РОЗДІЛ 4

РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОБЛЕМИ ВИДІЛЕННЯ РЕГУЛЯРНОГО МНОЖНИКА З МАТРИЧНОГО МНОГОЧЛЕНА

4.1. Напівскалярна еквівалентність поліноміальних матриць

У 3.1 для кільця поліноміальних матриць n-го порядку означенням 3.2 було введено відношення еквівалентності. При виявленні зв'язків введеного там поняття еквівалентності поліноміальних матриць з класичними поняттями еквівалентності і скалярної еквівалентності згаданих матриць (див. [5]), а також з огляду на важливість цього поняття для подальшого викладення нам буде зручно це поняття назвати "поняттям напівскалярної еквівалентності". А саме введемо таке означення.

Означення 4.1. Поліноміальні $m \times n$-матриці $A(x)$ і $B(x)$ над $\mathbb{C}[x]$ називатимемо *напівскалярно еквівалентними*, якщо існують така неособлива числова матриця Q і оборотна матриця $R(x)$ над $\mathbb{C}[x]$, що

$$A(x) = QB(x)R(x).$$

Нашою найближчою метою є доведення такої теореми.

Теорема 4.1. *Нехай $A(x)$ – поліноміальна $m \times n$-матриця ($m \leq n$) над $\mathbb{C}[x]$. Якщо $A(x)$ не є правим дільником нуля (тобто $rang A(x) = m$), то для $A(x)$ існують такі неособлива числова матриця C і оборотна матриця $Q(x)$ над $\mathbb{C}[x]$, що правильним є співвідношення*

$$CA(x)Q(x) = \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1(x) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \varepsilon_2(x) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ * & & & \varepsilon_m(x) & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \right\|, \quad (4.1)$$

де $\varepsilon_i(x)$ *– інваріантні многочлени матриці* $A(x)$, *тобто* $\varepsilon_i(x)$ *ділить* $\varepsilon_{i+1}(x)$ *і, очевидно, ділить всі елементи стовпця, до якого він належить.*

Покажемо спочатку правильність таких допоміжних тверджень. Нехай $A(x) = \left\| a_{ij}(x) \right\|_1^{m,n}$ – прямокутна поліноміальна матриця розмірів $m \times n$ ($m \le n$), причому $\operatorname{rang} A(x) = m$. Розглянемо її підматриці

$$A_k(x) = \left\| a_{ij}(x) \right\|_1^{k,n}, \ (k < m), \qquad A_{k+1}^{(p)}(x) = \left\| \begin{matrix} A_k(x) \\ a_p(x) \end{matrix} \right\|,$$

$$A_{k+1}^{(q)}(x) = \left\| \begin{matrix} A_k(x) \\ a_q(x) \end{matrix} \right\|, \qquad A_{k+1}^{(p,q)}(x) = \left\| \begin{matrix} A_k(x) \\ a_p(x) + u a_q(x) \end{matrix} \right\|,$$

де $a_p(x)$ і $a_q(x)$ p-й і q-й рядки матриці $A(x)$ $(p, q > k)$, відповідно і $u \in \mathbb{C}$.

Лема 4.1. *Нехай*

$$d_{k+1}^{(p)}(x) = (x-\alpha)^{r_1} \varphi_1(x), \ d_{k+1}^{(q)}(x) = (x-\alpha)^{r_2} \varphi_2(x),$$

$$d_{k+1}^{(p,q)}(x) = (x-\alpha)^{s} \varphi_3(x), \ \varphi_j(\alpha) \ne 0, \quad i = 1,2,3$$

– найбільші спільні дільники (н.с.д.) мінорів порядку $k+1$ *відповідно матриць* $A_{k+1}^{(p)}(x)$, $A_{k+1}^{(q)}(x)$, $A_{k+1}^{(p,q)}(x)$. *Якщо* $r_1 \ne r_2$, *то* $s = \min(r_1, r_2)$.

Д о в е д е н н я. Кожний мінор порядку $k+1$ матриці $A_{k+1}^{(p,q)}(x)$ можна записати у вигляді суми

$$M^{(p,q)}(x) = M^{(p)}(x) + uM^{(q)}(x),$$

де $M^{(p)}(x)$ і $M^{(q)}(x)$ – мінори порядку $k+1$ відповідно матриць $A_{k+1}^{(p)}(x)$ і $A_{k+1}^{q}(x)$. Легко бачити, що твердження леми випливає з останньої рівності.

Лема 4.2. *Нехай зберігаються позначення, введені в лемі* 4.1. *Якщо* $r_1 = r_2 = r$ *, то* $s \geq r$*, причому знак строгої нерівності може бути лише при єдиному значені* $u = u_1$.

Д о в е д е н н я випливає з рівності

$$M^{(p,q)} = (x-\alpha)(\tilde{M}^{(p)}(x) + u\tilde{M}^{(q)}(x)).$$

Д о в е д е н н я теореми 4.1. Нехай

$$d_m(x) = (x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\dots(x-\alpha_r)^{l_r},$$

($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ – попарно різні) – найбільші спільні дільники мінорів порядку m матриці $A(x)$,

$$d_1(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_r)^{k_r},$$

($0 \leq k_i \leq l_i,\ i = 1, 2, \dots, r$) – найбільші спільні дільники мінорів першого порядку матриці $A(x)$. Через $a_i(x)$ будемо позначати i-й рядок матриці $A(x)$, а через $\delta_i(x)$ – найбільший спільний дільник елементів цього рядка. Зауважимо, що, оскільки $\operatorname{rang} A(x) = m$, то $\delta_i(x)$ ділить всі мінори m-го порядку матриці $A(x)$, а отже, і $d_m(x),\ i = 1, 2, \dots, m$.

Доведемо, що для матриці $A(x)$ існує така неособлива матриця C_1, що в матриці $C_1A(x)$ найбільший спільний дільник елементів першого рядка дорівнює найбільшому спільному дільнику елементів матриці $A(x)$.

Нехай найбільший спільний дільник елементів першого рядка $a_1(x)$ матриці $A(x)$ має вигляд

$$\delta_1(x) = (x-\alpha_1)^{p_1}(x-\alpha_2)^{p_2}\cdots(x-\alpha_r)^{p_r}$$

причому $p_1 > k_1$. Тоді, очевидно, існує такий рядок $a_{j_1}(x)$ матриці $A(x)$, для якого

$$\delta_{j_1}(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}\varphi_1(x),\ \varphi_1(\alpha_1) \neq 0$$

(у протилежному випадку корінь α_1 в многочлені $d_1(x)$ мав би кратність більшу, ніж k_1).

