Конференція молодих учених «Підстригачівські читання – 2014», 28–30 травня 2014 р., Львів

УДК 512.64

ПРО НАЙМЕНШЕ СПІЛЬНЕ ПРАВЕ КРАТНЕ ОСОБЛИВИХ МАТРИЦЬ

Романів А. М.

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, romaniv_a@ukr.net

Нехай R – комутативна адекватна область з $1 \neq 0$, $M_2(R)$ – кільце 2×2 матриць над R і $A \in M_2(R)$. На підставі результатів роботи [1], R є комутативною областю елементарних дільників [2]. Тоді для матриці A існують такі оборотні матриці P_A та Q_A, що

$$P_A A Q_A = E \text{, де } E = diag(\varepsilon_1, \varepsilon_2)\text{, } \varepsilon_1 | \varepsilon_2 .$$

Матриця E називається канонічною діагональною формою або ж формою Сміта, а матриці P_A та Q_A – відповідно, лівою та правою перетворювальними матрицями матриці A.

Позначимо через $\mathbf{P}_A$ множину всіх лівих перетворювальних матриць для матриці A.

Якщо $A = BC$, то кажуть, що матриця B є лівим дільником матриці A, а матриця A є правим кратним для матриці B. Якщо C – оборотна матриця, то матриця A називається асоційованою справа до матриці B. Якщо $M = AA_1$ та $M = BB_1$, то матрицю M називають спільним правим кратним матриць A та B. Окрім цього, якщо матриця M ділить зліва кожне інше спільне праве кратне матриць A та B, то матрицю M називають найменшим спільним правим кратним матриць A та B (у позначеннях $[A,B]_r$).

У 1933р. C. C. MacDuffee [3], на основі результатів E. Cahen [4] та A. Chatelet [5] запропонував метод знаходження найменшого спільного правого кратного матриць A та B. У 1949р. B. M. Stewart [6] показав, що найменше спільне праве кратне матриць A та B визначене однозначно з точністю до правої асоційованості.

Теорема. *Нехай*

$$A \sim E = diag(\varepsilon, 0),$$

$$B \sim \Delta = diag(\delta, 0),\ P_B P_A^{-1} = \|s_{ij}\|_1^2,\ \text{де}\ P_A \in \mathbf{P}_A,\ P_B \in \mathbf{P}_B .$$

Тоді

1) *якщо* $s_{21} \neq 0$, *то* $[A, B]_r = \mathbf{0}$,
2) *якщо* $s_{21} = 0$, *то* $\mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B \neq \{0\}$ *і* $[A, B]_r = P^{-1}\Omega$, *де*

$$\Omega = \begin{Vmatrix} [\varepsilon, \delta] & \\ & 0 \end{Vmatrix}, \quad P \in \mathbf{P}_A \cap \mathbf{P}_B.$$

1. *Helmer O.* The elementary divisor theorem for certain rings without chain condition // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49.** – № 2 – P. 225-236.
2. *Kaplansky I.* Elementary divisor and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66.** – P. 464-491.
3. *MacDuffe C. C.* Matrices with elements in a principal ring // Bull. Amer. Math. Soc. – 1933. – **39.** – P. 570-573.
4. *Cahen E*. Théorie des Nombres. 1914. – I.
5. *Chatelet A*. Groupes Abéliens Finis. 1924.
6. *Stewart B. M*. A note on least common left multiples // Bull. Amer. Math. Soc. – 1949. − **55**. − 6. – P. 587-591.

ON LEAST COMMON RIGHT MULTIPLES OF SINGULAR MATRICES

The explicit form of least common right multiples for two singular matrices of second order over a commutative adequate domain is established.