РОЗДІЛ 5

ЗВЕДЕННЯ УНІТАЛЬНОГО МАТРИЧНОГО МНОГОЧЛЕНА ПЕРЕТВОРЕННЯМ ПОДІБНОСТІ ДО КЛІТКОВО-ТРИКУТНОГО ВИГЛЯДУ

5.1. Спеціальні поліноміальні матриці

У п. 3.1 нами було введене поняття еквівалентності (точніше, напівскалярної еквівалентності, див. п. 4.1) поліноміальних матриць. А саме, поліноміальні матриці $A(x)$ і $B(x)$ (одного і того ж порядку) ми назвали напівскалярно еквівалентними, якщо правильна рівність $B(x) = CA(x)Q(x)$, де C – неособлива числова матриця, $Q(x)$ – оборотна поліноміальна матриця. Там же ми довели, що кожна поліноміальна неособлива матриця $A(x)$ напівскалярно еквівалентна до квазіунітальної матриці

$$\begin{Vmatrix} d_{11}(x) & d_{12}(x) & \dots & d_{1n}(x) \\ d_{21}(x) & d_{22}(x) & \dots & d_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}(x) & d_{n2}(x) & \dots & d_{nn}(x) \end{Vmatrix}, \tag{5.1}$$

в якій степінь $\delta_i = \deg d_{ii}$ кожного діагонального елемента $d_{ii}(x)$ строго більший від степенів усіх інших елементів $d_{ij}(x)$ і $d_{ji}(x)$, розміщених в i-му рядку і в i-му стовпці і, крім того,

$$\delta_1 \le \delta_2 \le \ldots \le \delta_n. \tag{5.2}$$

У кожному класі напівскалярно еквівалентних матриць квазіунітальна матриця не єдина, але набір показників (5.2) кожним класом матриць визначений однозначно.

Означення 5.1. Нехай поліноміальна неособлива матриця $A(x)$ напівскалярно еквівалентна до квазіунітальної матриці (5.1) з набором степенів діагональних елементів (5.2). Систему чисел $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ будемо називати *типом поліноміальної матриці* $A(x)$. Будемо говорити далі, що $A(x)$ *додатного типу*, якщо $\delta_1 > 0$.

Очевидне таке твердження.

Лема 5.1. *Кожна поліноміальна матриця* $A(x)$ *напівскалярно еквівалентна до матриці вигляду*

$$\begin{Vmatrix} E_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B(x) \end{Vmatrix}, \tag{5.3}$$

де E_p *– одинична матриця порядку* $p \geq 0$, $B(x)$ *– квазіунітальна матриця порядку* $n-p$ *додатного типу*.

Значення інваріанта p визначається такою теоремою.

Теорема 5.1. *Нехай* $\Delta(x)$ *– визначник поліноміальної матриці* $A(x)$. *Якщо* $\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\Delta) = \rho$, *то матриця* $A(x)$ *напівскалярно еквівалентна до квазіунітальної матриці* (5.3), *в якій* $p = n - \rho$.

Д о в е д е н н я. В п. 3.5 доведена формула

$$\operatorname{rang} M_{A_{k-1}(x)}(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \min(k, \delta_i), \ k \geq 1. \tag{5.4}$$

При $k = 1$ вона дає рівність

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\Delta) = n - p,$$

що і доводить теорему.

Означення 5.2. Квазіунітальна матриця (5.3) називається *спеціальною*, якщо $B(x)$ – унітальна матриця (порядку $n-p$). Спеціальна матриця має, таким чином, тип

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{p}, \underbrace{s, \ldots, s}_{n-p}).$$

З'ясуємо, за яких умов поліноміальна матриця напівскалярно еквівалентна до спеціальної матриці.

Теорема 5.2. *Нехай для поліноміальної матриці* $A(x)$ *з визначником* $\Delta(x) = \det A(x)$ *маємо* $\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\Delta) = \rho$. *Матриця* $A(x)$ *напівскалярно еквівалентна до спеціальної матриці тоді і тільки тоді, коли* $\delta = \deg \Delta(x)$ *ділиться на* ρ, $\delta = \rho s$ *і*

$$\operatorname{rang} M_{A_{s-1}(x)}(\Delta) = \rho s = \delta. \qquad (5.5)$$

Д о в е д е н н я. Нехай $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$ – тип матриці $A(x)$. Виходячи з теореми 5.1, маємо

$$\delta_1 = \ldots = \delta_p = 0 \quad (p = n - \rho).$$

Якщо $\delta_{p+1} = \ldots = \delta_n = \rho$, то, згідно з формулою (5.4), маємо рівність (5.5). Навпаки, якщо виконана умова (5.5), то, по-перше, $\delta_n \leq s$ і, по-друге, $\delta_{p+1} + \ldots + \delta_n = \rho s$, звідки $\delta_{p+1} = \ldots = \delta_n = s$ і теорема 5.2 доведена.

Повернемося до виділення лівих множників.

Теорема 5.3. *Нехай характеристичний многочлен* $\Delta(x) = \det A(x)$ *матриці* $A(x)$ *зображений у вигляді добутку* $\Delta(x) = \varphi(x)\Phi(x)$ *взаємно простих множників* $\varphi(x)$ *і* $\Phi(x)$ ($\varphi(x)$ – *унітальний*). *Якщо* $\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = \rho$, *то існує така неособлива числова матриця* Q, *що*

$$QA(x) = \begin{Vmatrix} E_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B(x) \end{Vmatrix} N(x), \tag{5.6}$$

де $p = n - \rho$, $\det B(x) = \varphi(x)$, *квазіунітальна матриця додатного типу.*

Доведення. Згідно з лемою 2.1 матрицю $A(x)$ можна записати у вигляді $A(x) = C(x)R(x)$, $\det C(x) = \varphi(x)$. Застосовуючи до матриці $C(x)$ лему 5.1 і вводячи відповідні нові позначення, одержуємо розклад

$$QA(x) = D(x)N(x),$$

де $D(x)$ – квазіунітальна матриця з визначником $\det D(x) = \varphi(x)$. Для завершення доведення залишається зауважити, що, оскільки $\varphi(x)$ і $\det N(x)$ взаємно прості, ми маємо рівності (див. (2.4))

$$\begin{gathered} \operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{A_*(x)Q}(\varphi) = \\ = \operatorname{rang} M_{N_*(x)D_*(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{D_*(x)}(\varphi), \end{gathered} \tag{5.7}$$

і, отже, згідно з теоремою 5.1

$$D(x) = \begin{Vmatrix} E_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B(x) \end{Vmatrix},$$

де $p = n - \rho$.

Теорема 5.4. *Збережемо позначення та умови теореми* 5.3. *Якщо* $\deg \varphi(x) = \rho s$ *і* $\operatorname{rang} M_{A_{s-1}(x)}(\varphi) = \rho s$, *то в розкладі* (5.6) $B(x)$ *– унітальна матриця порядку* $\rho = n - p$, *тобто лівий множник у правій частині розкладу* (5.6) *– спеціальна матриця.*

Доведення. Оскільки $(\varphi(x), \Phi(x)) = 1$, то

$$\operatorname{rang} M_{A_{s-1}(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{D_{s-1}(x)}(\varphi)$$

(див. співвідношення (3.72)). Твердження теореми 5.4 випливає тепер з теореми 5.2 (застосованої до матриці $D(x)$).

Теорема 5.5. *Якщо характеристичний многочлен* $\Delta(x)$ *поліноміальної матриці* $A(x)$ *зображений у вигляді* $\Delta(x)=\varphi(x)\Phi(x)$, *де* $\deg\varphi(x)=\rho s$ і $(\varphi(x),\Phi(x))=1$, *то для існування такої неособливої матриці* Q *над* $\mathbb{C}$, *що виконується співвідношення* (5.6), *де* $B(x)$ *– унітальна матриця порядку* $\rho=n-p$, *тобто лівий множник у правій частині розкладу* (5.6) *– спеціальна матриця, причому* $\det B(x)=\varphi(x)$, *необхідно і достатньо, щоб одночасно виконувались співвідношення*

$$\operatorname{rang} M_{A*(x)}(\varphi)=\rho,\ \operatorname{rang} M_{A_{s-1}(x)}(\varphi)=\rho s.$$

Доведення. Достатність випливає з теореми 5.4.

Необхідність одержується із взаємної простоти многочленів $\det B(x)$ і $\det N(x)$, теореми 5.2 і зауваження, що із наявності розкладу (5.6), де $B(x)$ – унітальна матриця порядку ρ, випливає (див. співвідношення (5.7)), що

$$\operatorname{rang} M_{A*(x)}(\varphi)=\operatorname{rang} M_{D*(x)}(\varphi)=\rho.$$

5.2. Виділення спеціальних множників

Розглянемо неособливий матричний многочлен

$$A(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+\cdots+A_{m-1}x+A_m, \qquad (5.8)$$

коефіцієнтами якого є $n\times n$-матриці над $\mathbb{C}$. Правильна така теорема.

Теорема 5.6. *Нехай характеристичний многочлен* $\Delta(x)$ *матричного многочлена* $A(x)$ *зображений у вигляді*

$$\Delta(x) = \varphi(x)\Phi(x) \tag{5.9}$$

($\varphi(x)$ – унітальний), причому

$$K_{\varphi} \bigcap K_{\Phi} \subset K_{n-1}. \tag{5.10}$$

Якщо

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = \rho, \tag{5.11}$$

то існує така неособлива числова матриця Q, що правильне співвідношення

$$QA(x) = \begin{Vmatrix} E_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B(x) \end{Vmatrix} D(x), \tag{5.12}$$

де $\det B(x) = \varphi(x)$, $B(x)$ *– квазіунітальна матриця додатного типу.*

Покажемо спочатку правильність таких тверджень.

