

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОПРУЖНОЇ РІВНОВАГИ БАГАТОШАРОВИХ СФЕРИЧНИХ ТІЛ З ВИКОРИСТАННЯМ РІЗНИХ МОДЕЛЕЙ

Юрій Кульчицький-Жигайло

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С.Підстригача НАН
України, kulchytskiyyura@gmail.com

Наведено підходи до дослідження термопружної рівноваги порожнистих сферичних посудин, стінки яких складаються з трансверсально ізотропних, радіально неоднорідних шарів, ідеально з'єднаних між собою. Механічні і теплофізичні властивості посудини в цілому описано кусково-неперервними функціями, які на поверхнях розмежування шарів можуть мати скачок першого роду. Напружено-деформований стан посудин викликаний тиском, прикладеним до поверхонь, та різницею температури на внутрішній поверхні і в оточуючому середовищі.

Розподіли температури, переміщень, напружень і деформацій визначаються з розв'язків центрально-симетричних крайових задач теплопровідності та термопружності, сформульованих в сферичних координатах. Структура рівняння теплопровідності є такою, що дозволяє отримати замкнутий аналітичний розв'язок, який явно залежить від профілю розподілу коефіцієнта теплопровідності та температурних навантажень. Для розв'язування задачі термопружності використовується модифікований метод прямого інтегрування [1], який полягає у безпосередньому інтегруванні рівняння рівноваги і рівняння сумісності деформацій, внаслідок чого задовольняються механічні крайові умови. Отримані формули визначають колову деформацію радіальне напруження та містять інтеграли від радіальної деформації і колового напруження. Використання співвідношень Дюгамеля-Неймана виключає із знайдених формул деформації, а врахування формули для визначення радіального напруження зводить задачу розв'язування інтегрального рівняння Вольтерри другого роду відносно колового напруження. Аналітичний розв'язок цього рівняння записується за допомогою резольвенти. Функціональний ряд для резольвенти замінюється скінченною сумою, а тому у практичних застосуваннях цей розв'язок є наближеним.

З метою верифікації запропонованого підходу розглянуто тестову задачу [2], в якій стінка посудини виготовлена з градієнтного матеріалу,

Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2025», 27–29 травня 2025 р., Львів

коефіцієнт Пуассона якого є сталим, а модуль Юнга, коефіцієнт лінійного термічного розширення і коефіцієнт теплопровідності змінюються вздовж товщини посудини згідно із степеневим законом. Обчислення показали, що при збереженні в функціональному ряді для резольвенти лише двох доданків різниця між знайденим наближеним розв'язком і аналітичним розв'язком [2] не перевищує 0.00625%.

Запропонований метод використано до побудови розв'язку задачі, в якій стінка посудини виготовлена з градієнтного матеріалу з шаруватою структурою, що містить деяку достатньо велику кількість двокомпонентних репрезентативних комірок. Компоненти в комірці є однорідні та ізотропні, а їх процентний вміст може змінюватися вздовж стінки посудини. Композит описується за допомогою гомогенізації з мікролокальними параметрами [3], яка раніше використовувалася для композитів з періодичною структурою. Знайдений розв'язок порівнювався з розв'язком задачі для шаруватого матеріалу, до якого не застосовувалась процедура гомогенізації. Якщо стінка містила 480 репрезентативних комірок (960 шарів), відносна різниця між розв'язками не перевищувала 0.1%, а у випадку 15 комірок – 3%.

Також проведено аналіз напружено-деформованого стану в сферичній посудині, деякі шари якої виготовлені з аукзетичних матеріалів. Показано, що використання таких матеріалів приводить до зменшення рівня напружень.

1. Y. Tokovyy, "Elastic and thermoelastic response of multilayer inhomogeneous hollow cylinders," Mech. Adv. Mater. Struct., vol. 31, no. 17, pp. 3889–3901, 2024. DOI: [10.1080/15376494.2023.2186548](https://doi.org/10.1080/15376494.2023.2186548).
2. Y. Bayat, M. Ghannad and H. Torabi, "Analytical and numerical analysis for the FGM thick sphere under combined pressure and temperature loading," Arch. Appl. Mech., vol. 82, no. 2, pp. 229–242, 2012. DOI: [10.1007/s00419-011-0552-x](https://doi.org/10.1007/s00419-011-0552-x).
3. S. J. Matysiak and C. Z. Wozniak, "Micromorphic effects in a modeling of periodic multilayered elastic composites," Int. J. Eng. Sci., vol. 25, no. 5, pp. 549–559, 1987. DOI: [10.1016/0020-7225\(87\)90106-6](https://doi.org/10.1016/0020-7225(87)90106-6).

ANALYSIS OF THERMOELASTIC EQUILIBRIUM OF MULTILAYER SPHERICAL SOLIDS BY MEANS OF DIFFERENT MODELS

This research presents evaluation of temperature and thermal stresses in a multilayer hollow sphere, whose layers may exhibit radial inhomogeneity of an arbitrary profile. The spherical vessel is considered a single solid with the material properties presented by the stepwise continuous profiles suffering jumps of the first kind on the layer interfaces. The problem is solved by using of modified algorithm for the direct integration method. The obtained solution is further used to verify the efficiency of a homogenization approach considering a vessel made of an FGM resulted from a layered structure consisting of a sufficiently large number of two-component representative cells.