Додаючи до першого рядка матриці $A(x)$ її j_1-ий рядок, помножений на число $u \neq 0$ (що рівнозначно множенню деякої неособливої числової матриці S_1 зліва на $A(x)$), одержимо рядок

$$a_1^{(1)}(x) = a_1(x) + ua_{j_1}(x).$$

На основі леми 4.1 найбільший спільний дільник елементів цього рядка дорівнює

$$\delta_1^{(1)}(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}\psi_1(x),\ \psi_1(\alpha_1) \neq 0.$$

Припустимо, що таким чином одержана матриця $S_t A(x)$, найбільший спільний дільник елементів першого рядка якої дорівнює

$$\delta_1^{(t)}(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}\ldots(x-\alpha_t)^{k_t}(x-\alpha_{t+1})^{s_{t+1}}\ldots(x-\alpha_r)^{s_r}.$$

Покладемо, $s_{t+1} > k_{t+1}$. Тоді знайдеться такий рядок $a_{j_{t+1}}(x)$ матриці $S_t A(x)$, найбільший спільний дільник елементів якого дорівнює

$$\delta_{j_{t+1}}^{(t)}(x) = (x-\alpha_{t+1})^{k_{t+1}} \varphi_{t+1}(x),\ \varphi_{t+1}(\alpha_{t+1}) \neq 0 .$$

Розглянемо лінійну комбінацію першого і j_{t+1}-го рядків матриці $S_t A(x)$:

$$a_1^{(t+1)}(x) = a_1^{(t)}(x) + v a_{j_{t+1}}(x) . \tag{4.2}$$

Нехай

$$\delta_1^{(t+1)}(x) = (x-\alpha_1)^{q_1} \cdots (x-\alpha_t)^{q_t} (x-\alpha_{t+1})^{q_{t+1}} \cdots (x-\alpha_r)^{q_r} \tag{4.3}$$

– найбільший спільний дільник елементів рядка (4.2). На основі леми 4.1 $q_{t+1} = k_{t+1}$ при будь-якому $v \neq 0$. На основі леми 4.2 будемо мати, що із $t+1$ яких-небудь попарно різних відмінних від нуля значень $v_1, v_2, \ldots, v_{t+1}$, можна вибрати принаймні одне таке v_{t+1}, що в найбільшому спільному дільнику (4.3) елементів рядка (4.2) при $v = v_{t+1}$, $q_i = k_i$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, t+1$. Таким чином, додаючи до першого рядка матриці $S_t A(x)$ її j_{t+1}-ий рядок, помножений на $v_{t+1} \neq 0$, одержимо матрицю $S_{t+1} A(x)$, найбільший спільний дільник елементів першого рядка якої дорівнює

$$\delta_1^{(t+1)}(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \ldots (x-\alpha_{t+1})^{k_{t+1}} \psi_{t+1}(x),$$

$$\psi_{t+1}(\alpha_{t+1}) \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, t+1 .$$

Так роблячи далі, дістанемо матрицю $C_1 A(x)$, найбільший спільний дільник елементів першого рядка якої дорівнює $d_1(x)$.

Правими елементарними перетвореннями матрицю $C_1A(x)$ зведемо до вигляду

$$C_1A(x)Q_1(x)=\left\|\begin{array}{cccc}\varepsilon_1(x) & 0 & \cdots & 0\\ * & & & \\ \vdots & & A_{m-1}(x) & \\ * & & & \end{array}\right\|,$$

де $\varepsilon_1(x)=d_1(x)$, $\operatorname{rang}A_{m-1}(x)=m-1$. Очевидно, що попередні міркування можна застосувати до матриці $A_{m-1}(x)$ і показати існування таких неособливої числової матриці C_2 і оборотної матриці $Q_2(x)$ над $\mathbb{C}[x]$, що

$$C_2A(x)Q_2(x)=\left\|\begin{array}{ccccc}\varepsilon_1(x) & 0 & 0 & \cdots & 0\\ * & \varepsilon_2(x) & 0 & \cdots & 0\\ * & * & & & \\ \cdots & \cdots & & A_{m-2}(x) & \\ * & * & & & \end{array}\right\|,$$

де, очевидно, ε_1 ділить ε_2, $\operatorname{rang}A_{m-2}(x)=m-2$ і ε_i ділить всі елементи i-го стовпця, $i=1,2$.

Так роблячи далі, після скінченної кількості кроків ми одержимо трикутну форму (4.1).

Виявляється, що теорему 4.1 можна узагальнити на випадок скінченого набору поліноміальних матриць. Покажемо спочатку правильність такого допоміжного твердження.

Лема 4.3. *Для довільного скінченного набору числових ненульових $m\times n$-матриць A_1, A_2, …, A_p існує такий числовий рядок $\|q_1\ q_2\ \cdots\ q_m\|$, що*

$$\|\,q_1\ q_2\ \cdots\ q_m\,\|A_i\neq\mathbf{0},\ \ i=1,2,\ldots,p.$$

Доведення. Нехай a_{l_i} – ненульовий стовпець матриці A_i. Розглянемо систему многочленів

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \left\| x_1, x_2, \ldots, x_m \right\| a_{l_i},\ i = 1, 2, \ldots, p.$$

В нескінченному полі існують такі числа $q_1, q_2, \ldots, q_m$, що

$$f_i(q_1, q_2, \ldots, q_m) \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, p.$$

Тому кожний рядок

$$\left\| q_1\ q_2\ \cdots\ q_m \right\| A_i,\ i = 1, 2, \ldots, p$$

містить ненульовий елемент. Лема доведена.

Теорема 4.2. *Нехай*

$$A_1(x), A_2(x), \ldots, A_k(x)$$

поліноміальні $m \times n$ *-матриці* ($m \leq n$), *причому*

$$\operatorname{rang} A_i(x) = m,\ i = 1, 2, \ldots, k;$$

$\varepsilon_j^{(i)}(x),\ j = 1, 2, \ldots, m$ – *інваріантні многочлени матриці*

$$A_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Тоді існують такі неособлива числова матриця C *і оборотні матриці* $Q_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, k$ *над* $\mathbb{C}[x]$, *що*

$$CA_i(x)Q_i(x) = \left\| \begin{matrix} \varepsilon_1^{(i)}(x) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \varepsilon_2^{(i)}(x) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ * & & & \varepsilon_m^{(i)}(x) & 0 & \cdots & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Доведення. Через $d_l^{(i)}(x)$ позначимо найбільший спільний дільник мінорів порядку l матриці $A_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, k$.

Нехай $d_l^{(i)}(x)=1,\ i=1,2,\ldots,k$. Підставляючи у матриці $A_i(x),\ i=1,2,\ldots,k$, замість x відповідно всі корені многочленів $d_m^{(i)}(x)$, дістанемо ряд ненульових числових матриць. На основі леми 4.3 існує такий числовий рядок $\|q_1\ q_2\ \cdots\ q_m\|$, при якому кожний рядок

$$\|\, q_1\ q_2\ \cdots\ q_m \,\| A_i(x),\ \ i=1,2.\ldots,k$$

при підстановці замість x будь-якого кореня многочлена $d_m^{(i)}(x)$, відмінний від нуля. Доповнивши рядок $\|q_1\ q_2\ \cdots\ q_m\|$ до оборотної матриці C_1, одержимо, що в кожній матриці $C_1A_i(x),\ i=1,2.\ldots,k$ найбільший спільний дільник елементів першого рядка дорівнює одиниці.

Якщо $d_1^{(i)}(x)\neq 1$, то матриці $A_i(x),\ i=1,2,\ldots,k$ зобразимо у вигляді

$$A_i(x)=d_1^{(i)}(x)\overline{A}_i(x).$$

і попередні міркування проведемо над матрицями $\overline{A}_i(x),\ i=1,2,\ldots,k$. Очевидно, що при деяких значеннях індексів матриці $A_i(x)$ і $\overline{A}_i(x)$ можуть збігатися.

Таким чином, ми довели, що існує така неособлива числова матриця C_1 (одна для всіх матриць заданого набору), що в матриці $C_1A_i(x),\ i=1,2.\ldots,k$ найбільший спільний дільник елементів першого рядка дорівнює найбільшому спільному дільнику мінорів першого порядку матриці $A_i(x),\ i=1,2,\ldots,k$.

