ДОДАТОК

УМОВИ СУМІСНОСТІ НЕОДНОРІДНОЇ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ В ОБЛАСТІ ГОЛОВНИХ ІДЕАЛІВ

Нехай R – не обов'язково комутативна область головних ідеалів, тобто область цілісності з одиницею, в якій кожний лівий ідеал є лівим головним ідеалом і кожний правий ідеал є правим головним ідеалом.

Пригадаємо деякі відомі факти, що стосуються теорії (областей головних ідеалів) таких кілець.

а) Для довільної $m \times n$-матриці A з елементами із R існують такі оборотні матриці P і Q над R, що $PAQ = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, \ldots)$, причому ε_i є повний дільник ε_{i+1}, $i = 1, 2, \ldots, r-1$, тобто $R\varepsilon_{i+1}R = \varepsilon_i R \bigcap R\varepsilon_i$, де $R\varepsilon_{i+1}R$ – двосторонній ідеал, породжений елементом ε_{i+1}. Елементи ε_i називаються інваріантними множниками матриці A (див. [4], с.312). Інваріантні множники матрицею A визначаються однозначно з точністю до подібності[1] (теорема Накаями, див. [6], с. 98).

б) Кожний відмінний від нуля елемент $a \in R$ однозначно з точністю до подібності може бути зображений у вигляді добутку скінченої кількості $\psi(a)$ простих (тобто таких, що не мають власних дільників) множників, причому із $a \sim b$ випливає, що $\psi(a) = \psi(b)$.

---

[1] Елементи a і b в області R називаються подібними в позначеннях $a \sim b$, якщо $R / aR \cong R / bR$ як праві R-модулі (див. [6], с. 68, 80).

Для довільної 1×2-матриці $\|a \quad b\|$ з елементами із R існує така оборотна 2×2-матриця, Q над R, що

$$\|a \quad b\| Q = \|d \quad 0\|,$$

де d – спільний найбільший лівий дільник елементів a і b. Якщо a не ділить b, то $\psi(d) < \psi(a)$ ($\psi(a) \le \psi(b)$) ([6], с. 84).

Теорема Д1. *Щоб неоднорідна система лінійних рівнянь*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i, \quad a_{ik}, b_i \in R, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{Д1}$$

була сумісна у кільці R, *необхідно і достатньо*, *щоб відповідні інваріантні множники матриці коефіцієнтів* A *і розширеної матриці*

$$B = \left\| A \quad \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \right\|$$

були попарно подібні.

Доведення. Припустимо, що система (Д1) сумісна в R, тоді існує така оборотна матриця C над R, що

$$BC = \|A \quad \mathbf{0}\|.$$

Оскільки, згідно з а), інваріантні множники матрицею A визначаються однозначно з точністю до подібності, то, враховуючи, що матриці B і BC асоційовані (тобто відрізняються оборотним множником), робимо висновок, що відповідні інваріантні множники матриць B і BC подібні. Але інваріантні множники BC і A (враховуючи вигляд BC) ті ж самі. Цим необхідність доведено.

Зважаючи на а) і умову теореми, робимо висновок, що для матриць A і B існують такі оборотні матриці U, V, U', V' над R, що

$$UAV = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r, 0, \ldots, 0),$$

$$U'BV' = \mathrm{diag}(\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots, \varepsilon_r', 0, \ldots, 0),$$

де $\varepsilon_i \sim \varepsilon_i'$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Запишемо систему (Д1) в матричній формі

$$A\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix}. \qquad \text{(Д2)}$$

Покладемо

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix} = V^{-1}\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix}, \qquad \text{(Д3)}$$

де $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – нові невідомі. Помноживши рівняння (Д2) зліва на матрицю U і зробивши заміну невідомих за формулою (Д3), одержимо

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & & & & & & \mathbf{0} \\ & \varepsilon_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \varepsilon_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & 0 \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_1' \\ b_2' \\ \vdots \\ b_m' \end{Vmatrix}. \qquad \text{(Д4)}$$

Оскільки у співвідношенні (Д3) матриця V – оборотна, то для доведення теореми досить показати, що ε_i ділить зліва b_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, і $b'_{r+1} = b'_{r+2} = \ldots = b'_m = 0$.