Лема 5.2. *Нехай*

$$\Delta(x) = g(x)(x-\alpha)^l, \; g(\alpha) \neq 0 \text{ і } \operatorname{rang} A(\alpha) = n-1.$$

Якщо $\operatorname{rang} M_{A_*(x)}[\alpha^{(k)}] = \rho$, *де* $k \leq l$, *то існує така неособлива числова матриця* Q, *що*

$$QA(x) = \begin{Vmatrix} E_p & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B(x) \end{Vmatrix} D(x),$$

де $\det B(x) = (x-\alpha)^k$, $B(x)$ *– квазіунітальна* $\rho \times \rho$*-матриця додатного типу.*

Доведення. Очевидно, існує така неособлива числова матриця L_1, що

$$L_1 A(x) = \left\| \begin{matrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & (x-\alpha)^{l_1} \end{matrix} \right\| A_1(x),$$

де $l_1 \neq 0$ і корінь α не перетворює в нуль при підстановці $x \to \alpha$ останній рядок матриці $A_1(x)$. Якщо $l_1 < k$, то легко бачити, що існує така неособлива числова матриця L_2, що

$$L_2 L_1 A(x) = \left\| \begin{matrix} E_{n-2} & & \\ & (x-\alpha)^{l_2} & g_1(x-\alpha)+r_1 \\ & 0 & (x-\alpha)^{l_1} \end{matrix} \right\| A_2(x),$$

де $l_2 \neq 0$ і $r_1 \neq 0$, в протилежному випадку ранг матриці $A(\alpha)$ був би меншим $n-1$, причому два останні рядки матриці $A_2(\alpha)$ можна вважати лінійно незалежними. Нехай уже побудовані такі матриці $L_1, L_2, \ldots, L_q$, що

$$L_q \ldots L_2 L_1 A(x) = \left\| \begin{matrix} E_{n-q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B^{(q)}(x) \end{matrix} \right\| A_q(x),$$

де

$$B^{(q)}(x) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} (x-\alpha)^{l_q} & g_{q-1}(x)(x-\alpha)+r_{q-1} & & & * \\ & \cdots & & \cdots & \\ & & & (x-\alpha)^{l_2} & g_1(x)(x-\alpha)+r_1 \\ \mathbf{0} & & & & (x-\alpha)^{l_1} \end{matrix} \right\|,$$

всі $l_1, l_2, \ldots, l_q$, $r_1, r_2, \ldots, r_{q-1}$ відмінні від нуля і останні q рядків матриці $A_q(\alpha)$ лінійно незалежні, причому

$$\det B^{(q)}(x) = (x-\alpha)^k . \tag{5.13}$$

З умови (5.13) випливає, що $q \geq \rho$. Якщо $\rho = q$, то, як легко бачити, лема доведена. Припустимо, що $q > \rho$. У цьому випадку виділимо вказаним вище способом усі l коренів α многочлена $\det A(x)$ і переконаємося в існуванні такої неособливої числової матриці L, що

$$LA(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-h} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B(x) \end{Vmatrix} A_h(x) ,$$

де

$$B(x) =$$

$$= \begin{Vmatrix} (x-\alpha)^{l_h} & g_{h-1}(x)(x-\alpha)+r_{h-1} & & & * \\ & \cdots & & \cdots & \\ & & & (x-\alpha)^{l_2} & g_1(x)(x-\alpha)+r_1 \\ \mathbf{0} & & & & (x-\alpha)^{l_1} \end{Vmatrix},$$

$A_h(\alpha)$ – оборотна матриця і всі $l_1, l_2, \ldots, l_h$, $r_1, r_2, \ldots, r_{h-1}$ відмінні від нуля, $h \leq n$. Зауважимо, що (див. співвідношення (5.7))

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}[\alpha^{(k)}] = \operatorname{rang} M_{B_*(x)}[\alpha^{(k)}] \tag{5.14}$$

і, як буде показано нижче, вже зважаючи на вигляд першого рядка матриці $B_*(x)$, можна робити висновок про величину рангу матриці $M_{B_*(x)}[\alpha^{(k)}]$ а, значить, враховуючи (5.14), і про величину рангу матриці $M_{A_*(x)}[\alpha^{(k)}]$.

Легко бачити, що перший рядок матриці $B_*(x)$ має вигляд

$$\left\| \begin{matrix} (x-\alpha)^{l_1+l_2+\ldots+l_{h-1}} \\ [g_{h-1}^1(x)(x-\alpha)+r_{h-1}](x-\alpha)^{l_1+l_2+\ldots+l_{h-2}} \\ [g_{h-2}^1(x)(x-\alpha)+r_{h-1}r_{h-2}](x-\alpha)^{l_1+l_2+\ldots+l_{h-3}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [g_{\rho}^1(x)(x-\alpha)+r_{h-1}\ldots r_{\rho}](x-\alpha)^{l_1+l_2+\ldots+l_{\rho-1}} \\ [g_{\rho-1}^1(x)(x-\alpha)+r_{h-1}\ldots r_{\rho}r_{\rho-1}](x-\alpha)^{l_1+l_2+\ldots+l_{\rho-2}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [g_3^1(x)(x-\alpha)+r_{h-1}\ldots r_3](x-\alpha)^{l_1+l_2} \\ [g_2^1(x)(x-\alpha)+r_{h-1}\ldots r_3r_2](x-\alpha)^{l_1} \\ g_1^1(x)(x-\alpha)+r_{h-1}\ldots r_3r_2r_1 \end{matrix} \right\|^T.$$

Справді, елементи цього рядка будуть алгебраїчними доповненнями відповідних елементів першого стовпця матриці $B(x)$. Утворення першого елемента цього рядка очевидне. Решта $h-1$ алгебраїчних доповнень мають вигляд

$$A_{h-i-1}(x) = (-1)^{h-i+1}\begin{vmatrix} H(x) & * \\ \mathbf{0} & G(x) \end{vmatrix} = (-1)^{h-i+1}\left|H(x)\right|\left|G(x)\right|,$$

де

$$H(x) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} g_{h-1}(x)(x-\alpha)+r_{h-1} & & & * \\ & \ldots & \ldots & \\ & (x-\alpha)^{l_{i+2}} & g_{i+1}(x)(x-\alpha)+r_{i+1} & \\ \mathbf{0} & & (x-\alpha)^{l_{i+1}} & g_i(x)(x-\alpha)+r_i \end{matrix} \right\|,$$

$$G(x)=\left\|\begin{matrix}(x-\alpha)^{l_{i-1}} & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & (x-\alpha)^{l_1}\end{matrix}\right\|,$$

$$(-1)^{h-i+1}\left|H\right|=g_i^1(x)(x-\alpha)+r_{h-1}r_{h-2}\ldots r_i,\ i=1,2,\ldots,h-1,$$

$$\left|G(x)\right|=(x-\alpha)^{l_1+l_2+\ldots+l_{i-1}}.$$

Звідси випливає, що $A_{h-i,1}(x)$ має вигляд

$$A_{h-i,1}(x)=(x-\alpha)^{l_1+l_2+\ldots+l_{i-1}}[g_i^1(x)(x-\alpha)+r_{h-1}r_{h-2}\ldots r_i].$$

Розглянемо лише перші рядки матриць

$$B_*(\alpha),B_*^{(l_1)}(\alpha),B_*^{(l_1+l_2)}(\alpha),\ldots,B_*^{(l_1+\ldots+l_{\rho-1})}(\alpha),\ldots,B_*^{(k-1)}(\alpha),$$

де $B_*^{(r)}(\alpha)$ – значення похідної порядку r від матриці $B_*(x)$, $r=0,l_1,l_2,\ldots,k-1$. Нагадаємо, що $l_1+l_2+\ldots+l_\rho=k-1$. Зауважимо, що утворена з цих рядків підматриця матриці $M_{B_*(x)}[\alpha^{(k)}]$ має вигляд

$$\left\|\begin{matrix}0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & q_1\\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & q_2 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\ 0 & \ldots & 0 & q_\rho & & & \\ 0 & \ldots & q_{\rho+1} & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & & *\end{matrix}\right\|,$$

де $q_j=r_{h-1}r_{h-2}\ldots r_j$, $j=1,2,\ldots,k-1$.

З цього зауваження випливає, що матриця $M_{B_*(x)}[\alpha^{(k)}]$ має більше, ніж ρ, лінійно незалежних стовпців, що, згідно з співвідношенням (5.14), суперечить умові леми. Отже, лема доведена.

Лема 5.3. *Нехай заданий матричний многочлен* (5.8) *з характеристичним поліномом вигляду*

$$\Delta(x) = g(x)(x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2},\ g(\alpha_i) \neq 0,$$

причому $\operatorname{rang} A(\alpha_i) = n-1$, $i = 1, 2$. *Якщо*

$$\operatorname{rang} M_{A*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}] = \rho,$$

де $k_i \le l_i$, $i = 1, 2$, *то існує така неособлива матриця* Q *над* $\mathbb{C}$, *що виконується співвідношення*

$$QA(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B(x) \end{Vmatrix} A_1(x),$$

де $\det B(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}$, $B(x)$ – *квазіунітальна* $\rho\times\rho$-*матриця додатного типу*.