Тепер матриці $C_1A_i(x),\ i=1,2.\ldots,k$ правими елементарними перетвореннями зведемо до вигляду

$$\left\| \begin{matrix} \varepsilon_1^{(i)}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & A_{i,m-1}(x) & \\ * & & & \end{matrix} \right\|,$$

де

$$\varepsilon_1^{(i)}(x) = d_1^{(i)}(x), \ \operatorname{rang} A_{i,m-1}(x) = m-1, \ i = 1,2,\ldots,k.$$

Далі, застосовуючи попередні міркування до матриць $A_{i,m-1}(x), \ i = 1,2,\ldots,k$, переконаємося, що теорема правильна.

Зауважимо, що цю теорему можна довести так само, як теорему 4.1. Із теореми 4.2 як наслідок випливає такий результат (див. також [51]).

Наслідок 4.1. *Нехай* $A(x) = B(x)C(x)$, *де* $B(x)$ *і* $C(x)$ – *неособливі поліноміальні матриці. Тоді інваріантні многочлени матриці* $A(x)$ *діляться на відповідні інваріантні многочлени матриць* $B(x)$ *і* $C(x)$.

Доведення. Нехай поліноміальна $n\times n$-матриця $A(x)$ зображена у вигляді добутку двох неособливих поліноміальних матриць $B(x)$ і $C(x)$:

$$A(x) = B(x)C(x).$$

На основі теореми 4.2 для матриць $A(x)$ і $B(x)$ існують такі неособлива матриця C і оборотні матриці $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ над $\mathbb{C}[x]$, що

$$CA(x)Q_1(x) = CB(x)Q_2(x)Q_2^{-1}(x)C(x)Q_1(x), \qquad (4.4)$$

де

$$CA(x)Q_1(x)=\left\|\begin{matrix}\varepsilon_1^{(A)}(x) & & & \mathbf{0}\\ & \varepsilon_2^{(A)}(x) & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \varepsilon_n^{(A)}(x)\end{matrix}\right\|,$$

$$CB(x)Q_2(x)=\left\|\begin{matrix}\varepsilon_1^{(B)}(x) & & & \mathbf{0}\\ & \varepsilon_2^{(B)}(x) & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \varepsilon_n^{(B)}(x)\end{matrix}\right\|,$$

де $\varepsilon_i^{(A)}(x)$ і $\varepsilon_i^{(B)}(x)$, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ – інваріантні многочлени відповідно матриць $A(x)$ і $B(x)$.

Із співвідношення (4.4) випливає, що матриця $Q_2^{-1}(x)C(x)Q_1(x)$ також трикутна. Таким чином, інваріантні множники матриці $B(x)$ ділять відповідні інваріантні множники матриці $A(x)$. Аналогічно можна показати, що інваріантні множники матриці $C(x)$ ділять відповідні інваріантні множники матриці $A(x)$.

Наступна теорема встановлює співвідношення між скалярною і напівскалярною еквівалентністю.

Теорема 4.3. *Нехай*

$$A(x)=A_0x^s+A_1x^{s-1}+\cdots+A_s,\ \det A_0\neq 0,$$

$$B(x)=B_0x^s+B_1x^{s-1}+\cdots+B_s,\ \det B_0\neq 0,$$

– регулярні поліноміальні матриці і

$$F_1(x)=Q_1A(x)R_1(x),\qquad F_2(x)=Q_2B(x)R_2(x)$$

– їх трикутні форми вигляду (4.1). *Матриці $A(x)$ і $B(x)$ скалярно еквівалентні, тобто*

$$A(x) = SA(x)T\,,$$

де S, T *– числові неособливі матриці, тоді і тільки тоді, коли їх форми* $F_1(x)$ *і* $F_2(x)$ *напівскалярно еквівалентні, тобто*

$$F_1(x) = GF_2(x)Q(x).$$

Д о в е д е н н я безпосередньо випливає із того, що регулярні напівскалярно еквівалентні матриці – скалярно еквівалентні.

Наслідок 4.2. *Унітальні матричні многочлени* $A(x)$ *і* $B(x)$ *подібні, тобто*

$$A(x) = TB(x)T^{-1}$$

тоді і тільки тоді, коли їх трикутні форми (4.1) *напівскалярно еквівалентні.*

Зауваження 4.1. В теоремах 4.1 і 4.2 обмеження, яке вимагає лінійної незалежності рядків поліноміальних матриць, що розглядаються, істотне, як це показує такий приклад.

Приклад. Рядки матриці

$$\begin{Vmatrix} x+1 & 0 \\ x^2 & 0 \end{Vmatrix}$$

лінійно залежні, її єдиний ненульовий інваріантний множник дорівнює 1. Проте жодними напівскалярними еквівалентними перетвореннями її не можна звести до вигляду

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ * & 0 \end{Vmatrix}.$$

4.2. Розклад поліноміальної матриці на множники з наперед заданими формами Сміта

Відомо, що для неособливої поліноміальної $n \times n$-матриці $A(x)$ над $\mathbb{C}[x]$ існують такі оборотні поліноміальні матриці $P(x)$ і $Q(x)$ за яких правильне співвідношення

$$P(x)A(x)Q(x) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x),\ \ldots,\ \varepsilon_n(x)),$$

де $\varepsilon_i(x)$ ділить $\varepsilon_{i+1}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Матриця $\operatorname{diag}(\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x),\ \ldots,\ \varepsilon_n(x))$ називається формою Сміта поліноміальної матриці $A(x)$, а $\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x),\ \ldots,\ \varepsilon_n(x)$ – інваріантними множниками цієї матриці.

Приступимо до пошуку необхідних і достатніх умов для зображення неособливого матричного многочлена у вигляді добутку двох множників (один з яких регулярний), добуток форм Сміта яких дорівнює формі Сміта вихідної матриці.

Запишемо поліноміальну матрицю $A(x)$ у вигляді многочлена

$$A(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \cdots + A_{s-1} x + A_s,\ \det A(x) \not\equiv 0. \qquad (4.5)$$

Припустимо, що $\varepsilon_i(x) = \varphi_i(x)\psi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, причому $\varphi_i(x)$ ділить $\varphi_{i+1}(x)$, $\psi_i(x)$ ділить $\psi_{i+1}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Добуток $\varphi_1(x)\varphi_2(x)\cdots\varphi_n(x)$ позначимо через $\varphi(x)$, тобто $\varphi(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_n(x)$.

Позначимо через $K(x)$ довільну матрицю, яка задовольняє співвідношення

$$CA(x)Q(x) = K(x)\operatorname{diag}(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)),$$

де C і $Q(x)$ – такі довільні оборотні відповідно над $\mathbb{C}$ і $\mathbb{C}[x]$ матриці, що матриця $CA(x)Q(x)$ має вигляд

$$CA(x)Q(x)=\left\|\begin{matrix}\varepsilon_1(x) & & & \mathbf{0} \\ * & \varepsilon_2(x) & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & \dots & \dots & \varepsilon_n(x)\end{matrix}\right\|, \qquad (4.6)$$

$\varepsilon_i(x)$ – інваріантні множники матриці $A(x)$ (див. теорему 4.1).