Зауважимо, що

$$B' = \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1 & & & & & \mathbf{0} & b'_1 \\ & \varepsilon_2 & & & & & b'_2 \\ & & \ddots & & & & \vdots \\ & & & \varepsilon_r & & & b'_r \\ & & & & 0 & & b'_{r+1} \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & & & 0 & b'_m \end{matrix} \right\| = UBV_1, \tag{Д5}$$

де

$$V_1 = \left\| \begin{matrix} V & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Тобто матриці B і B' – асоційовані. Це значить, що (згідно з а)) відповідні інваріантні множники матриць B і B' – подібні. Звідси відразу випливає, що $b'_{r+1} = b'_{r+2} = \ldots = b'_m = 0$, оскільки у протилежному випадку ранг матриці B' був би більшим, ніж ранг матриці B, що суперечило б подібності відповідних інваріантних множників матриць B і B'.

ε_1 ділить b'_1 зліва. Якщо б елемент ε_1 не ділив зліва елемент b'_1, то, помноживши матрицю B' зліва на деяку оборотну матрицю над R, яку легко побудувати, використовуючи зауваження б), ми одержали б асоційовану з B' матрицю, в якій на місці ε_1 з'явився б елемент d – спільний найбільший лівий дільник елементів ε_1 і b'_1, причому його довжина (кількість простих елементів, у вигляді добутку яких зображений елемент d) менша, ніж довжина ε_1, тобто $\psi(d) < \psi(\varepsilon_1)$.

Оскільки на основі подібності ε_1 і ε_1' $\psi(\varepsilon_1) = \psi(\varepsilon_1')$, то $\psi(d) < \psi(\varepsilon_1')$, тобто знайшлась матриця, асоційована з B, яка містить елемент меншої довжини, ніж довжина першого інваріантного множника цієї матриці, що неможливо, бо після скінченної кількості кроків ми звели б матрищо B' за допомогою деяких оборотних матриць P_1 і Q_1 до вигляду

$$P_1 B' Q_1 = \mathrm{diag}(d_0, d_1, \ldots, d_{r-1}, 0, \ldots, 0)\,,\ \psi(d_0) \le \psi(d)\,,$$

з інваріантними множниками $d_0, d_1, \ldots, d_{r-1}$, причому $\psi(d_0) < \psi(\varepsilon_1')$, що суперечить теоремі Накаями (див, [6], с.98).). Отже, ε_1 ділить b_1' зліва.

ε_2 ділить b_2' зліва. Припустимо протилежне. Тоді, помноживши матрицю B' на деяку оборотну матрицю зліва, одержимо матрицю

$$B'' = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & & & & & & \mathbf{0} & 0 \\ & \varepsilon_2 & & & & & & b_2' \\ & & \ddots & & & & & \vdots \\ & & & \varepsilon_r & & & & b_r' \\ & & & & 0 & & & 0 \\ & & & & & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & & & & & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

асоційовану з B'. Зауважимо (як і в попередньому випадку), що існує така оборотна матриця над R, після помноження на яку матриці B'' зліва одержимо асоційовану з B' матрицю, в якій на місці ε_2 з’явиться елемент d_1 меншої довжини, ніж довжина ε_2, тобто $\psi(d_1) < \psi(\varepsilon_2)$. Звівши матрицю B'' до діагонального вигляду, ми за перший інваріантний множник можемо взяти ε_1, бо $\psi(\varepsilon_1) = \psi(\varepsilon_1')$ за умовою теореми, а за другий – узяли б елемент меншої довжини, ніж довжина ε_2, оскільки, згідно з умовою $\psi(d_1) < \psi(\varepsilon_2)$, у множині елементів усіх асоційованих з

$$B''' = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & & & & & & \mathbf{0} & b_2' \\ & \varepsilon_2 & & & & & & \vdots \\ & & \ddots & & & & & b_r' \\ & & & \varepsilon_r & & & & 0 \\ & & & & 0 & & & \vdots \\ & & & & & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & & & & & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