Доведення. Очевидно, що

$$\operatorname{rang} M_{A*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}] \ge \operatorname{rang} M_{A*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}].$$

Нехай $\operatorname{rang} M_{A*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}] = r$, $r \le \rho$.

На основі леми 5.2 існує така неособлива матриця Q_1 над $\mathbb{C}$, що

$$Q_1A(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B^{(r)}(x) \end{Vmatrix} D(x),$$

де $B^{(r)}(x)$ – поліноміальна $r\times r$-матриця , причому

$$\det B^{(r)}(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}.$$

Як і при доведенні леми 5.2, легко показати існування такої неособливої матриці Q_2 над $\mathbb{C}$, що

$$Q_2 Q_1 A(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-r} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_1^{(r)}(x) \end{Vmatrix} A_2(x), \qquad (5.15)$$

де $\det B_1^{(r)}(x) = (x-\alpha_2)^{k_2}(x-\alpha_2)^t$, $0 \le t \le k_2$, причому останні r матриці $A_2(\alpha_2)$ можна вважати лінійно незалежними. Якщо $t = k_2$, то $r = \rho$, в протилежному випадку, беручи до уваги вигляд матриці (5.15) і твердження 2.7, $\operatorname{rang} M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}]$ був би менший від ρ, що суперечить умові леми. Нехай $t < k_2$. Тоді, очевидно, існує така оборотна над $\mathbb{C}$ матриця Q_3, що виконується співвідношення

$$Q_3 Q_2 Q_1 A(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-m} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \begin{array}{cc} B_2^{(m-r)}(x) & * \\ \mathbf{0} & B_1^{(r)}(x) \end{array} \end{Vmatrix} A_3(x) =$$

$$= \begin{Vmatrix} C(x) & * \\ \mathbf{0} & B_1^{(r)}(x) \end{Vmatrix} A_3(x), \qquad (5.16)$$

де $\det C(x) = (x-\alpha_2)^{l_2 - t}$ і $A_3(\alpha_2)$ – оборотна матриця**.**

Очевидно,

$$A_*(x) Q_{1*} Q_{2*} Q_{3*} =$$

$$= A_{3*}(x) \left\Vert \begin{array}{c|c} C_*(x)(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^t & * \\ \hline & B_{1*}^{(r)}(x)(x-\alpha_2)^{l_2-t} \end{array} \right\Vert . \qquad (5.17)$$

Зауважимо, що, згідно з твердженням 2.8,

$$\begin{cases} \operatorname{rang} M_{A_*(x)Q_{1*}Q_{2*}Q_{3*}}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}] = \operatorname{rang} M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}], \\ \operatorname{rang} M_{A_*(x)Q_{1*}Q_{2*}Q_{3*}}[\alpha_1^{(k_1)}] = \operatorname{rang} M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}]. \end{cases} \tag{5.18}$$

Беручи до уваги вигляд матриці (5.17) і співвідношення (5.18), одержимо

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}] =$$

$$= \operatorname{rang} M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}] + \operatorname{rang} M_{C_*(x)(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}}[\alpha_2^{(k_2)}].$$

Оскільки $\operatorname{rang} M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}] = \rho$ за умовою леми, а $\operatorname{rang} M_{A_*(x)}[\alpha_1^{(k_1)}] = r$, то

$$\operatorname{rang} M_{C_*(x)(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^t}[\alpha_2^{(k_2)}] = \rho - r. \tag{5.19}$$

Зауважимо, що, виходячи з твердження 2.10,

$$\operatorname{rang} M_{C_*(x)(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^t}[\alpha_2^{(k_2)}] = \operatorname{rang} M_{C_*(x)}[\alpha_2^{(k_2-t)}].$$

Отже, згідно співвідношення (5.19), маємо

$$\operatorname{rang} M_{C_*(x)}[\alpha_2^{(k_2-t)}] = \rho - r. \tag{5.20}$$

Тепер, застосувавши до матриці $C(x)$ лему 5.2, на основі співвідношення (5.20) переконаємося в існуванні такої оборотної матриці $Q = Q_4Q_3Q_2Q_1$, що

$$QA(x) = \left\| \begin{array}{c|cc} E_{n-\rho} & & \\ \hline & B_2^{(\rho-r)}(x) & * \\ & \mathbf{0} & B_1^{(r)}(x) \end{array} \right\| A_4(x) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B^{(\rho)}(x) \end{matrix} \right\| A_4(x),$$

де

$$\det B_1^{(r)}(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^t, \qquad \det B_2^{(\rho-r)}(x) = (x-\alpha_2)^{k_2-t}.$$

Справді, підматриця * у співвідношенні (5.16) знаходиться у правому верхньому куті першого співмножника і впливати на можливість виділення блока $\rho - r$ -го порядку не буде, оскільки, якщо $C(x) = C_1(x)C_2(x)$, то підставивши у співвідношення (5.16) замість $C(x)$ добуток $C_1(x)C_2(x)$, одержимо

$$\left\|\begin{matrix} C_1(x)C_2(x) & * \\ \mathbf{0} & B_1^{(r)}(x) \end{matrix}\right\| A_3(x) = \left\|\begin{matrix} C_1(x) & * \\ \mathbf{0} & B_1^{(r)}(x) \end{matrix}\right\| \left\|\begin{matrix} C_2(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_r \end{matrix}\right\| A_3(x) =$$

$$= \left\|\begin{matrix} C_1(x) & * \\ \mathbf{0} & B_1^{(r)}(x) \end{matrix}\right\| A_4(x),$$

де, можна вважати, що

$$C_1(x) = \left\|\begin{matrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B^{(\rho-r)}(x) \end{matrix}\right\|.$$

Цим лема 5.3 доведена.

У правильності теореми 5.6 тепер легко переконатися за допомогою індукції по числу різних коренів α_i многочлена $\varphi(x)$, застосовуючи лему 5.2 і міркування, використані при доведенні леми 5.3.

Лема 5.4. *Нехай поліноміальна матриця* (5.8) *зображена у вигляді*

$$A(x) = \left\|\begin{matrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B^{(\rho)}(x) \end{matrix}\right\| A_1(x), \tag{5.21}$$

де $B^{(\rho)}(x)$ *– поліноміальна матриця порядку* ρ,

$$\det B^{(\rho)}(x) = b(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \ldots (x-\alpha_t)^{k_t},$$

$k_1 + k_2 + \ldots + k_t = \rho s$, $b \in \mathbb{C}$, *причому*

$$K_{\det B^{(\rho)}(x)} \bigcap K_{\det A_1(x)} \subseteq K_{n-1}. \qquad (5.22)$$

Щоб для матриці $B^{(\rho)}(x)$ *існувала така оборотна матриця* $R^{(\rho)}(x)$ *над* $\mathbb{C}[x]$, *що*

$$B^{(\rho)}(x)R^{(\rho)}(x) = Ex^s + B_1 x^{s-1} + \cdots + B_{s-1}x + B_s,$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\operatorname{rang} M_{A_{s-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \ldots, \alpha_t^{(k_t)}] = \rho s. \qquad (5.23)$$

Н е о б х і д н і с т ь. Припустимо, що

$$A(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B(x) \end{Vmatrix} A_1(x), \qquad (5.24)$$

де $B(x) = B^{(\rho)}(x)R^{(\rho)}(x)$ – унітальна матриця степеня s. Тоді, як легко бачити, при наявності для поліноміальної матриці $A(x)$ зображення (5.21) правильні леми 3.8 – 3.11. Зміни в позначеннях, які треба ввести – очевидні. Отже, повторюючи міркування, використані при доведенні теореми 3.18, одержуємо

$$\operatorname{rang} M_{A_{s-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \ldots, \alpha_t^{(k_t)}] \geq \rho s. \qquad (5.25)$$

Оскільки кількість ненульових стовпців в матриці

$$M_{A_{s-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \ldots, \alpha_t^{(k_t)}],$$

згідно з (5.24), не більша, ніж ρs, то нерівність (5.25) не може бути строгою і необхідність, таким чином, доведена.

Д о с т а т н і с т ь. Нехай виконується умова леми, тобто

$$\operatorname{rang} M_{A_{s-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \ldots, \alpha_t^{(k_t)}] = \rho s, \qquad (5.26)$$

де, згідно із співвідношенням (5.21),

$$A_{s-1}(x) =$$

$$= A_{1*}(x)\begin{Vmatrix} E_{n-\rho}\det B^{(\rho)}(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B^{(\rho)}(x) \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} E & Ex & \ldots & Ex^{s-1} \end{Vmatrix}. \quad (5.27)$$

Позначимо через $D_{s-1}(x)$ матрицю

$$D_{s-1}(x) =$$

$$= \begin{Vmatrix} E_{n-\rho}\det B^{(\rho)}(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B^{(\rho)}(x) \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} E & Ex & \ldots & Ex^{s-1} \end{Vmatrix}. \quad (5.28)$$

Тоді, згідно із (5.27),

$$A_{s-1}(x) = A_{1*}(x)D_{s-1}(x)\,. \quad (5.29)$$

Якщо тепер скористатися співвідношенням (2.7), використаним при доведенні твердження 2.8, і фактом, що ранг добутку двох матриць не більший рангу кожного із співмножників, то на основі (5.26) і (5.29) прийдемо до висновку, що

$$\operatorname{rang} M_{D_{s-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \ldots, \alpha_t^{(k_t)}] \geq \rho s\,. \quad (5.30)$$

Оскільки матриця $M_{D_{s-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \ldots, \alpha_t^{(k_t)}]$ на основі вигляду матриці $D_{s-1}(x)$ має лише ρs ненульових стовпців, то, враховуючи (5.30), робимо висновок, що

$$\operatorname{rang} M_{D_{s-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \ldots, \alpha_t^{(k_t)}] = \rho s\,. \quad (5.31)$$

Із співвідношень (5.28), (5.31) випливає, що

$$\operatorname{rang} M_{B_{s-1}^{(\rho)}(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \ldots, \alpha_t^{(k_t)}] = \rho s\,, \quad (5.32)$$

де $B_{s-1}^{(\rho)}(x) = B_{*}^{(\rho)}(x)\begin{Vmatrix} E_\rho & E_\rho x & \ldots & E_\rho x^{s-1} \end{Vmatrix}$.