Через $K_*(x)$ позначимо взаємну матрицю матриці $K(x)$, тобто матрицю, що задовольняє співвідношення

$$K(x)K_*(x)=K_*(x)K(x)=E\det K(x)=E\varphi(x).$$

Теорема 4.4. *Нехай форму Сміта матриці* $A(x)$ *зображено у вигляді*

$$\left\|\begin{matrix}\varepsilon_1(x) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \varepsilon_n(x)\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}\varphi_1(x) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \varphi_n(x)\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}\psi_1(x) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \psi_n(x)\end{matrix}\right\|, \quad (4.7)$$

де $\varphi_i(x)$ *ділить* $\varphi_{i+1}(x)$, $\psi_i(x)$ *ділить* $\psi_{i+1}(x)$ *і нехай* $\deg\varphi(x)=nr$, $r<s$. *Щоб матричний многочлен* (4.5) *можна було зобразити у вигляді добутку*

$$A(x)=B(x)C(x),$$

де $B(x)$ *– регулярний матричний многочлен степеня* r *з формою Сміта* $\operatorname{diag}(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\dots,\varphi_n(x))$, *а* $C(x)$ *мав форму Сміта* $\operatorname{diag}(\psi_1(x),\psi_2(x),\dots,\psi_n(x))$, *необхідно і достатньо, щоб ранг значення поліноміальної матриці*

$$K_{r-1}(x)=K_*(x)\left\|E,\ Ex,\ \dots,\ Ex^{r-1}\right\|$$

на системі коренів многочлена $\varphi(x)$ *дорівнював* nr, *тобто*

$$\operatorname{rang} M_{K_{r-1}(x)}(\varphi) = nr. \qquad (4.8)$$

Перш ніж доводити теорему 4.4, доведемо таку лему.

Лема 4.4. *Нехай форму Сміта*

$$\operatorname{diag}(\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x),\ \ldots, \varepsilon_n(x))$$

поліноміальної матриці $A(x)$ *можна подати у вигляді* (4.7). *Тоді, якщо виконується співвідношення*

$$\operatorname{diag}(\varepsilon_1(x),\ \ldots, \varepsilon_n(x))G(x) = H(x)\operatorname{diag}(\varepsilon_1(x),\ \ldots, \varepsilon_n(x)), \qquad (4.9)$$

де $G(x) = \|g_{ij}(x)\|$, $H(x) = \|h_{ij}(x)\|$ *– оборотні над* $\mathbb{C}[x]$ *матриці, то правильною є рівність*

$$\operatorname{diag}(\varphi_1(x),\ \ldots, \varphi_n(x))S(x) = H(x)\operatorname{diag}(\varphi_1(x),\ \ldots, \varphi_n(x)), \qquad (4.10)$$

де $S(x)$ *– деяка оборотна над* $\mathbb{C}[x]$ *матриця.*

Доведення. Запишемо співвідношення (4.9) у вигляді

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_1 g_{11} & \varepsilon_1 g_{12} & \ldots & \varepsilon_1 g_{1n} \\ \varepsilon_2 g_{21} & \varepsilon_2 g_{22} & \ldots & \varepsilon_2 g_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varepsilon_n g_{n1} & \varepsilon_n g_{n2} & \ldots & \varepsilon_n g_{nn} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} h_{11}\varepsilon_1 & h_{12}\varepsilon_2 & \ldots & h_{1n}\varepsilon_n \\ h_{21}\varepsilon_1 & h_{22}\varepsilon_2 & \ldots & h_{2n}\varepsilon_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h_{n1}\varepsilon_1 & h_{n2}\varepsilon_2 & \ldots & h_{nn}\varepsilon_n \end{Vmatrix}.$$

Порівнюючи в обох частинах останньої рівності елементи, які стоять над головною діагоналлю, одержимо

$$\varepsilon_i(x)g_{ij}(x) = h_{ij}(x)\varepsilon_j(x),\ i < j,\ i = 1, 2, \ldots, n-1,\ j = 2, \ldots, n.$$

Оскільки $\varepsilon_k(x) = \varphi_k(x)\psi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то

$$\varphi_i(x)\psi_i(x)g_{ij}(x) = h_{ij}(x)\varphi_j(x)\psi_j(x).$$

Враховуючи те, що $i < j$, маємо $\varphi_j(x) = \chi_i(x)\varphi_i(x)$, а тому

$$\varphi_i(x)\psi_i(x)g_{ij}(x) = h_{ij}(x)\chi_i(x)\varphi_i(x)\psi_j(x).$$

Отже,

$$\psi_i(x) g_{ij}(x) = h_{ij}(x) \chi_i(x) \psi_j(x), \ i < j. \tag{4.11}$$

Із рівності (4.9) одержимо

$$\operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \begin{Vmatrix} \psi_1 g_{11} & \psi_1 g_{12} & \cdots & \psi_1 g_{1n} \\ \psi_2 g_{21} & \psi_2 g_{22} & \cdots & \psi_2 g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_n g_{n1} & \psi_n g_{n2} & \cdots & \psi_n g_{nn} \end{Vmatrix} =$$

$$= H(x) \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)) \operatorname{diag}(\psi_1(x), \ldots, \psi_n(x)).$$

Згідно з рівністю (4.11), одержимо

$$\operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ \ldots, \varphi_n(x)) S(x) = H(x) \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \ \ldots, \varphi_n(x)),$$

де $S(x)$, очевидно, оборотна матриця. Тобто ми довели рівність (4.10), а разом з тим і лему 4.4.

Доведення теореми 4.4. Необхідність. Нехай

$$K(x) = \begin{Vmatrix} \varphi_1(x) & & & \mathbf{0} \\ * & \varphi_2(x) & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ * & \cdots & \cdots & \varphi_n(x) \end{Vmatrix},$$

де $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ – інваріантні множники матриці $K(x)$, $K(x)$ – довільна матриця, яка задовольняє співвідношення

$$CA(x)Q(x) = \begin{Vmatrix} \varphi_1(x) & & & \mathbf{0} \\ * & \varphi_2(x) & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ * & \cdots & \cdots & \varphi_n(x) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \psi_1(x) & & & \mathbf{0} \\ * & \psi_2(x) & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ * & \cdots & \cdots & \psi_n(x) \end{Vmatrix}$$

(при довільних неособливій числовій матриці C і оборотній матриці $Q(x)$ над $\mathbb{C}[x]$). Покажемо, що коли

$$A(x) = B(x)C(x)\,, \tag{4.12}$$

де $B(x)$ – регулярний матричний многочлен степеня r з формою Сміта $\operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$, а $C(x)$ має форму Сміта $\operatorname{diag}(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))$, то виконується рівність (4.8).