матриць такі елементи існують. Продовжуючи наш процес далі, ми прийшли б до нормальної форми

$$U_2 B V_2 = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, d_1, \ldots, d_{r-1}, 0, \ldots, 0),$$

U_2, V_2 – оборотні матриці, ε_1 ділить d_1, d_i ділить d_{i+1} певним чином. Але $\psi(d_1) < \psi(\varepsilon_2)$. А тому що, за умовою теореми $\psi(\varepsilon_2) = \psi(\varepsilon_2')$, то $\psi(d_1) < \psi(\varepsilon_2')$. Але остання нерівність неможлива, оскільки інваріантні множники визначаються матрицею однозначно з точністю до подібності, а з подібності випливає рівність їх довжин. Отже, ε_2 ділить b_2' зліва. Доведення того, що ε_i ділить b_i' зліва у припущенні, що для всіх b_i' з індексами $< i$ проходить докладно так само, як і у випадку подільності b_2' на ε_2. Отже, ε_i ділить b_i' зліва. Цим теорема доведена.

Теорема Д2. *Щоб матричне рівняння*

$$AX = B, \tag{Д6}$$

де A, B *– матриці з елементами із* R, *мало розв'язок над* R, *необхідно і достатньо, щоб інваріантні множники матриць* A *і* $\|A \quad B\|$ *були попарно подібні.*

Доведення. Необхідність, враховуючи доведення теореми Д1, очевидна.

Достатність. На основі умови теореми відповідні інваріантні множники матриць

$$A, \quad \left\|\begin{matrix} A & \begin{matrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{matrix} \end{matrix}\right\|, \ldots, \left\|\begin{matrix} A & \begin{matrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{matrix} \end{matrix}\right\|, \tag{Д7}$$

де $\left\|\begin{matrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{mi} \end{matrix}\right\|$, $i = 1, 2, \ldots, k$ – стовпці, що утворюють матрицю B, подібні.

Справді, припускаючи, наприклад, що відповідні інваріантні множники матриць

$$A \text{ і } \left\|\begin{matrix} A & \begin{matrix} b_{1i} \\ \vdots \\ b_{mi} \end{matrix} \end{matrix}\right\|$$

не є подібні, зведемо матрицю $\|A \quad B\|$ до діагональної форми за допомогою процесу, застосованого нами при доведенні теореми Д1. З уваги на наше припущення інваріантні множники одержаної нормальної форми не будуть подібні відповідним інваріантним множникам матраці A, що суперечить умові теореми. Але з подібності відповідних інваріантних множників матриць (Д7) випливає розв'язність рівняння (Д6) над R.

Зауваження. Очевидно, для розв'язності матричного рівняння $YA_1 = B_1$ над R, необхідно і достатньо, щоб відповідні інваріантні множники матриць

$$A_1 \text{ і } \left\| \begin{matrix} A_1 \\ B_1 \end{matrix} \right\|$$

були подібними.

У випадку, коли R – комутативне, з подібності елементів a і b випливає, що вони відрізняються оборотним множником. Враховуючи останнє зауваження, твердження 2.1 і 2.2 одержуємо з теорем Д1 і Д2 як наслідок.

Нехай R – тіло (зокрема, поле). З останніх двох теорем і зауваження одержуємо такі твердження (теореми Кронекера-Капеллі).

Наслідок Д1. *Щоб матричне рівняння* $AX = B$ (A, B *– матриці з елементами із* R) *мало розв'язок над* R, *необхідно і достатньо, щоб ранги матриць* A і $\|A \quad B\|$ *були рівні*.