Тепер, згідно з теоремою 3.4, із рівності (5.32) випливає існування такої оборотної матриці $R^{(\rho)}(x)$ над $\mathbb{C}[x]$, що матричний многочлен $B^{(\rho)}(x)R^{(\rho)}(x)$ – унітальний. Лема доведена.

Теорема 5.7. *Нехай*

$$A(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_{m-1}x + A_m, \ \deg\det A(x) > 0 .$$

A_j, $j = 0, 1, \ldots, m$ – $n \times n$*-матриці над* $\mathbb{C}$. *І нехай характеристичний поліном* $\Delta(x)$ *матричного многочлена* $A(x)$ *зображено у вигляді* $\Delta(x) = \varphi(x)\Phi(x)$, *де*

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \ldots (x - \alpha_t)^{k_t}, \qquad k_1 + k_2 + \ldots + k_t = \rho s,$$

$\rho \le n$, *причому* $K_\varphi \cap K_\Phi \subset K_{n-1}$. *Щоб існувала така неособлива матриця* S *над* $\mathbb{C}$, *що*

$$SA(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B(x) \end{Vmatrix} A_1(x),$$

$B(x)$ – *унітальна поліноміальна* $\rho \times \rho$*-матриця, тобто*

$$B(x) = Ex^s + B_1x^{s-1} + \cdots + B_{s-1}x + B_s,$$

причому $\det B(x) = \varphi(x)$, *необхідно і достатньо, щоб одночасно виконувалися дві умови*:

$$\operatorname{rang} M_{A*(x)}(\varphi) = \rho, \tag{5.33}$$

$$\operatorname{rang} M_{A_{s-1}(x)}(\varphi) = \rho s. \tag{5.34}$$

Доведення безпосередньо випливає з теореми 5.6 і леми 5.4. Зауважимо що, якщо $\rho = n$, то умова (5.33) випливає з умови (5.34) і теорема 3.18 випливає з теореми 5.7 як наслідок.

Відмітимо одну необхідну умову виділення спеціального множника з матричного многочлена.

Теорема 5.8. *Нехай характеристичний поліном матричного многочлена* $A(x)$ *зображено у вигляді* $\Delta(x) = \varphi(x)\Phi(x)$, *де*

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \dots (x-\alpha_t)^{k_t} ,$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_t = \rho s , \qquad \rho \le n .$$

Щоб для матричного многочлена $A(x)$ *існувала така неособлива матриця* S *над* $\mathbb{C}$, *що*

$$SA(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B^{(\rho)}(x) \end{Vmatrix} D(x) = B(x)D(x) , \tag{5.35}$$

де $B^{(\rho)}(x)$ *– унітальна* $\rho\times\rho$*-матриця вигляду*

$$B^{(\rho)}(x) = Ex^s + B_1^{(\rho)}x^{s-1} + \dots + B_{s-1}^{(\rho)}x + B_s^{(\rho)} ,$$

необхідно, щоб

$$\operatorname{rang} M_{A_{s-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \dots, \alpha_t^{(k_t)}] =$$
$$= \operatorname{rang} M_{A_s(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \dots, \alpha_t^{(k_t)}].$$

Доведення. Нехай існує така неособлива матриця S над $\mathbb{C}$, що виконується співвідношення (5.35). Без обмеження загальності можна вважати, що матриця $B^{(\rho)}(x)$ має вигляд

$$B^{(\rho)}(x) = E_\rho x^s - B_1^{(\rho)}x^{s-1} - \dots - B_{s-1}^{(\rho)}x - B_s^{(\rho)} .$$

Беручи до уваги співвідношення (5.35), маємо

$$A_*(x)S_* = D_*(x)B_*(x) = D_*(x)\begin{Vmatrix} E_{n-\rho}\det B(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_*^{(\rho)}(x) \end{Vmatrix} .$$

Помноживши матрицю $A_*(x)S_*$ зліва на

$$B(x) = B_0x^s - B_1x^{s-1} - \dots - B_{s-1}x - B_s ,$$

де

$$B_0 = \left\| \begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & E_\rho \end{array} \right\|, \; B_s = \left\| \begin{array}{c|c} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & B_s^{(\rho)} \end{array} \right\|, \; B_i = \left\| \begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & B_i^{(\rho)} \end{array} \right\|, \; i = 1, 2, \ldots, s-1,$$

одержимо

$$A_*(x) S_* B(x) = D_*(x) B_*(x)(B_0 x^s - B_1 x^{s-1} - \cdots - B_{s-1} x - B_s) =$$

$$= D_*(x) \det B(x) . \qquad (5.36)$$

Підставляючи в тотожність (5.36) замість x корені $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$ і беручи відповідну кількість похідних у випадку їх кратності, одержимо матричну тотожність вигляду

$$M_{A_*(x) S_* x^s} [\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_t^{(k_t)}] B_0 - M_{[SA(x)]_{s-1}} [\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_t^{(k_t)}] \left\| \begin{matrix} B_s \\ \vdots \\ B_1 \end{matrix} \right\| = \mathbf{0} .$$

Враховуючи будову матриць $M_{A_*(x) S_* x^s} [\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_t^{(k_t)}]$ і B_0, зауважимо, що

$$M_{A_*(x) S_* x^s} [\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_t^{(k_t)}] B_0 = M_{A_*(x) S_* x^s} [\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_t^{(k_t)}] .$$

Отже, виконується тотожність

$$M_{A_*(x) S_* x^s} [\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_t^{(k_t)}] = M_{[SA(x)]_{s-1}} [\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_t^{(k_t)}] \left\| \begin{matrix} B_s \\ \vdots \\ B_1 \end{matrix} \right\| .$$

Це означає, що матричне рівняння

$$M_{[SA(x)]_{s-1}} [\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_t^{(k_t)}] \left\| \begin{matrix} X_s \\ \vdots \\ X_1 \end{matrix} \right\| = M_{A_*(x) S_* x^s} [\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_t^{(k_t)}],$$

де X_i, $i=1,2,\ldots,s$, – невідомі $n\times n$-матриці, має розв'язок. А це означає (див. твердження 2.3), що

$$\operatorname{rang} M_{[SA(x)]_{s-1}}[\alpha_1^{(k_1)},\ldots,\alpha_t^{(k_t)}]=$$

$$=\operatorname{rang}\left\| M_{[SA(x)]_{s-1}}[\alpha_1^{(k_1)},\ldots,\alpha_t^{(k_t)}] \quad M_{A_*(x)S_*x^s}[\alpha_1^{(k_1)},\ldots,\alpha_t^{(k_t)}]\right\|.$$

Зауваживши, що

$$\left\| M_{[SA(x)]_{s-1}}[\alpha_1^{(k_1)},\ldots,\alpha_t^{(k_t)}] \quad M_{A_*(x)S_*x^s}[\alpha_1^{(k_1)},\ldots,\alpha_t^{(k_t)}]\right\| =$$

$$= M_{[SA(x)]_s}[\alpha_1^{(k_1)},\ldots,\alpha_t^{(k_t)}],$$

і, зважаючи на твердження 2.5,

$$M_{[SA(x)]_{s-1}}[\alpha_1^{(k_1)},\ldots,\alpha_t^{(k_t)}]=$$

$$= M_{A_{s-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)},\ldots,\alpha_t^{(k_t)}]\operatorname{diag}(\underbrace{S_*,\ldots,S_*}_{s})$$

і

$$M_{[SA(x)]_s}[\alpha_1^{(k_1)},\ldots,\alpha_t^{(k_t)}]=$$

$$= M_{A_s(x)}[\alpha_1^{(k_1)},\ldots,\alpha_t^{(k_t)}]\operatorname{diag}(\underbrace{S_*,\ldots,S_*}_{s+1}).$$

Бачимо, що теорема доведена.

5.3. Зведення матричних многочленів до квазітрикутного і квазідіагонального виглядів

Нехай маємо скінчений набір $n\times n$-матриць над $\mathbb{C}$

$$A_1, A_2, \ldots, A_s\,. \tag{5.37}$$

Як відомо, задача одночасного зведення матриць (5.37) одним неособливим перетворенням до більш простих форм (квазітрикутної, квазідіагональної та інших) є досить складною. Легко бачити, що ця задача еквівалентна задачі зведення (одним неособливим перетворенням) до згаданих вище форм матричного многочлена вигляду

$$A(x) = Ex^s + A_1x^{s-1} + \cdots + A_{s-1}x + A_s\,, \tag{5.38}$$

коефіцієнтами якого є відповідні матриці з набору (5.37).

У цьому підрозділі при досить сильних обмеженнях у термінах, введених у двох попередніх підрозділах, будуть указані умови зведення (одним неособливим перетворенням) матричного многочлена (5.38) до квазітрикутного (зокрема до трикутного) і квазідіагонального видів.