Згідно з теоремою 4.2, для матриць $A(x)$ і $B(x)$ із співвідношення (4.12) існують такі матриці C_1, $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$, що матриці $C_1A(x)Q_1(x)$ і $C_1B(x)Q_2(x)$ мають вигляд (4.6). Тоді

$$C_1A(x)Q_1(x) = C_1B(x)Q_2(x)Q_2^{-1}(x)C(x)Q_1(x)\,. \tag{4.13}$$

Оскільки $C_1A(x)Q_1(x)$ і $C_1B(x)Q_2(x)$ – трикутні неособливі матриці, то і матриця $Q_2^{-1}(x)C(x)Q_1(x)$ – трикутна, і на основі співвідношення (4.7)

$$Q_2^{-1}(x)C(x)Q_1(x) = Q_3(x)\operatorname{diag}(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))\,,$$

де $Q_3(x)$ – оборотна матриця. Запишемо матрицю $C_1A(x)Q_1(x)$ у вигляді

$$C_1A(x)Q_1(x) = T(x)\operatorname{diag}(\varepsilon_1(x),\ \varepsilon_2(x),\ \ldots, \varepsilon_n(x)) =$$

$$= T(x)\operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x) \ldots, \varphi_n(x))\operatorname{diag}(\psi_1(x), \psi_2(x) \ldots, \psi_n(x))\,,$$

де $T(x)$ – нижня унітрикутна матриця, тобто нижня трикутна матриця з одиничними елементами на головній діагоналі. Записавши аналогічно матрицю $C_1B(x)Q_2(x)$ у вигляді

$$C_1B(x)Q_2(x) = T_1(x)\operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))\,, \tag{4.14}$$

де $T_1(x)$ – також нижня унітрикутна матриця, із співвідношення (4.13) після розділення обох частин на

$$\operatorname{diag}(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))$$

одержимо

$$T(x)\,\mathrm{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) =$$

$$= T_1(x)(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))Q_3(x)\,. \qquad (4.15)$$

Позначимо через $N(x)$ матрицю

$$N(x) = T(x)\,\mathrm{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))\,. \qquad (4.16)$$

Оскільки правильним є співвідношення (4.15), то, згідно з рівністю (4.14), бачимо, що

$$C_1 B(x) Q_2(x) Q_3(x) = N(x)\,.$$

Матриця $B(x)$, а, отже, і $C_1 B(x)$ – регулярна, тому матриця $N(x)$ регуляризується домноженням справа на $Q_3^{-1}(x)Q_2^{-1}(x)$ і, згідно з теоремою 3.4,

$$\mathrm{rang}\, M_{N_{r-1}(x)}(\varphi) = nr\,. \qquad (4.17)$$

Доведемо тепер рівність (4.8). Маємо

$$CA(x)Q(x) = K(x)\,\mathrm{diag}(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))\,,$$

$$C_1 A(x) Q_1(x) = N(x)\,\mathrm{diag}(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))\,.$$

Очевидно, існує така неособлива матриця $\overline{C}$ і оборотна матриця $\overline{Q}(x)$, що

$$CA(x)Q(x) = \overline{C}\, C_1 A(x) Q_1(x) \overline{Q}(x)\,,$$

тобто

$$K(x)\,\mathrm{diag}(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x)) =$$

$$= \overline{C} N(x)\,\mathrm{diag}(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))\overline{Q}(x). \qquad (4.18)$$

Подамо матрицю $K(x)$ у вигляді

$$K(x) = T_3(x)\,\mathrm{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))\,.$$

Беручи до уваги співвідношення (4.16), запишемо рівність (4.18) у вигляді

$$T_3(x)\,\mathrm{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x)) =$$
$$= \bar{C}T(x)\,\mathrm{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x))\bar{Q}(x).$$

Запишемо останню рівність так:

$$\mathrm{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ \ldots, \varepsilon_n(x))G(x) =$$
$$= H(x)\,\mathrm{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ \ldots, \varepsilon_n(x)), \qquad (4.19)$$

де $G(x) = Q^{-1}(x)$, $H(x) = T_3^{-1}(x)\bar{C}T(x)$.

На основі раніше доведеної леми 4.4, одержимо

$$\mathrm{diag}(\varphi_1(x), \ \ldots, \varphi_n(x))S(x) = H(x)\,\mathrm{diag}(\varphi_1(x), \ \ldots, \varphi_n(x)), \quad (4.20)$$

де $S(x)$ – оборотна матриця. Звідси

$$\mathrm{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))S(x) =$$
$$= T_3^{-1}(x)\bar{C}T(x)(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

або

$$T_3(x)\,\mathrm{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))S(x) =$$
$$= \bar{C}T(x)\,\mathrm{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)).$$

Тобто

$$K(x)S(x) = \bar{C}N(x).$$

Відомо (див. твердження 2.8), що

$$\mathrm{rang}\, M_{N_{r-1}(x)}(\varphi) = \mathrm{rang}\, M_{[\bar{C}^{-1}K(x)S(x)]_{r-1}(x)}(\varphi) = \mathrm{rang}\, M_{K_{r-1}(x)}(\varphi).$$

Враховуючи рівність (4.17), бачимо, що виконується і рівність (4.8). Необхідність доведено.

Достатність. Нехай

$$\mathrm{rang}\, M_{K_{r-1}(x)}(\varphi) = nr,$$

де

$$K(x)=\left\|\begin{matrix}\varphi_1(x) & & & \mathbf{0}\\ * & \varphi_2(x) & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ * & \dots & \dots & \varphi_n(x)\end{matrix}\right\|,$$

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ – інваріантні многочлени матриці $K(x)$, що задовольняє співвідношення

$$CA(x)Q(x)=\left\|\begin{matrix}\varphi_1(x) & & & \mathbf{0}\\ * & \varphi_2(x) & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ * & \dots & \dots & \varphi_n(x)\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\psi_1(x) & & & \mathbf{0}\\ * & \psi_2(x) & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ * & \dots & \dots & \psi_n(x)\end{matrix}\right\|.$$

Згідно з теоремою 3.4 існує така оборотна матриця $U(x)$ над $\mathbb{C}[x]$, що

$$CA(x)Q(x)=K(x)U(x)U^{-1}(x)\,\mathrm{diag}(\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)),$$

причому $K(x)U(x)$ – регулярний матричний многочлен степеня r. Тоді

$$A(x)=C^{-1}K(x)U(x)U^{-1}(x)\,\mathrm{diag}(\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x))Q^{-1}(x).$$

Позначивши $C^{-1}K(x)U(x)=B(x)$, одержимо

$$A(x)=B(x)C(x).$$

Теорема доведена.

Нехай тепер $P(x)$ і $Q(x)$ – такі довільні оборотні матриці, що

$$P(x)A(x)Q(x)=\mathrm{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \dots, \varepsilon_n(x)), \tag{4.21}$$

і форма Сміта матриці $A(x)$ зображена у вигляді (4.7). Позначимо через $D_{r-1}(x)$ матрицю

$$D_{r-1}(x) = [\mathrm{diag}(\varphi_1(x), \ \ldots, \varphi_n(x))]_* P(x) \left\| E \ Ex \ldots Ex^{r-1} \right\|, \quad (4.22)$$

де $P(x)$ – довільна матриця, що задовольняє співвідношення (4.21).

Виявляється, що правильна така теорема.

Теорема 4.5. *Щоб матричний многочлен* (4.5) *можна було зобразити у вигляді добутку*

$$A(x) = B(x)C(x),$$

де $B(x)$ *– регулярний матричний многочлен з формою Сміта* $\mathrm{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$, *а* $C(x)$ *має форму Сміта* $\mathrm{diag}(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$\mathrm{rang}\, M_{D_{r-1}(x)}(\varphi) = nr. \quad (4.23)$$

Доведення. Враховуючи теорему 4.4, для доведення теореми 4.5 досить показати, що

$$\mathrm{rang}\, M_{K_{r-1}(x)}(\varphi) = \mathrm{rang}\, M_{D_{r-1}(x)}(\varphi).$$

Запишемо співвідношення (4.21) так:

$$A(x)Q(x) = P^{-1}(x)\,\mathrm{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x)), \quad (4.24)$$

Згідно з теоремою 4.1, для матриці $A(x)$ існують такі числова матриця C_1 і оборотна матриця $Q_1(x)$ над $\mathbf{C}[x]$, що

$$C_1 A(x) Q_1(x) = T_1(x)\,\mathrm{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x))$$

або

$$A(x)Q_1(x) = T_2(x)\,\mathrm{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x)), \quad (4.25)$$

де $T_2(x) = C_1^{-1} T_1(x)$.

