{sgn}|\nu_4|/2}$, то в просторі $\mathbf{C}^2(\mathcal{D}_1; \mathbf{H}_q) \times \mathbf{C}^2(\mathcal{D}_2; \mathbf{H}_q)$ існує єдиний розв'язок $u = (u_1, u_2)$ задачі (1)–(3), компоненти якого u_1 і u_2 неперервно залежить від функцій g_1 і g_2.

1. *Hahn D. W., Ozisik M. N.* Heat Conduction. – New York: Wiley, 2012.
2. *Chiba R.* An analytical solution for transient heat conduction in a composite slab with time-dependent heat transfer coefficient // Math. Probl. Eng. – 2018. – Article ID 4707860.
3. *Lu Xiaoshu, Thanh Viljanen M.* A new analytical method to simulate heat transfer process in buildings // Applied Thermal Engineering. – 2006. – 26. – pp. 1901-1909.

TIME-PERIODIC HEAT CONDUCTION PROBLEM WITH ROBIN BOUNDARY CONDITIONS IN A TWO-LAYER DOMAIN

We prove the existence and uniqueness of the solution in Sobolev spaces with time-periodic functions. The analysis is based on the method of separation of variables and estimates of the determinants related to the problem.