Теорема 5.9. *Нехай характеристичний поліном* $\Delta(x)$ *матричного многочлена* (5.38) *зображено у вигляді* $\Delta(x) = \varphi(x)\Phi(x)$, *де* $\varphi(x)$ *– унітальний поліном степеня* ρs, $\rho < n$, *причому*

$$K_\varphi \bigcap K_\Phi \subset K_{n-1}\,. \tag{5.39}$$

Щоб існувала така неособлива матриця L *над* $\mathbb{C}$, *що*

$$LA(x)L^{-1} = \begin{Vmatrix} A_1^{(n-\rho)}(x) & * \\ \mathbf{0} & A_2^{(\rho)}(x) \end{Vmatrix}, \tag{5.40}$$

де $\rho\times\rho$*-матриця* $A_2^{(\rho)}(x)$ *така, що* $\det A_2^{(\rho)}(x) = \varphi(x)$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$\operatorname{rang} M_{A*(x)}(\varphi) = \rho\,. \tag{5.41}$$

Доведення. Достатність. Згідно з теоремою 5.6, при виконанні умови (5.41) існує така неособлива матриця Q над $\mathbb{C}$, що виконується співвідношення

$$QA(x)=\begin{Vmatrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M^{(\rho)}(x) \end{Vmatrix} N(x), \tag{5.42}$$

де $M^{(\rho)}(x)$ – $\rho\times\rho$-матриця, причому $\det M^{(\rho)}(x)=\varphi(x)$. Помноживши співвідношення (5.42) справа на Q^{-1}, одержимо

$$QA(x)Q^{-1}=\begin{Vmatrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M^{(\rho)}(x) \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} C_{11}^{(n-\rho)}(x) & C_{12}(x) \\ C_{21}(x) & C_{22}^{(\rho)}(x) \end{Vmatrix}. \tag{5.43}$$

Із співвідношення (5.43) випливає, що

$$M^{(\rho)}(x)C_{22}^{(\rho)}(x)=E_{\rho}x^{s}+A_1^{(\rho)}x^{s-1}+\dots+A_{s-1}^{(\rho)}x+A_s^{(\rho)}. \tag{5.44}$$

Оскільки $\deg\det M^{(\rho)}(x)=\deg\varphi(x)=\rho s$, то, враховуючи співвідношення (5.44), $\det C_{22}^{(\rho)}(x)\in\mathbb{C}$, отже, поліноміальна матриця $C_{22}^{(\rho)}(x)$ – оборотна над $\mathbb{C}[x]$.

Тепер, враховуючи співвідношення (5.43) і (5.44), згідно з лемою 5.4, одержуємо

$$\operatorname{rang} M_{(QA(x)Q^{-1})_{s-1}}(\varphi)=\rho s. \tag{5.45}$$

Оскільки

$$\operatorname{rang} M_{(QA(x)Q^{-1})_{s-1}}(\varphi)=\operatorname{rang} M_{A_{s-1}(x)}(\varphi),$$

то, зважаючи на співвідношення (5.45), маємо $\operatorname{rang} M_{A_{s-1}(x)}(\varphi)=\rho s$. Із останнього співвідношення, згідно з теоремою 5.7, випливає існування такої неособливої числової матриці L, що

$$LA(x)=\begin{Vmatrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B(x) \end{Vmatrix} C(x), \tag{5.46}$$

де $B(x)$ – унітальна поліноміальна $\rho \times \rho$-матриця степеня s, тобто

$$B(x) = Ex^s + B_1 x^{s-1} + \cdots + B_{s-1}x + B_s, \qquad (5.47)$$

причому $\det B(x) = \varphi(x)$.

Помноживши співвідношення (5.46) справа на L^{-1}, одержимо

$$LA(x)L^{-1} = \begin{Vmatrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B(x) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} C_{11}(x) & C_{12}(x) \\ C_{21}(x) & C_{22}(x) \end{Vmatrix}.$$

Враховуючи тепер вигляд матриць $LA(x)L^{-1}$, $B(x)$ і лему 3.1, робимо висновок, що $C_{21}(x) = \mathbf{0}$, $C_{22}(x) = E$. Таким чином, достатність доведено.

Н е о б х і д н і с т ь випливає безпосередньо з теореми 5.7 і зауваження, що

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{L_*^{-1}A_*(x)L_*}(\varphi),$$

де $L_*^{-1}A_*(x)L_*$ – взаємна матриця матриці $LA(x)L^{-1}$.

Наслідок 5.1. *Нехай характеристичний многочлен* $\Delta(x)$ *матричного многочлена* (5.38) *зображено у вигляді* $\Delta(x) = \varphi(x)\Phi(x)$, *де* $\varphi(x)$ *– унітальний поліном степеня* ρs, $\rho < n$, *причому многочлени* $\varphi(x)$ і $\Phi(x)$ *– взаємно прості. Щоб існувала така неособлива числова матриця* L, *що*

$$LA(x)L^{-1} = \begin{Vmatrix} A_1(x) & * \\ \mathbf{0} & A_2(x) \end{Vmatrix},$$

де $A_2(x)$ *– унітальна поліноміальна* $\rho \times \rho$*-матриця і*

$$\det A_2(x) = \varphi(x),$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = \rho .$$

Доведення. Оскільки в нашому випадку перетин $K_\varphi \bigcap K_\Phi$ – порожній, то сформульоване твердження випливає безпосередньо з теореми 5.9.

Теорема 5.10. *Нехай характеристичний поліном матричного многочлена* (5.38) *зображено у вигляді*

$$\Delta(x) = \varphi(x)\Phi(x),$$

де $\varphi(x)$ *– унітальний многочлен степеня* ρs, $\rho < n$ *і многочлени* $\varphi(x)$ і $\Phi(x)$ *– взаємно прості. Щоб для унітального матричного многочлена* (5.38) *існувала така неособлива матриця* S *над* $\mathbb{C}$, *що*

$$SA(x)S^{-1} = \left\| \begin{matrix} A_1^{(n-\rho)}(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2^{(\rho)}(x) \end{matrix} \right\|, \tag{5.48}$$

де $A_1^{(n-\rho)}(x)$, $A_2^{(\rho)}(x)$ *– унітальні матричні многочлени відповідно порядків* $n-\rho$ і ρ, $\det A_2^{(\rho)}(x) = \varphi(x)$, *необхідно і достатньо, щоб одночасно виконувались співвідношення*

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = \rho, \tag{5.49}$$

$$\operatorname{rang} M_{A_*^T(x)}(\varphi) = \rho, \tag{5.50}$$

де $A_*^T(x)$ *– транспонована матриця матриці* $A(x)$.

Доведення. Необхідність. Співвідношення (5.49) випливає безпосередньо із наслідку 5.1. Для доведення правильності співвідношення (5.50) застосуємо до матриці $SA(x)S^{-1}$ операцію транспонування. Одержимо

$$(SA(x)S^{-1})^T = (S^{-1})^T A^T(x)S^T = \begin{Vmatrix} [A_1^{(n-\rho)}(x)]^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [A_2^{(\rho)}(x)]^T \end{Vmatrix}.$$

Із останнього співвідношення випливає

$$(S^{-1})^T A^T(x) =$$

$$= \begin{Vmatrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [A_2^{(\rho)}(x)]^T \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} [A_1^{(n-\rho)}(x)]^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_\rho \end{Vmatrix} (S^T)^{-1}. \quad (5.51)$$

Оскільки взаємна матриця матриці $A^T(x)$ має вигляд $A_*^T(x)$, то на основі наслідку 5.1 (див. також теорему 5.5) із співвідношення (5.51) випливає, що

$$\operatorname{rang} M_{A_*^T(x)}(\varphi) = \rho,$$

де $\varphi(x) = \det[A_2^{(\rho)}(x)]^T$.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай виконані умови теореми (5.49) і (5.50). Із виконання умови (5.49), згідно з наслідком 5.1, випливає існування такої неособливої числової матриці L, що

$$LA(x)L^{-1} = \begin{Vmatrix} A_1(x) & C_1(x) \\ \mathbf{0} & A_2(x) \end{Vmatrix},$$

де $A_1(x)$, $A_2(x)$ мають порядки відповідно $n-\rho$ і ρ, причому $\det A_2(x) = \varphi(x)$. Тоді

$$[LA(x)L^{-1}]^T = \begin{Vmatrix} A_1^T(x) & \mathbf{0} \\ C_1^T(x) & A_2^T(x) \end{Vmatrix}$$

і взаємна матриця матриці $[LA(x)L^{-1}]^T$ має вигляд

$$[LA(x)L^{-1}]_*^T = \left\| \begin{matrix} A_{1*}^T(x)\det A_2(x) & \mathbf{0} \\ C_2(x) & A_{2*}^T(x)\det A_1(x) \end{matrix} \right\| .$$

Оскільки $A_2(x)$, а значить і $A_2^T(x)$ – унітальний матричний многочлен і поліноми $\det A_1(x)$ і $\varphi(x)$ – взаємно прості, то

$$\operatorname{rang} M_{A_{2*}^T(x)\det A_1(x)}(\varphi) = \rho . \tag{5.52}$$

Враховуючи співвідношення (5.50), (5.52) і твердження 2.7, бачимо, що для матриці $[LA(x)L^{-1}]_*^T$ існує така оборотна матриця Q над $\mathbb{C}$, що

$$[LA(x)L^{-1}]_*^T Q = \left\| \begin{matrix} A_{1*}^T(x)\det A_2(x) & \mathbf{0} \\ C(x)\det A_2(x) & A_{2*}^T(x)\det A_1(x) \end{matrix} \right\| . \tag{5.53}$$

Помноживши останню рівність справа на матрицю $Q^{-1}[LA(x)L^{-1}]^T$, одержимо

$$[LA(x)L^{-1}]_*^T QQ^{-1}[LA(x)L^{-1}]^T = E\det A_1(x)\det A_2(x) .$$

Звідси одержуємо таке співвідношення

$$C(x)\det A_2(x)A_1^T(x) + A_{2*}^T(x)\det A_1(x)B(x) = \mathbf{0} . \tag{5.54}$$

$B(x)$ одержується множенням Q^{-1} справа на $[LA(x)L^{-1}]^T$.