Наслідок Д2. *Щоб матричне рівняння* $YA_1 = B_1$, A_1, B_1 *– матриці з елементами із* R, *мало розв'язок над* R, *необхідно і достатньо, щоб ранги матриць*

$$A_1 \text{ і } \left\| \begin{matrix} A_1 \\ B_1 \end{matrix} \right\|$$

були рівні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
2. *Боревич З.И.* О факторизациях матриц над кольцом главных идеаловю // III Всесоюз. симп. по теории колец, алгебр и модулей: Тез. сообщ. – Тарту: Тартуский университет, 1976. – С.19.
3. *Боревич З.И., Шафаревич И.Р.* Теория чисел. – М.: Наука, 1972. – 496 с.
4. *Ван дер Варден.* Алгебра. – М.: Наука, 1976. – 648 с.
5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц.–М.:Наука, 1966.– 576 с.
6. *Джекобсон Н.* Теория колец. – М.: Изд-во иностр. лит., 1947. – 288 с.
7. *Казімірський П.С.* До розкладу поліноміальної матриці на лінійні множники // Доп. АН УРСР. – 1964, № 4. – С. 446–448.
8. *Казімірський П.С.* Про розклад поліноміальної матриці на множники // Доп. АН УРСР. – 1965. – № 7. – С. 847–849.
9. *Казімірський П.С.* Необхідність умов розкладу розкладу матричного многочлена на лінійні множники. // Укр. мат. журн. – 1977. – **29**, № 5. – С. 653–658.
10. *Казімірський П.С.* Квазіунітальні та супровідні матриці матричних многочленів // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 29–52.
11. *Казімірський П.С., Гринів Л.М.* Виділення “великого” множника з матричного многочлена // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1974. – № 4. – С. 293–297.
12. *Казімірський П.С., Zеліско В.Р.* Про виділення з поліноміальної матриці регулярного множника з

наперед заданою формою Сміта // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 52–61.

13. *Казімірський П.С., Луник Ф.П.* Доповнення прямокутної оберненої над асоціативним кільцем до оборотної // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1972. – № 6. – С. 505–506.
14. *Казімірський П.С., Петричкович В.М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
15. *Казімірський П.С., Уханська Д.В.* Розклад поліноміальної матриці на множники // Вісн. Львів. політехн. ін-ту. – 1967. – № 18. – С. 39–45.
16. *Казімірський П.С., Худий М.І.* Про один метод виділення лінійного множника з матричного многочлена // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1970. – № 5. – С. 394–395.
17. *Казимирский П.С.* Условия совместимости неоднородной системы линейных уравнений в некоммутативном кольце главных идеалов // Науч. зап. Львов. политехн. ин-та. Сер. физ.-мат. – 1955. – **30**, вып. 1. – С. 45–51.
18. *Казимирский П.С.* К разложению полиномиальной матрицы в произведение линейных множителей // Укр. мат. журн. – 1965. –№ 5. – С. 115–119.
19. *Казимирский П.С.* О разложении матричного многочлена на множители // Укр. мат. журн. – 1972. – **24**, № 3. – С. 316–327.
20. Казимирский П.С. Матричные многочлены и уравнения // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – С. 23–31.
21. *Казимирский П.С.* Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1976. – С. 29–40.

22. *Казимирский П.С.* Решение проблемы выделения регулярного множителя из матричного многочлена // Докл. АН УССР. – 1978. – № 12 – С. 1075–1078.
23. *Казимирский П.С., Грынив Л.М.* Приведение регулярного матричного многочлена к квазидиагональному виду // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**, № 3. – С. 318–327.
24. *Казимирский П.С., Урбанович М.М.* О разложении матричного двучлена на множители // Укр. мат. журн. – 1973. – **24**, № 4. – С. 454–464.
25. *Крейн М.Г., Лангер Г.*К. О некоторых математических приципах линейной теории демпфированных колебаний континуумов // Тр. Международ. симпоз. по применению теории функций комплексного переменного в механике сплошной среды. – М.: Наука, 1965. – **2.** – С. 283–322.
26. *Ланкастер П.* Теория матриц – М.: Наука, 1978. – 280 с.
27. *Лопатинский Я.Б.* Разложение полиномиальной матрицы на множители // Науч. записки Львов. политехн. ин-та. Сер. физ.-мат. – 1957. – **38,** № 2. – С. 3–7.
28. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1970. – 400 с.
29. *Маркус А.С., Мереуца И.В.* О полном наборе корней операторного уравнения, соответствующего полиномиальному пучку // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1973. – **37**, № 5. – С. 1108–1131.
30. *Маркус А.С., Мереуца И.В*. О некоторых свойствах простых λ-матриц // Математические исследования. – 1975. – **10,** № 3. – С. 207–213.
31. *Петков М.* Въерху две квадратни матрични уравнения // Физико-математическо описание. – 1975. – **18**, № 2. – С. 126–127.
32. *Супруненко Д.А*. Группы матриц. – М.: Наука, 1972. – 352 с.
33. *Супруненко Д.А., Тышкевич Р.И*. Перестановочные матрицы. – Минск, 1966. – 104 с.

