

ЗАЛЕЖНИЙ ВІД ЧАСУ ЕЛЕМЕНТ ДЛЯ ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ ОСЬОВОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТРУБИ І ВОДИ

Данило Катеринич, Ігор Ориняк

НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського»

Постановка задачі. Розглядається відома задача динамічної взаємодії труби і рідини, коли після стаціонарного процесу різко змінюються граничні умови. Задача оперує чотирма незалежними параметрами – це тиск води p_{fl} , σ_x – напруження в трубі, u_{fl} – переміщення води, v – переміщення металу.

Постановочні рівняння. Для рішення задачі використовуються рівняння Скалака. Застосовуємо класичну неявну схему розкладу похідних по часу, який розглядаємо дискретно через рівні проміжки по часу Δt . Другі похідні переміщення води та металу по часу можна представити як:

$$\frac{\partial^2 u_{fl}(x)}{\partial t^2} = \frac{U_i(x) - 2U_{i-1}(x) - U_{i-2}(x)}{t^2} \quad (1a)$$

$$\frac{\partial^2 v_{fl}(x)}{\partial t^2} = \frac{V_i(x) - 2V_{i-1}(x) - V_{i-2}(x)}{t^2} \quad (1b)$$

Тоді постановочні рівняння Скалака мають вигляд:

$$\frac{\partial P_i(x)}{\partial x} + \rho_{fl} \frac{U_i(x)}{t^2} = \frac{U_{R,i-1}(x) \rho_{fl}}{t^2} \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \Sigma_i(x)}{\partial x} + \rho_p \frac{V_i(x)}{t^2} = \frac{V_{R,i-1}(x) \rho_p}{t^2} \quad (2b)$$

$$\frac{dU_i(x)}{dx} = -\frac{P_i(x)a}{K} - 2\Sigma_i(x) \frac{\mu}{E} \quad (2в)$$

$$\frac{dV_i(x)}{dx} = -\frac{\Sigma_i(x)}{E} - \frac{\varepsilon a P_i(x)}{K} \quad (2г)$$

$U_{R,i-1}$, $V_{R,i-1}$ є комбінаціями рішень в попередні моменти, t – крок по часу, ρ_{fl} густина рідини, ρ_p густина матеріалу труби, μ – коефіцієнт Пуассона, K модуль пружності, E – модуль Юнга, а константи a та ε даються рівняннями:

$$a = \left(1 + \frac{2KR}{tE}\right) \quad \varepsilon = \frac{\mu RK}{tE + K2R} < \mu/2 \ll 1 \quad (2д)$$

З рівнянь (2) ми утворюємо одне диференціальне рівняння четвертого порядку відносно параметру u_{fl} :

$$\frac{d^4 U_i(x)}{dx^4} - \frac{n^2 + m^2}{(1-2\mu\varepsilon)} \frac{d^2 U_i(x)}{dx^2} + \frac{n^2 m^2}{(1-2\mu\varepsilon)} U_i(x) = F(x) \quad (3a)$$

$$F(x) = -\frac{m^2}{(1-2\mu\varepsilon)} \frac{d^2 U_{R,i-1}(x)}{dx^2} - \frac{2\mu n^2}{(1-2\mu\varepsilon)} \frac{d^2 V_{R,i-1}(x)}{dx^2} + \frac{n^2 m^2}{(1-2\mu\varepsilon)} U_{R,i-1}(x) \quad (3б)$$

Де $F(x)$ відома функція. В наступних кроках ми розв'язуємо однорідне рівняння (3a) та знаходимо власні функції. Далі ми переходимо до методу початкових параметрів. Розбиваємо весь трубопровід на N ділянок. Вважаємо,

Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2025», 27–29 травня 2025 р., Львів

що на початку кожної ділянки нам відомі значення всіх чотирьох параметрів. Тоді ми можемо отримати однорідні рішення $\bar{U}(x)$, що задовольняють початковим умовам для кожного параметра в довільній ділянці:

$$\{\bar{U}(x)\} = \begin{bmatrix} m_{11}(x) & \dots & m_{14}(x) \\ m_{21}(x) & \dots & m_{24}(x) \\ m_{31}(x) & \dots & m_{34}(x) \\ m_{41}(x) & \dots & m_{44}(x) \end{bmatrix} \{\bar{U}_0\} = [M(x)]\{\bar{U}_0\} \quad (4a)$$

Де $m_{ij}(x)$ це певна комбінація власних функцій, а вектор-стовпчик $\{\bar{U}(x)\}$ залежить від невідомих параметрів на початку ділянки $\{\bar{U}_0\}$, і є таким:

$$\{\bar{U}(x)\} = \{\bar{U}(x), \bar{V}(x), \bar{P}(x), \bar{\Sigma}(x)\}^T \quad (4б)$$

Далі ми шукаємо частинне рішення $U_{z,p}(x)$, яке має задовольняти правій частині (2) та приймати значення 0 в точці $x=0$. Повне рішення $U(x)$ є таким:

$$\{U(x)\} = \{\bar{U}(x)\} + \{U_{z,p}(x)\} \quad (4в)$$

Результати розрахунків. Виконаємо обчислення для задачі, яка досліджувалася експериментально, і в літературі відома як задача університету Dundee. Параметри труби мають такі значення: довжина 20 метрів, діаметр 813 мм, товщина стінки труби 8 мм, густина матеріалу труби 7900 кг/м³. Вода витікає з резервуару зі швидкістю 1 м/с. Правий кінець різко перекривається. Потрібно знайти тиск води на правому краї $x=20$ на початку перехідного процесу. Для рішення задачі нашим методом було взято крок по часу $\Delta t = 10^{-6}$, трубопровід було розбито на 3 000 ділянок. Отримане рішення представимо у вигляді графіку тиску від часу в останній точці трубопроводу. Співставимо отримане рішення з методом Фур'є, Рис 1.

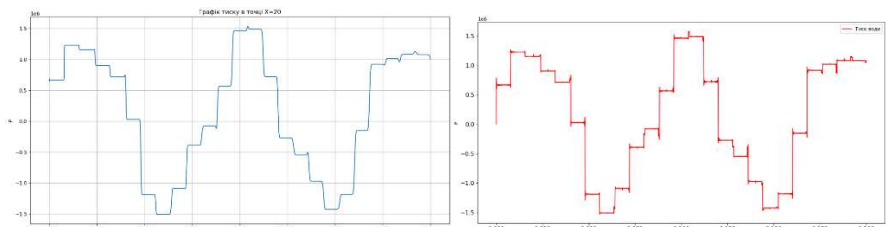


Рисунок 1. Графік тиску в часовий проміжок $0 \leq T \leq 200ms$ прононованим методом (ліворуч) та методом Фур'є (праворуч)

Висновки. Дана задача, незважаючи на популярність, вперше вирішена нами прямим неявним методом динамічного інтегрування за допомогою скінчених елементів. Це відбулося за рахунок того, що ми вперше отримали інтерполяційні функції всередині елемента, які явно залежать від кроку по часу. Подібна необхідність уже відзначалася класиками МСЕ, але до нас ще ніколи не застосовувалася.