Із рівності (5.54) випливає, що

$$C(x)A_1^T(x) = M\det A_1(x) = MA_1^T(x)A_{1*}^T(x) ,$$

або

$$C(x) = MA_{1*}^T(x) , \tag{5.55}$$

M – матриця над $\mathbb{C}$, оскільки максимальний степінь кожного з доданків співвідношення (5.54) дорівнює ns . Із співвідношень (5.53) і (5.55) випливає, що

$$[LA(x)L^{-1}]_*^T Q = \begin{Vmatrix} A_{1*}^T(x)\det A_2(x) & \mathbf{0} \\ MA_{1*}^T(x)\det A_2(x) & A_{2*}^T(x)\det A_1(x) \end{Vmatrix}.$$

З останнього співвідношення випливає існування такої неособливої числової матриці R, що

$$R[LA(x)L^{-1}]_*^T Q = \begin{Vmatrix} A_{1*}^T(x)\det A_2(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{2*}^T(x)\det A_1(x) \end{Vmatrix}.$$

Звідси випливає, що

$$R^{-1}LA(x)L^{-1}Q^{-1} = \begin{Vmatrix} A_1(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2(x) \end{Vmatrix},$$

причому легко бачити, що $R^{-1} = Q$. Цим достатність доведена.

Теорема 5.11. *Нехай матричний многочлен* (5.38) *такий*, *що* $\det A(x) = x^{ns}$ *і* $\operatorname{rang} A(0) = n-1$. *Щоб існувала така неособлива матриця* S *над* $\mathbb{C}$, *що*

$$SA(x)S^{-1} = \begin{Vmatrix} x^s & & & * \\ & x^s & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & x^s \end{Vmatrix}, \qquad (5.56)$$

необхідно і достатньо, *щоб одночасно виконувались співвідношення*

$$\begin{aligned} &\operatorname{rang} M_{A_*(x)}[0^{(s)}] = 1, \\ &\operatorname{rang} M_{A_*(x)}[0^{(2s)}] = 2, \\ &\qquad\vdots \\ &\operatorname{rang} M_{A_*(x)}[0^{((n-1)s)}] = n-1. \end{aligned} \qquad (5.57)$$

Доведення. Якщо для матриці $A(x)$ існує така неособлива числова матриця S, що виконується співвідношення (5.56), то необхідність виконання умов (5.57) випливає безпосередньо з вигляду матриці $SA(x)S^{-1}$ і теореми 5.9.

Достатність доведемо індукцією по n. Припустимо, що для матриць $n-1$-го порядку теорема правильна. Оскільки $\operatorname{rang} M_{A_*(x)}[0^{(s)}]=1$, то на основі теореми 5.9 існує така неособлива матриця S_1, що

$$S_1 A(x) S_1^{-1} = \left\| \begin{matrix} A_1(x) & & & * \\ & & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \dots & 0 & x^s \end{matrix} \right\|. \qquad (5.58)$$

Тоді

$$(S_1 A(x) S_1^{-1})_* = S_{1*}^{-1} A_*(x) S_{1*} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} x^s A_{1*}(x) & & & * \\ & & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \dots & 0 & \det A_1(x) \end{matrix} \right\|. \qquad (5.59)$$

Звідси на основі вигляду матриці (5.59) і того, що $\operatorname{rang} A_*(0)=1$, випливає

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}[0^{(ks)}] = \operatorname{rang} M_{(SA(x)S^{-1})_*}[0^{(ks)}] =$$

$$= 1 + \operatorname{rang} M_{A_1(x)x^s}[0^{(ks)}] = k, \; k = 2, 3, \dots, n-1. \qquad (5.60)$$

Оскільки $\operatorname{rang} M_{A_*(x)}[0^{(ks)}] = k$, $k = 2, 3, \ldots, n-1$ і згідно з твердженням 2.10

$$\operatorname{rang} M_{A_1(x)x^s}[0^{(ks)}] = \operatorname{rang} M_{A_*(x)}[0^{((k-1)s)}],$$

то з рівності (5.60) випливає, що

$$\operatorname{rang} M_{A_{1*}(x)}[0^{((k-1)s)}] = k-1, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1. \qquad (5.61)$$

Оскільки $A_1(x)$ має порядок $n-1$ і $\operatorname{rang} A_1(0) = (n-1)-1$, то, згідно з співвідношенням (5.61) і припущення індукції, робимо висновок, що існує така неособлива числова $(n-1)\times(n-1)$-матриця S_2, що

$$S_2 A_1(x) S_2^{-1} = \begin{Vmatrix} x^s & & & * \\ & x^s & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & x^s \end{Vmatrix}. \qquad (5.62)$$

Із співвідношень (5.58) і (5.59) випливає існування такої неособливої числової матриці S, що

$$SA(x)S^{-1} = \begin{Vmatrix} x^s & & & * \\ & x^s & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & x^s \end{Vmatrix},$$

що і треба було довести.

Наслідок 5.2. *Щоб набір* s *нільпотентних матриць*

$$A_1, A_2, \ldots, A_s,$$

з яких хоч би одна має ранг $n-1$, (*без обмеження загальності можна вважати, що* $\operatorname{rang} A_s = n-1$), *можна було одним неособливим перетворенням звести до трикутного вигляду, необхідно і достатньо, щоб виконувались одночасно дві умови:*

1. $\det A(x) = x^{ns}$, $A(x) = Ex^s + A_1 x^{s-1} + \cdots + A_{s-1}x + A_s$.

2. *Щоб виконувалися співвідношення* (5.57).

5.4. Зведення унітального матричного многочлена перетворенням подібності до квазітрикутного вигляду

Розглянемо спочатку питання виділення спеціальної поліноміальної матриці з матричного многочлена. Правильна така теорема.

Теорема 5.12. (Про спеціалізацію поліноміальної матриці.) *Нехай степінь характеристичного многочлена* $\Delta(x)$ *поліноміальної* $n\times n$*-матриці* $A(x)$ *дорівнює* ρs, $\rho \le n$. *Щоб для матриці* $A(x)$ *існували такі неособлива числова матриця* Q *і оборотна матриця* $R(x)$ *над* $\mathbf{C}[x]$, *що*

$$QA(x)R(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B(x) \end{Vmatrix}, \tag{5.63}$$

де $B(x)$ – *унітальна матриця порядку* ρ (*тобто матриця* (5.63) – *спеціальна*) *необхідно і достатньо*, *щоб одночасно виконувались два співвідношення*:

1. $\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\Delta) = \rho$,

2. $\operatorname{rang} M_{A_{s-1}(x)}(\Delta) = \rho s$.

Д о в е д е н н я безпосередньо випливає з теорем 5.1 і 5.2.

Означення 5.3. *Діагональ-матрицею* (скорочено *d-матрицею*) *висоти* ρ називатимемо діагональ-матрицю (див. означення 4.2) вигляду

$$\mathrm{diag}(1,\ldots,1,\varphi_{n-\rho+1},\ldots,\varphi_n),\ \rho\le n.$$

Таким чином, d-матриця нульової висоти – це одинична матриця.

Нехай тепер знову $A(x)$ – неособлива поліноміальна матриця над $\mathbf{C}[x]$ і її характеристичний многочлен $\Delta(x)$ зображений у вигляді

$$\Delta(x)=\varphi(x)\psi(x),\ \deg\varphi(x)=\rho s,\ \rho\le n. \tag{5.64}$$

Позначимо через $\Sigma_{n-\rho}$ множину всіх діагональ-матриць висоти ρ, які ділять форму Сміта $\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$ поліноміальної матриці $A(x)$ і визначник якої дорівнює $\varphi(x)$. Очевидно, множина $\Sigma_{n-\rho}$ може бути і порожньою. Припустимо, що $\Sigma_{n-\rho}\ne\varnothing$. Нехай $\Phi^{[n-\rho]}=\mathrm{diag}(\underbrace{1,\ldots,1,}_{n-\rho}\varphi_{n-\rho+1},\ldots,\varphi_n)$ – довільна d-матриця висоти ρ із $\Sigma_{n-\rho}$. Маємо

$$\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)=\mathrm{diag}(1,\ldots,1,\varphi_{n-\rho+1},\ldots,\varphi_n)\,\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\ldots,\psi_n).$$

Розглянемо визначальну матрицю (див.означення 4.3). породжену d-матрицею $\Phi^{[n-\rho]}$, тобто матрицю $W(\Phi^{[n-\rho]})$. Очевидно, вона є нижньою трикутною матрицею вигляду

$$\left\|\begin{array}{cccccc} \varphi & & & & & \mathbf{0}\\ & \ddots & & & & \\ \mathbf{0} & & \varphi & & & \\ \dfrac{\varphi k_{n-\rho+1,1}}{(\varphi_{n-\rho+1},\varepsilon_1)} & \dots & \dfrac{\varphi}{(\varphi_{n-\rho+1},\varepsilon_{n-\rho+1})} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \dfrac{\varphi k_{n1}}{(\varphi_n,\varepsilon_1)} & \dots & \dfrac{\varphi k_{n,n-\rho+1}}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-\rho+1})} & \dots & \dfrac{\varphi k_{n,n-1}}{(\varphi_n,\varepsilon_{n-1})} & \dfrac{\varphi}{(\varphi_n,\varepsilon_n)}\end{array}\right\| \qquad (5.65)$$

де $(\varphi_i, \varepsilon_j)$ – найбільший спільний дільник многочленів φ_i, ε_j, $i \geq j$.