Очевидно, для оборотних матриць $Q(x)$ і $Q_1(x)$ існує така оборотна матриця $Q_2(x)$, що

$$Q(x)Q_2(x) = Q_1(x). \tag{4.26}$$

Помноживши обидві частини рівності (4.24) на $Q_2(x)$ справа, побачимо, що, згідно з співвідношенням (4.26), ліві частини рівності (4.26) і одержаної збігаються. Тому збігаються і праві частини:

$$P^{-1}(x)\operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x))Q_2(x) =$$
$$= T_2(x)\operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x)).$$

Запишемо цю рівність у вигляді

$$\operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x))Q_2(x) =$$
$$= H(x)\operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x)), \tag{4.27}$$

де $H(x) = P(x)T_2(x)$. На основі доведеної раніше леми 4.4 і рівності (4.27) одержимо

$$\operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))S(x) = H(x)\operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)),$$

де $S(x)$ – деяка оборотна матриця. Звідси

$$\operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))S(x) =$$
$$= P(x)T_2(x)\operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)),$$

а тому

$$P^{-1}(x)\operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) = C_1^{-1}K(x)S^{-1}(x).$$

Отже,

$$K(x) = C_1[P^{-1}(x)\operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))]S(x)$$

і

$$K_*(x)=S_*(x)[\mathrm{diag}(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x))]_*P_*^{-1}(x)C_{1*}.$$

Оскільки $P(x)$ – оборотна матриця і для неї $P_*^{-1}(x)=dP(x)$, де $d=[\det P(x)]^{-1}$, отримаємо

$$K_*(x)=S_*(x)[\mathrm{diag}(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x))]_*P(x)C_2,$$

де C_2 – неособлива числова матриця. Відомо (див. твердження 2.8), що

$$\operatorname{rang} M_{K_{r-1}(x)}(\varphi)=\operatorname{rang} M_{S_*(x)D_{r-1}(x)C_2}(\varphi)=\operatorname{rang} M_{D_{r-1}(x)}(\varphi).$$

Теорема 4.5 доведена.

Теорема 4.6. *Якщо* $A(x)$ *зображений у вигляді добутку*

$$A(x)=B(x)C(x),$$

де $B(x)$ – *унітальний матричний многочлен, причому форма Сміта матриці* $A(x)$ *дорівнює добутку форм Сміта матриць* $B(x)$ *і* $C(x)$, *то таке зображення єдине для кожного фіксованого розкладу форми Сміта у вигляді* (4.7).

Д о в е д е н н я . Нехай матричний многочлен $A(x)$ зображено у вигляді добутків

$$A(x)=(Ex^r+B_1x^{r-1}+\cdots+B_{r-1}x+B_r)C(x)$$

і

$$A(x)=(Ex^r+D_1x^{r-1}+\cdots+D_{r-1}x+D_r)C_1(x),$$

причому форма Сміта матриці $A(x)$ подана у вигляді добутку форм Сміта її співмножників (4.7). При цьому припускаємо, що форми Сміта матриць $Ex^r+B_1x^{r-1}+\cdots+B_{r-1}x+B_r$ і $Ex^r+D_1x^{r-1}+\cdots+D_{r-1}x+D_r$ та $C(x)$ і $C_1(x)$ збігаються.

Згідно з теоремою 4.2, існують такі неособлива числова матриця C і оборотні матриці $Q(x)$, $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ над $\mathbb{C}[x]$, що

$$CA(x)Q(x) = C(Ex^r + B_1x^{r-1} + \ldots + B_r)Q_1(x)Q_1^{-1}(x)C(x)Q(x),$$

$$CA(x)Q(x) = C(Ex^r + D_1x^{r-1} + \ldots + D_r)Q_2(x)Q_2^{-1}(x)C_1(x)Q(x).$$

Як і при доведенні рівності (4.12), поділимо обидві частини кожної рівності на матрицю

$$\mathrm{diag}(\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_n(x))$$

і прирівняємо при цьому праві частини обох співвідношень

$$C(Ex^r + B_1x^{r-1} + \ldots + B_r)R_1(x) = C(Ex^r + D_1x^{r-1} + \ldots + D_r)R_2(x),$$

де $R_1(x)$ і $R_1(x)$ – оборотні матриці, одержані в результаті проведеного розділення.

Помноживши обидві частини останньої рівності зліва на C^{-1} і справа на $R_1^{-1}(x)$, одержимо

$$Ex^r + B_1x^{r-1} + \ldots + B_r = (Ex^r + D_1x^{r-1} + \ldots + D_r)R_2(x)R_1^{-1}(x).$$

Матриця $R_2(x)R_1^{-1}(x)$ – многочленна матриця нульового степеня, для якої

$$Ex^r = Ex^r R_2(x)R_1^{-1}(x).$$

Отже, $R_2(x)R_1^{-1}(x) = E$ і

$$Ex^r + B_1x^{r-1} + \ldots + B_r = Ex^r + D_1x^{r-1} + \ldots + D_r.$$

Теорема 4.6 доведена.

4.3. Розв’язання проблеми виділення регулярного множника з матричного многочлена

Тут формулюються необхідні і достатні умови виділення регулярного множника з матричного многочлена. Вказані ефективні методи фактичної побудови виділюваних множників. Як наслідок, одержано критерій розв'язності матричного многочленного рівняння, а також запропоновано конструктивний метод знаходження його розв'язків.

Нехай характеристичний многочлен $\Delta(x)$ неособливої поліноміальної $n\times n$-матриці $A(x)$ над $\mathbb{C}[x]$, зображено у вигляді добутку

$$\Delta(x)=\varphi(x)\psi(x),\ \deg\varphi(x)=nr. \tag{4.28}$$

Відомо, що для матриці $A(x)$ існують такі оборотні матриці $P(x)$ і $Q(x)$ над $\mathbb{C}[x]$, що виконується співвідношення

$$P(x)A(x)Q(x)=\mathrm{diag}(\varepsilon_1(x),\varepsilon_2(x),\cdots,\varepsilon_n(x)), \tag{4.29}$$

де $\varepsilon_i(x)$ ділить $\varepsilon_{i+1}(x)$, $i=1,2,\ldots,n-1$.

Введемо таке означення.

Означення 4.2. *Діагональ-матрицею* (скорочено d*-матрицею*) будемо називати діагональну матрицю, кожний діагональний елемент якої ділить наступний елемент.

Надалі всі діагональні елементи d-матриць вважатимемо унітальними многочленами, тобто такими, що їх коефіцієнти при старших степенях дорівнюють одиничному елементові.

Позначимо через Σ множину всіх d-матриць, які ділять d-матрицю

$$\mathrm{diag}(\varepsilon_1(x),\varepsilon_2(x),\ldots,\varepsilon_n(x))$$

і визначник яких дорівнює $\varphi(x)$ (многочлен $\varphi(x)$ у співвідношенні (4.28) будемо також вважати унітальним многочленом). Нехай

$$\Phi=\mathrm{diag}(\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_n(x))$$

– довільна d-матриця із Σ. Маємо

$$\operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \dots, \varepsilon_n(x)) = \operatorname{diag}(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)) \times$$
$$\times \operatorname{diag}(\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)). \tag{4.30}$$

Зауважимо, що

$$\operatorname{diag}(\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$$

не мусить бути d -матрицю.