34. *Якубович В.А.* Факторизация симметричных матричных многочленов // Доклады АН СРСР. – 1970. –**194**, № 3. – С. 532–535.
35. *Bell J.H.* Families of solutions of the unilateral matrix equation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1950. – № 1. – P. 151–159.
36. *Coppel W.A.* Matrix quadratic equations // Bull. Austral. Math. Soc. – 1974. – № 10 – P. 377–401.
37. *Dennis J.E., Traub J.F., Weber R.P.* The algebraic theory of matrix polynomials. // SIAM Jorn. Numer. Anal. – 1976. – **13**, № 6. – P. 831–845.
38. *Gohberg I., Lancaster P., Raum L.* Spectral analysis of matrix polynomials. – I. Canonical Forms and Divisors. // Linear Algebra Appl. – 1978. – № 20. – P. 1–44.
39. *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Spectral analysis of matrix polynomials. – II. The resolvent form and spectral divisors. // Linear Algebra Appl. – 1978. – **21**, № 1. – P. 65–88.
40. *Ingraham M.H.* Rational methods in matrix equations. // Bull. Amer. Math. Soc. – 1941. – № 47. – P. 61–70.
41. *Kalman R.E., Bucu P.S.* New results in linear filtering predicttions theory // Trans. ASUE. Ser. D.J. Basis Engr. – 1961. – **830**. – P. 95–108.
42. *Lancaster P.* Lambda-matrices and vibrating systems. – Oxford: Pergamon Press, 1966. – 195 p.
43. *Lancaster P.* Jordan chains for lambda-matrices. – II // Equations Math. – 1970. – № 5. – P. 290–293.
44. *Lancaster P.* A fundamental theorem of lambda-matrices with applications. – I. Ordinary differential equations with constant coefficients // Linear Algebra Appl. – 1978. – **18**, № 3. – P. 189–211.
45. *Lancaster P.* A fundamental theorem of lambda-matrices with applications. – II. Difference equations with constant coefficients // Linear Algebra Appl. – 1978. – **18**, № 3. – P. 213–222.

46. *Lancaster P., Wimmer H.K.* Zur Theorie der λ-Matrizen // Mathematische Nachrichten. – 1975. – **68**. – S. 325–330.
47. *Lancaster P., Wimmer H.K.* Jordan chains for lambda-matrices // Linear Algebra Appl. – 1968. – **1**, № 5. – P. 563–569.
48. *Langer H.* Factorizations of operator pencils // Acta Scientiarum Mathematicarum. – 1976. – **38**. – P. 83–86.
49. *Langer H.* Über Lancasters Zerlegung von Matrizen-Scharen // Arch. Rational Mech. Anal. – 1968. – **29**, № 1. – S. 75–80.
50. *Levin J.J.* On the matrix Riccaty equation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1959. – № 10. – P. 591–524.
51. *Newman M.* On the Smith normal form // J. Res. Bur. Stand. Sect. – 1971. – **75**. **–** P. 81**–**84.
52. *Noether E.* Schmeidler W. Module in nichtkommutativen Bereichen insbesondere aus Differential und Differenzen ausdrucken // Math. Nachrichten – 1920. – **8**. **–** S. 1**–**35.
53. *Ore O.* Linear equations in noncommutative fields // Ann. of Math. – 1931. – **32**. – P. 463–477.
54. . *Ore O.* Theory of noncommutative polynomials // Ann. of Math. – 1933. – **341**. – P. 480–508.
55. *Potter J.E.* Matrix quadratic solutions // SIAM Journ. Appl. Math. – 1966. – **14**, № 3. – P. 496–501.
56. *Reid W.T.* O matrix differential equation on the Riccatitupe // Amer. J. Math. – 1946. – **68**. – P. 237–246.
57. *Roth W.E.* A solution of the matrix equation $P(X) = A$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1928. – **30**. – P. 579–596.
58. *Roth W.E.* On the unilateral equation in matrices $P(X) = A$ // Trans. Amer. Math. Soc. – 1930. – **32**. – P. 61–80.
59. *Roth W.E.* On the matrix equation $X^2 + XB + CX + D = 0$ // Proc. Amer. Math. Soc. – 1950. – **1**. – P. 586–589.
60. *Snapper E.* The result at of a linear set // Amer. Journ. of Math. – 1944. – **66**. – P. 59–68.
61. *Steinitz E.* Rechtecige Systeme und Moduln in algebraishce Zahlnkörpern // Math. Ann. – 1912. – **72**. – S. 279–345.