Якщо $(\varphi_i, \varepsilon_j)/\varphi_j = 1$, то $k_{ij} = 0$.

Оскільки $(\varphi_i, \varepsilon_j)/\varphi_j \neq 1$, то

$$k_{ij} = k_{ij0} + k_{ij1}x + \ldots + k_{ijh_{ij}}x^{h_{ij}}, \ h_{ij} = \deg\frac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} - 1, \ i > j,$$

k_{ijs} – попарно різні змінні величини, які приєднуються до поля $\mathbb{C}$, $s = 1, 2, \ldots, h_{ij}$.

Означення 5.4. Матрицю (5.65) будемо називати *визначальною матрицею, породженою* d*-матрицею* $\Phi^{[n-\rho]}$ *висоти* ρ, і позначатимемо через $W(\Phi^{[n-\rho]})$.

Якщо

$$\Sigma_{n-\rho} = \{\Phi_1^{[n-\rho]}, \Phi_2^{[n-\rho]}, \ldots, \Phi_t^{[n-\rho]}\},$$

то

$$W(\Phi_1^{[n-\rho]}),\ W(\Phi_2^{[n-\rho]}),\ \ldots,\ W(\Phi_t^{[n-\rho]})$$

– визначальні матриці, породжені d-матрицями $\Phi_1^{[n-\rho]}$, $\Phi_2^{[n-\rho]}$, …, $\Phi_t^{[n-\rho]}$ висоти ρ відповідно.

Нехай $P(x)$ – довільна фіксована оборотна матриця над $\mathbb{C}[x]$, що задовольняє співвідношення

$$P(x)A(x)Q(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \dots,\varepsilon_n)\,. \tag{5.66}$$

Означення 5.5. Множину $K_{s-1}(\Phi_l^{[n-\rho]})$ матриць вигляду

$$K_{l,\,s-1}^{[n-\rho]} = W(\Phi_l^{[n-\rho]})P(x)\begin{Vmatrix} E & Ex & \dots & Ex^{s-1}\end{Vmatrix},$$

$l = 1, 2, \dots, t$, будемо називати *множиною супровідних матриць лівих множників з формою Сміта висоти* ρ *матричного многочлена* $A(x)$*, індукованих поліномом* $\varphi(x)$.

Теорема 5.13. *Нехай характеристичний многочлен* $\Delta(x)$ *неособливої поліноміальної матриці* $A(x)$ *зображений у вигляді добутку* (5.64). *Щоб для матричного многочлена існувала така неособлива числова матриця* Q*, що*

$$QA(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B(x)\end{Vmatrix} C(x)\,, \tag{5.67}$$

де $B(x)$ *– унітальна степеня* s *матриця порядку* ρ (*тобто лівий множник добутку* (5.67) *– спеціальна матриця*), *причому* $\det B(x) = \varphi(x)$, *необхідно і достатньо*, *щоб у множині визначальних матриць*, *породжених* d *-матрицями висоти* ρ *із* $\Sigma_{n-\rho}$, *знайшлась хоча б одна така матриця*

$$W(\Phi_p^{[n-\rho]}),\ 1 \le p \le t\,,$$

що для неї одночасно виконуються дві умови:

1. $\operatorname{rang} M_{W(\Phi_p^{[n-\rho]})P(x)}(\varphi) = \rho\,;$ (5.68)

2. $\operatorname{rang} M_{W(\Phi_p^{[n-\rho]})P(x)\begin{Vmatrix} E & Ex & \dots & Ex^{s-1}\end{Vmatrix}}(\varphi) = ns\,,$ (5.69)

де $P(x)$ *– довільна фіксована матриця, що задовольняє співвідношення* (5.66). (*Матриця*

$$W(\Phi_p^{[n-\rho]})P(x)\begin{Vmatrix} E & Ex & \dots & Ex^{s-1} \end{Vmatrix},$$

очевидно, *належить множині супровідних матриць лівих множників з формою Сміта висоти* ρ *матричного многочлена* $A(x)$, *індукованих поліномом* $\varphi(x)$).

Доведення. Необхідність. Припустимо, що для матриці $A(x)$ знайшлася така числова неособлива матриця Q, що виконується співвідношення (5.67), причому

$$\begin{Vmatrix} E_{n-\rho} & 0 \\ 0 & B(x) \end{Vmatrix} \sim \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{n-\rho}, \varphi_{n-\rho+1}, \dots, \varphi_n).$$

Згідно з теоремою 4.2 існують такі неособлива числова матриця C і оборотні матриці $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ над $\mathbb{C}[x]$, що виконується співвідношення

$$CQA(x)Q_1(x) = C\begin{Vmatrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B(x) \end{Vmatrix} Q_2(x)Q_2^{-1}(x)C(x)Q_1(x), \qquad (5.70)$$

де $CQA(x)Q_1(x)$ і $C\begin{Vmatrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B(x) \end{Vmatrix} Q_2(x)$ – нижні трикутні поліноміальні матриці, головні діагоналі яких збігаються з головними діагоналями їх форм Сміта, тобто співвідношення (5.70) фактично має вигляд

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & & & \mathbf{0} \\ & \varepsilon_2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \varepsilon_n \end{Vmatrix} =$$

$$
= \begin{Vmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{n-\rho} & & & \mathbf{0} \\ & \varphi_{n-\rho+1} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \varphi_n \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \psi_1 & & & \mathbf{0} \\ b_{21} & \psi_2 & & \\ \dots & \dots & \ddots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & \psi_n \end{Vmatrix}, \qquad (5.71)
$$

де ε_i ділить ε_{i+1}, φ_i ділить φ_{i+1}.

Крім того, будемо вважати (очевидно, без обмеження загальності), що $\deg b_{ij} < \deg \psi_j$, $i < j$, $i = 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n-1$.

Можна показати, повторюючи міркування, використані при доведенні необхідності теореми 4.7 (див. твердження 4.1 і 4.2), що взаємною матрицею першого співмножника співвідношення (5.71), тобто взаємною матрицею матриці

$$
\begin{Vmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{n-\rho} & & & \mathbf{0} \\ & \varphi_{n-\rho+1} & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \varphi_n \end{Vmatrix} \qquad (5.72)
$$

є матриця

$$
\begin{Vmatrix} \dfrac{\varphi}{(\varphi_1, \varepsilon_1)} & & & & \mathbf{0} \\ \dfrac{\varphi l_{21}}{(\varphi_2, \varepsilon_1)} & \dfrac{\varphi}{(\varphi_2, \varepsilon_2)} & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ \dfrac{\varphi l_{n1}}{(\varphi_n, \varepsilon_1)} & \dfrac{\varphi l_{n2}}{(\varphi_n, \varepsilon_2)} & \dots & \dfrac{\varphi l_{n,\,n-1}}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})} & \dfrac{\varphi}{(\varphi_n, \varepsilon_n)} \end{Vmatrix} P_n(x) C Q, \qquad (5.73)
$$

де $\deg l_{j+1,\,j} < \deg(\varphi_{j+1}/\varphi_j, \psi_j)$, якщо $(\varphi_{j+1}/\varphi_j, \psi_j) \neq 1$, і $l_{j+1,\,j} = 0$, якщо $(\varphi_{j+1}/\varphi_j, \psi_j) = 1$; а оборотна матриця $P_n(x)CQ$ ($P_n(x)$ – деяка нижня унітрикутна матриця над $\mathbb{C}[x]$, див. співвідношення (4.47)) належить до множини оборотних матриць $\{P(x)\}$, які задовольняють співвідношення (5.66). Матрицю (5.73) позначимо через $L(\Phi^{[n-\rho]})P(x)$, де $P(x) = P_n(x)CQ$, а

$$L(\Phi^{[n-\rho]}) =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccc} \varphi & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \\ \mathbf{0} & & \varphi & & \\ \dfrac{\varphi l_{n-\rho+1,\,1}}{(\varphi_{n-\rho+1}, \varepsilon_1)} & \ldots & \ldots & \dfrac{\varphi}{(\varphi_{n-\rho+1}, \varepsilon_{n-\rho+1})} & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\varphi l_{n1}}{(\varphi_n, \varepsilon_1)} & \ldots & \ldots & \dfrac{\varphi l_{n,\,n-\rho+1}}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-\rho+1})} & \ldots \quad \dfrac{\varphi}{(\varphi_n, \varepsilon_n)} \end{array} \right\|.$$

Оскільки матриця (5.72) спеціалізується, то, зважаючи на теорему 5.12, маємо

1. $\operatorname{rang} M_{L(\Phi^{[n-\rho]})P(x)}(\varphi) = \rho$,

2. $\operatorname{rang} M_{L(\Phi^{[n-\rho]})P(x)\left\| E \quad Ex \quad \ldots \quad Ex^{s-1} \right\|}(\varphi) = \rho s$.