Розглянемо нижню трикутну матрицю вигляду

$$\left\| \begin{array}{ccccc} \frac{\varphi}{(\varphi_1,\ \varepsilon_1)} & & & & \mathbf{0} \\ \frac{\varphi}{(\varphi_2,\ \varepsilon_1)} k_{21} & \frac{\varphi}{(\varphi_2,\ \varepsilon_2)} & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ \frac{\varphi}{(\varphi_n,\ \varepsilon_1)} k_{n1} & \frac{\varphi}{(\varphi_n,\ \varepsilon_2)} k_{n2} & \dots & \frac{\varphi}{(\varphi_n,\ \varepsilon_{n-1})} k_{n,\,n-1} & \frac{\varphi}{(\varphi_n,\ \varepsilon_n)} \end{array} \right\|, \tag{4.31}$$

де $(\varphi_i, \varepsilon_j)$ – найбільший спільний дільник (н.с.д.) многочленів φ_i і ε_j, $i, j = 1, 2, \dots, n,\ i \geq j,$

якщо $\frac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} = 1,$ то $k_{ij} = 0;$

якщо $\frac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} \neq 1,$ то

$$k_{ij} = k_{ij0} + k_{ij1}x + \dots + k_{ijh_{ij}} x^{h_{ij}};\ h_{ij} = \deg \frac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} - 1,$$
$$i = 2, 3, \dots, n;\ \ j = 1, 2, \dots, n-1; i > j;$$

k_{ijs} – попарно різні змінні величини, які приєднують до поля $\mathbb{C}$, $s = 0, 1, \dots, h_{ij}.$

Означення 4.3. Матрицю (4.31) називатимемо *визначальною* матрицею, породженою d-матрицею Φ і позначатимемо через $W(\Phi)$.

Таким чином, якщо

$$\Sigma = \{\Phi_1, \Phi_1, \ldots, \Phi_t\},$$

то

$$W(\Phi_1), W(\Phi_2), \ldots, W(\Phi_t)$$

– визначальні матриці, породжені d-матрицями $\Phi_1, \Phi_1, \ldots, \Phi_t$, відповідно.

Означення 4.4. Множина $K_{r-1}(\Phi_l)$ матриць вигляду

$$K_{l,r-1}(x) = W(\Phi_l)P(x)\begin{Vmatrix} E & Ex & \ldots & Ex^{r-1} \end{Vmatrix}, \qquad (4.32)$$

$l = 1, 2, \ldots, t$ називатиметься *множиною супровідних матриць лівих множників матричного многочлена* $A(x)$, індукованих поліномом $\varphi(x)$.

Нашою метою є доведення такої основної теореми.

Теорема 4.7. *Нехай характеристичний многочлен* $\Delta(x)$ *неособливої поліноміальної* $n \times n$ *- матриці* $A(x)$ *зображений у вигляді добутку* (4.28). *Щоб матричний многочлен* $A(x)$ *можна було зобразити у вигляді добутку*

$$A(x) = B(x)C(x), \qquad (4.33)$$

де $B(x)$ *– унітальний, тобто коефіцієнт при старшому степені матричного многочлена* $B(x)$ *дорівнює одиничній матриці, і* $\det B(x) = \varphi(x)$, *необхідно і достатньо, щоб у множині* $K_{r-1}(\Phi_l)$ *знайшлася хоча б одна матриця* $K_{p,r-1}(x)$, $1 \le p \le t$, *ранг значення якої на системі коренів многочлена* φ *дорівнював* nr, *тобто*

$$\operatorname{rang} M_{K_{p,r-1}(x)}(\varphi) = nr\,.$$

Д о в е д е н н я. Д о с т а т н і с т ь. Поле

$$\mathbb{C}\,(k_{210}, k_{211}, \ldots, k_{n,n-1,h_{n,n-1}})$$

тобто поле, одержане внаслідок приєднання до $\mathbb{C}$ всіх неозначених коефіцієнтів всіх многочленів k_{ij}, які фігурують у матриці $W(\Phi)$, будемо надалі позначати через $\mathbb{C}(k)$.

Враховуючи співвідношення (4.29) і (4.30), зобразимо матрицю $A(x)$ у вигляді

$$A(x) = P^{-1}(x)\operatorname{diag}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)Y \times$$

$$\times Y^{-1}\operatorname{diag}(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)Q^{-1}(x), \qquad (4.34)$$

де матриця Y має вигляд

$$\left\|\begin{array}{ccccc} 1 & & & & \mathbf{0} \\ \dfrac{k_{21}}{\left(\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}, \psi_1\right)} & 1 & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & \\ \dfrac{k_{n1}}{\left(\dfrac{\varphi_n}{\varphi_1}, \psi_1\right)} & \dfrac{k_{n2}}{\left(\dfrac{\varphi_n}{\varphi_2}, \psi_2\right)} & \ldots & \dfrac{k_{n,n-1}}{\left(\dfrac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, \psi_{n-1}\right)} & 1 \end{array}\right\|. \qquad (4.35)$$

Тут k_{ij} ті ж самі, що і в матриці (4.31). Легко бачити, що виконується співвідношення

$$P^{-1}(x)\operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)Y^{-1} \times$$

$$\times Y \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}, \dots, \frac{\varphi}{\varphi_n}\right) P(x) = \operatorname{diag}(\varphi, \dots, \varphi), \qquad (4.36)$$

де

$$Y \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}, \dots, \frac{\varphi}{\varphi_n}\right) P(x)$$

є, очевидно, матрицею над $\mathbb{C}(k)[x]$.

Оскільки $\operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)Y^{-1}$ є єдиним розв'язком матричного рівняння

$$XY \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}, \dots, \frac{\varphi}{\varphi_n}\right) = \operatorname{diag}(\varphi, \dots, \varphi),$$

то на основі твердження 2.4 легко переконатися, що $\operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)Y^{-1}$ є також матрицею над $\mathbb{C}(k)[x]$. Згідно зі співвідношенням (4.36), бачимо, що матриця

$$Y \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}, \dots, \frac{\varphi}{\varphi_n}\right)$$

є взаємною матрицею матриці $\operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)Y^{-1}$. Отже, якщо

$$\operatorname{rang} M_{W(\Phi)P(x)\left\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \right\|}(\varphi) = nr,$$

то матриця

$$P^{-1}(x) \operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)Y^{-1}$$

у співвідношенні (4.34) регуляризується справа за допомогою деякої оборотної матриці над $\mathbb{C}(k)[x]$ (див. теорему 3.4) і тим самим

$$A(x) = B(x)C(x),$$

де $B(x)$ – унітальна поліноміальна матриця над $\mathbb{C}(k)[x]$ і $\det B(x)=\varphi(x)$. Надаючи змінним k_{ijs} допустимі значення (які, очевидно, існують) з поля $\mathbb{C}$, одержимо потрібні множники розкладу матриці $A(x)$.