62. *Sternberg R., Kaufman R.* Applications of the theory of systems of differential equations to multiple nonuniform transmission lines // J. Math. and Phys. – 1952. – **31**. – P. 244–252.
63. *Teichmüller O*. Der Elementarteilersatz für nichtkommutative Ringe // S. – B. Prenss. Akad. Wiss. – 1937. – **8**. – S. 169–177.
64. *Wimmer H.K*. Jordan-Ketten und Reslisierungen rationaler Matrizen // Linear Algebra Appl. – 1978. – **20**, № 2. – S. 101–110.
65. *Wiener N*. Extrapolation, interpolation and amoothing of stationary time series.– New Jork: John Viley, 1949. – 210 p.

СПИСОК ДОДАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

66. *Джалюк Н., Петричкович В.* Напівскалярна еквівалентність поліноміальних матриць та розв'язування матричних поліноміальних рівнянь Сильвестра // Математичний вісник НТШ. – 2012. – **9**. – С. 81 – 88.
67. *Зеліско В.Р.* Матриці та матричні рівняння над кільцем многочленів з інволюцією // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2010. – Вип. 8. – С. – 18–22.
68. *Зеліско В.Р., Кучма М.І.* Факторизація симетричних матриць над кільцями многочленів з інволюцією // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 4. – С. 91–95.
69. *Петричкович В.М.* О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – Вып. 26. – С. 13–16.
70. *Петричкович В.М.* Паралельні факторизації многочленних матриць // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 9. – С. 1228 – 1233.
71. *Петричкович В.М.* Про паралельні факторизації матриць над кільцями головних ідеалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 4. – С. 96–100.

72. *Шаваровский Б.З.* Редукция матриц при помощи эквивалентных и подобных преобразований // Мат. заметки. – 1998. – **65**, вып. 5. – С. 769–782.
73. *Шаваровский Б.З.* Полная система инвариантов пары матриц четного порядка со специальной формой Смита ее характеристической матрицы относительно подобия // Мат. заметки.– 2003. – **73**, вып. 6. – С. 923–941.
74. *Шаваровский Б.З.* Преобразования подобия разложимых матричных многочленов и некоторые их связи // Журн. выч. мат. и мат. физики. – 2009 – **49**, № 9. – С. 1539–1553.
75. *Шаваровский Б.З.* Разрешимость матричных уравнений в кольцах квазидиагональных матриц и подобие матричных многочленов // Журн. вич. мат. и мат. физики. – 2006. – **46**, № 8. – С. 1353–1362
76. *Щедрик В.П.* Неасоційовані матриці зі стандартним Ф-скелетом // Мат. методи і фіз-мех. поля. – 2002. – **45**, №3. – С. 32–44.
77. *Gohberg I., Lancaster P., Rodman L.* Matrix polynomials. – New York: Academic Press, 1982. – 409 p.
78. *Petrychkovych V.* Generalized equivalence of pairs of matrices // Linear Multilinear Algebra. – 2000. – **48**, № 2. – P. 179–188.
79. *Shchedryk V.* Factorization of matrices over elementary divisor domain // Algebra Discrete Math. – 2009. – № 2. – P. 79–99.