Очевидно, що покладаючи в матриці $L(\Phi^{[n-\rho]})$ замість многочленів $l_{ij} \in \mathbb{C}[x]$ многочлени $k_{ij} = k_{ij0} + k_{ij1}x + \ldots + k_{ijh_{ij}}x^{h_{ij}}$, одержимо

1. $\operatorname{rang} M_{W(\Phi^{[n-\rho]})P(x)}(\varphi) = \rho$,

2. $\operatorname{rang} M_{W(\Phi^{[n-\rho]})P(x)\left\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{s-1} \right\|}(\varphi) = \rho s$.

Зважаючи на те, що записані вище ранги на основі теореми 4.8[1] інваріантні стосовно вибору матриці $P(x)$, бачимо, що необхідність доведено.

Достатність. Припустимо, що умови теореми виконані. Тоді, враховуючи співвідношення (5.66), матимемо

$$A(x) = P^{-1}(x)\operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1,}_{n-\rho} \varphi_{n-\rho+1}, \dots, \varphi_n)Y^{-1}Y \times$$

$$\times \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-\rho}, \psi_{n-\rho+1}, \dots, \psi_n)Q^{-1}(x), \tag{5.74}$$

де матриця Y має вигляд

$$\left\| \begin{array}{cccc|ccc} \multicolumn{4}{c|}{\overbrace{\begin{matrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{matrix}}^{n-\rho}} & & \mathbf{0} & \\ \hline \frac{k_{n-\rho+1,1}}{(\varphi_{n-\rho+1}, \varepsilon_1)} & \dots & \frac{k_{n-\rho+1,n-\rho}}{(\varphi_{n-\rho+1}, \varepsilon_{n-\rho})} & 1 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & & \\ \frac{k_{n1}}{(\varphi_n, \varepsilon_1)} & \dots & \frac{k_{n,n-\rho}}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-\rho})} & \dots & \frac{k_{n,n-1}}{(\varphi_n, \varepsilon_{n-1})} & 1 & \end{array} \right\|. \tag{5.75}$$

Тут k_{ij} ті ж самі, що і в матриці (5.65). Використовуючи міркування, застосовані при доведенні достатності теореми 4.7, легко переконатися, що матриця

$$P^{-1}(x)\operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1,}_{n-\rho} \varphi_{n-\rho+1}, \dots, \varphi_n)Y^{-1}$$

[1] Див. кінець доведення теореми 4.8.

є матрицею над $\mathbb{C}(k)[x]$ з взаємною матрицею

$$Y\,\mathrm{diag}(\varphi, \ldots, \varphi, \varphi/\varphi_{n-\rho+1}, \ldots, \varphi/\varphi_n)P(x),$$

яка є, очевидно, матрицею вигляду $W(\Phi^{[n-\rho]})P(x)$. Зважаючи на співвідношення (5.68), (5.69), бачимо, що матриця

$$P^{-1}(x)\,\mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n-\rho}, \varphi_{n-\rho+1}, \ldots, \varphi_n)Y^{-1}$$

на основі теореми 5.12 спеціалізується над кільцем $\mathbb{C}(k)[x]$. Надаючи змінним k_{ijs} допустимі значення, одержимо потрібні множники розкладу матриці $A(x)$. Достатність доведено.

Нехай тепер

$$A(x) = Ex^s + A_1x^{s-1} + \cdots + A_{s-1}x + A_s. \tag{5.76}$$

Коефіцієнтами $A(x)$ є відповідні матриці над $\mathbb{C}$ із скінченного набору $n \times n$-матриць:

$$A_1, A_2, \ldots, A_s.$$

Теорема 5.14. *Нехай характеристичний поліном* $\Delta(x)$ *матричного многочлена* (5.76) *зображений у вигляді*

$$\Delta(x) = \varphi(x)\psi(x),$$

де $\varphi(x)$ *– унітальний поліном степеня* ρs, $\rho < n$. *Щоб існувала така неособлива матриця* Q *над* $\mathbb{C}$, *що*

$$QA(x)Q^{-1} = \begin{Vmatrix} A_1^{(n-\rho)}(x) & * \\ \mathbf{0} & A_2^{(\rho)}(x) \end{Vmatrix}, \tag{5.77}$$

де $\rho \times \rho$*-матриця* $A_2^{(\rho)}(x)$ *така, що* $\det A_2^{(\rho)}(x) = \varphi(x)$, *необхідно і достатньо, щоб у множині визначальних матриць, по-*

роджених d*-матрицями* із $\Sigma_{n-\rho}$, *знайшлась хоча б одна така матриця*

$$W(\Phi_p^{[n-\rho]}),\ 1 \le p \le t,$$

що для неї виконується умова

$$\operatorname{rang} M_{W(\Phi_p^{[n-\rho]})P(x)}(\varphi) = \rho\,. \tag{5.78}$$

($P(x)$ *– довільна фіксована матриця, що задовольняє співвідношення* (5.66)).

Доведення. Достатність. Як і при доведенні достатності теореми 5.13, розглянемо розклад

$$A(x) = P^{-1}(x)\operatorname{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-\rho}, \varphi_{n-\rho+1},\ldots,\varphi_n)Y^{-1}\times$$

$$\times Y\operatorname{diag}(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n-\rho},\psi_{n-\rho+1},\ldots,\psi_n)Q^{-1}(x)\,, \tag{5.79}$$

де матриця Y має вигляд (5.75), і взаємною матрицею матриці

$$P^{-1}(x)\operatorname{diag}(\underbrace{1,\ldots,1}_{n-\rho}, \varphi_{n-\rho+1},\ldots,\varphi_n)Y^{-1}$$

(з елементами із $\mathbb{C}(k)[x]$) є матриця

$$Y\operatorname{diag}(\underbrace{\varphi,\ldots,\varphi}_{n-\rho}, \frac{\varphi}{\varphi_{n-\rho+1}},\ldots,\frac{\varphi}{\varphi_n})P(x)\,,$$

яка, очевидно, збігається з матрицею

$$W(\Phi^{[n-\rho]})P(x)\,.$$

Тепер на основі умови (5.78), і теореми 5.1 робимо висновок, що існують така неособлива матриця $Q(x)$ з елементами із поля

$\mathbb{C}(k)$ і оборотна матриця $R(k)(x)$ над $\mathbb{C}(k)[x]$, що виконується співвідношення

$$Q(x)(P^{-1}(x)\operatorname{diag}(\underbrace{1,\ldots,1,}_{n-\rho}\varphi_{n-\rho+1},\ldots,\varphi_n)Y^{-1}R(k)(x)=$$

$$=\begin{Vmatrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M^{(\rho)}(k)(x) \end{Vmatrix},$$

де $M^{(\rho)}(k)(x)$ така поліноміальна $\rho\times\rho$-матриця над $\mathbb{C}(k)[x]$, що $\det M^{(\rho)}(k)(x)=\varphi(x)$. Тепер, надаючи змінним k_{ijs} допустимі значення із $\mathbb{C}$, тобто такі числові значення, при яких зберігається співвідношення (5.78), і враховуючи співвідношення (5.79), переконуємося в існуванні такої неособливої матриці Q над $\mathbb{C}$, що виконується співвідношення

$$QA(x)=\begin{Vmatrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M^{(\rho)}(x) \end{Vmatrix}N(x), \tag{5.80}$$

де $M^{(\rho)}(x)$ – така $\rho\times\rho$-матриця над $\mathbb{C}[x]$, що $\det M^{(\rho)}(x)=\varphi(x)$. Помноживши співвідношення (5.80) справа на Q^{-1}, одержимо

$$QA(x)Q^{-1}=\begin{Vmatrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M^{(\rho)}(x) \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} C_{11}^{(n-\rho)}(x) & C_{12}(x) \\ C_{21}(x) & C_{22}^{(\rho)}(x) \end{Vmatrix}. \tag{5.81}$$

З останнього співвідношення випливає, що

$$M^{(\rho)}(x)C_{22}^{(\rho)}(x)=E_\rho x^s+A_1^{(\rho)}x^{s-1}+\cdots+A_{s-1}^{(\rho)}x+A_s^{(\rho)}. \tag{5.82}$$

Оскільки $\deg\det M^{(\rho)}(x)=\deg\varphi(x)=\rho s$, то, зважаючи на співвідношення (5.82), одержуємо $\det C_{22}^{\rho}(x)\in\mathbb{C}$. Отже, поліноміальна матриця $C_{22}^{\rho}(x)$ – оборотна. Таким чином, співвідношення (5.81) можна записати у вигляді

$$QA(x)Q^{-1} = \left\| \begin{matrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M^{(\rho)}(x)C_{22}^{(\rho)}(x) \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} C_{11}^{(n-\rho)}(x) & C_{12}(x) \\ [C_{22}^{(\rho)}(x)]^{-1}C_{21}(x) & E_{\rho} \end{matrix} \right\| .$$

Враховуючи тепер вигляд матриць $M^{(\rho)}(x)C_{22}^{(\rho)}(x)$ і лему 3.1, робимо висновок, що

$$[C_{22}^{(\rho)}(x)]^{-1}C_{21}(x) = \mathbf{0} .$$

Отже, достатність доведено.

Необхідність випливає з запису

$$QA(x) = \left\| \begin{matrix} E_{n-\rho} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2^{(\rho)}(x) \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} A_1^{(n-\rho)}(x) & * \\ \mathbf{0} & E_{\rho} \end{matrix} \right\| Q ,$$

де

$$A_2^{(\rho)}(x) = E_{\rho}x^s + A_{21}^{(\rho)}x^{s-1} + \cdots + A_{2,\,s-1}^{(\rho)}x + A_{2s}^{(\rho)} ,$$

і теореми 5.13.