

УДК 517.57

Про верхню границю модуля перетворення Фур'є - Стілтєса одного класу нескінченних узагальнених згорток Бернуллі.

Олег Макарчук (1), Вадим Халецький (2)

(1) Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
makolpet@gmail.com; (2) Центральноукраїнський державний університет
імені Володимира Винниченка, Кропивницький, Україна,
aumykun@gmail.com.

Нехай $\eta \in (1; +\infty)$, m — натуральне числа більше за 1, (ψ_k) — послідовність незалежних дискретно розподілених випадкових величин, які набувають значень $0, 1, \dots, m-1$ з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, \dots, p_{(m-1)k}$ відповідно.

Розглянемо наступні величини

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \eta^{-k}, \quad L_\psi = \overline{\lim}_{|t| \rightarrow +\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} d(F_\psi(x)) \right|.$$

Для кожного натурального n та $j \in \{1; 2; \dots; m-1\}$ позначимо

$$B_{jn} = \sum_{\substack{0 \leq i < k \leq m-1 \\ k-i=j}} p_{in} p_{kn}.$$

Алгебраїчне число $\lambda > 1$ називається числом Пізо (Пізо-Віджаярагхавана), якщо його мінімальний многочлен

$$f(x; \lambda) = x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \dots + a_1x + a_0 \quad (a_k \in \mathbb{Z} \quad \forall k \in \{0; \dots; r-1\}) \quad (1)$$

має нулі $\lambda, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$, причому $|\lambda_j| < 1$ для кожного $j \in \{1; \dots; r-1\}$.

Розглянемо множину $R_\lambda[a; b]$ чисел $t \in [a; b]$ таких, що

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin^2(\pi t \lambda^n) < +\infty. \quad (2)$$

В роботах [2,3] та [1] були знайдені необхідні та достатні умови того, що $L_\psi = 0$ для випадків $\eta = m = 2$, $\eta = m = 3$ та $\eta = 2, m = 3$ відповідно. В [4] були знайдені необхідні та достатні умови того, що $L_\psi = 0$ для випадку $\eta = m \in \mathbb{N}$. Для випадку $\eta \in \mathbb{N}$ в статті [5] була проаналізована структура L_ψ та були знайдені необхідні і достатні умови того, що $L_\psi = 0$ для доволі широких асимптотичних обмежень, накладених на p_{jn} . Новими є наступні результати.

Теорема 1. *Нехай $\eta = \lambda$ – ірраціональне числа Пізо. Умова $L_\psi = 1$ виконується тоді і тільки тоді, коли*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{W_{n+k}}{\lambda^{2k}} = \frac{1}{\lambda^2 - 1},$$

де $W_n = p_{0n}^2 + p_{1n}^2 + \dots + p_{(m-1)n}^2$ для кожного натурального n .

Теорема 2. *Нехай існують натуральні числа T та S такі, що для кожного натурального $n \geq S$*

$$p_{j(n+T)} = p_{jn} \quad \forall j \in \{0, 1, \dots, m-1\}$$

та для деякого $j \in \{1; 2; \dots; m-1\}$ виконується умова

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} B_{jn} > 0,$$

тоді виконується рівність

$$L_\psi^2 = \sup_{t \in R_\lambda[\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}]} \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi t \lambda^n x} d(F_\psi(x)) \right| \right).$$

1. Albeverio S., Goncharenko Y., Pratsiivnyi M., Torbin G. Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits // Random Oper. Stochastic Equations. — 2007. — **15**, №1. — P. 89–97.
2. Goncharenko Y. V. Asymptotic properties of the characteristic function of random variables with independent binary digits and convolutions of singular distributions. // Scientific notes of the NPU named after Drahomanova. — 2002. — № 3. — P. 376–390. (in Ukrainian)
3. Goncharenko Y. V., Mykytyuk I. O. Behavior of the modulus of the characteristic function of a random variable with independent s -adic digits at infinity // Scientific notes of the NPU named after Drahomanova. — 2008. — № 9. — P. 121–127. (in Ukrainian)
4. Makarchuk O. Asymptotic behavior of the Fourier-Stieltjes transform of the distribution of a random power series // Nonlinear Oscillations. — 2023. — **26**, №4. — P. 495 – 504.
5. Makarchuk O. P. Asymptotic behavior of the characteristic function of a Jessen-Wintner type distribution // Bukovinian Mathematical Journal. — 2023. — **11**, №2. — P. 173 – 182. (in Ukrainian)

On the upper bound of the modulus of the Fourier–Stieltjes transform of a class of infinite generalized Bernoulli convolutions.

The paper investigates the asymptotic properties of the Fourier-Stieltjes transform modulus of a class of distributions of random series, which is a generalization of classical symmetric Bernoulli convolutions.