Необхідність. Припустимо, що матричний многочлен $A(x)$ зображено у вигляді (4.33), причому

$$B(x)\sim\Phi=\mathrm{diag}(\varphi_1,\ldots,\varphi_n).$$

На основі теореми 4.2 існують такі неособлива числова матриця C і поліноміальні оборотні матриці $Q_1(x)$ і $Q_2(x)$ над $\mathbb{C}[x]$, що виконується співвідношення

$$CA(x)Q_1(x)=CB(x)Q_2(x)Q_2^{-1}(x)C(x)Q_1(x), \qquad (4.37)$$

де $CA(x)Q_1(x)$ і $CB(x)Q_2(x)$ – нижні трикутні поліноміальні матриці, головні діагоналі яких збігаються з головними діагоналями форм Сміта відповідно матриць $A(x)$ і $B(x)$. Тобто співвідношення (4.37) фактично має вигляд

$$\left\|\begin{matrix}\varepsilon_1 & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ * & & \varepsilon_n\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}\varphi_1 & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ * & & \varphi_n\end{matrix}\right\|\left\|\begin{matrix}\psi_1 & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ * & & \psi_n\end{matrix}\right\|, \qquad (4.38)$$

де ε_i ділить ε_{i+1}, а φ_i ділить φ_{i+1}, $i=1,2,\ldots,n-1$. Очевидно, що ε_i і φ_i ділять, відповідно, всі елементи стовпців, у яких вони знаходяться.

Помноживши співвідношення (4.38) на деяку унітрикутну матрицю $P_n(x)$ зліва, одержимо

$$\mathrm{diag}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)=$$

$$= \left\| \begin{matrix} \varphi_1 & & & \mathbf{0} \\ a_{21}\varphi_1 & \varphi_2 & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ a_{n1}\varphi_1 & a_{n2}\varphi_2 & \dots & \varphi_n \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \psi_1 & & & \mathbf{0} \\ b_{21} & \psi_2 & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & \psi_n \end{matrix} \right\|. \tag{4.39}$$

Без обмеження загальності будемо вважати, що

$$\deg b_{ij} < \deg \psi_j, \tag{4.40}$$

$i = 2, 3, \dots, n;$ $j = 1, 2, \dots, n-1; i > j.$ У протилежному випадку виконання нерівностей (4.40) можна досягти, додаючи деякі кратні верхніх рядків другого співмножника (починаючи з $(n-1)$-го) до нижніх і одночасно віднімаючи відповідні кратні стовпців першого співмножника (починаючи з n-го) від належних стовпців.

Із співвідношення (4.39) випливають рівності

$$a_{j+1,\,j}\psi_j + b_{j+1,\,j}\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i} = 0,\ j = 1, 2, \dots, n-1. \tag{4.41}$$

Використовуючи співвідношення (4.41) і враховуючи нерівності (4.40), знаходимо

$$b_{j+1,\,j} = \frac{\psi_j}{\left(\frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j}, \psi_j\right)} l_{j+1,\,j},\ \deg l_{j+1,\,j} < \deg\left(\frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j}, \psi_j\right). \tag{4.42}$$

Припустимо, що рівності

$$b_{j+k,\,j} = \frac{\psi_j}{\left(\frac{\varphi_{j+k}}{\varphi_j}, \psi_j\right)} l_{j+k,\,j},\ \deg l_{j+k,\,j} < \deg\left(\frac{\varphi_{j+k}}{\varphi_j}, \psi_j\right), \tag{4.43}$$

$j = 1, 2, \ldots, n-k$ виконуються для довільного $k < n-1$. Тобто елементи $b_{j+k,\, j}$ до k-ї піддіагоналі (включно) другого співмножника співвідношення (4.39) мають вигляд (4.43). Помноживши $(j+k-1)$-й рядок першого співмножника на j-й стовпець другого, який, враховуючи наше припущення, має вигляд

$$\left\| \underbrace{0 \ldots 0}_{j-1} \; \psi_j \; \frac{\psi_j}{\left(\frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j}, \psi_j\right)} l_{j+1,\, j} \ldots \frac{\psi_j}{\left(\frac{\varphi_{j+k}}{\varphi_j}, \psi_j\right)} l_{j+k,\, j} \;\; b_{j+k+1,\, j} \ldots b_{nj} \right\|^T,$$

одержимо

$$a_{j+k+1,\, j}\varphi_j\psi_j + a_{j+k+1,\, j+1}\varphi_{j+1} \frac{\psi_j}{\left(\frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j}, \psi_j\right)} l_{j+1,\, j} + \cdots +$$

$$+ a_{j+k+1,\, j+k}\varphi_{j+k} \frac{\psi_j}{\left(\frac{\varphi_{j+k}}{\varphi_j}, \psi_j\right)} l_{j+k,\, j} + \cdots + l_{j+k+1,\, j} b_{j+k+1,\, j} = 0.$$

Поділивши останню рівність на φ_j, одержимо

$$D\psi_j + b_{j+k+1,\, j} \frac{\varphi_{j+k+1}}{\varphi_j} = 0, \tag{4.44}$$

де D – деякий многочлен над $\mathbb{C}[x]$. Використовуючи співвідношення (4.43) і враховуючи нерівності (4.40), знаходимо

$$b_{j+k+1,\, j} = \frac{\psi_j}{\left(\frac{\varphi_{j+k+1}}{\varphi_j}, \psi_j\right)} l_{j+k+1,\, j}, \;\; \deg l_{j+k+1,\, j} < \deg \left(\frac{\varphi_{j+k+1}}{\varphi_j}, \psi_j\right),$$

$j = 1, 2, \dots, n-1$. Отже, нами доведене таке твердження.

Твердження 4.1. *У співвідношенні* (4.39) *без обмеження загальності можна вважати, що другий співмножник має вигляд*

$$\left\| \begin{matrix} \psi_1 & & & & \mathbf{0} \\ \dfrac{\psi_1}{\left(\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}, \psi_1\right)} l_{21} & \psi_2 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\psi_1}{\left(\dfrac{\varphi_n}{\varphi_1}, \psi_1\right)} l_{n\,1} & \dfrac{\psi_2}{\left(\dfrac{\varphi_n}{\varphi_2}, \psi_2\right)} l_{n2} & \dots & \dfrac{\psi_{n-1}}{\left(\dfrac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, \psi_{n-1}\right)} l_{n,n-1} & \psi_n \end{matrix} \right\|, \quad (4.45)$$

де

$$\deg l_{j+i,\,j} < \deg\left(\frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j}, \psi_j\right).$$

Беручи до уваги твердження 4.1, поділимо обидві частини рівності (4.39) справа на $\operatorname{diag}(\psi_1, \dots, \psi_n)$. Помноживши одержану таким чином рівність справа на взаємну матрицю матриці $\operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, одержимо

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1 & & & & \mathbf{0} \\ a_{21}\varphi_1 & \varphi_2 & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ a_{n1}\varphi_1 & a_{n2}\varphi_2 & \dots & a_{n,n-1}\varphi_{n-1} & \varphi_n \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times\begin{Vmatrix} \dfrac{\varphi}{(\varphi_1,\ \varepsilon_1)} & & & & \mathbf{0} \\ \dfrac{\varphi}{(\varphi_2,\ \varepsilon_1)}l_{21} & \dfrac{\varphi}{(\varphi_2,\ \varepsilon_2)} & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ \dfrac{\varphi}{(\varphi_n,\ \varepsilon_1)}l_{n1} & \dfrac{\varphi}{(\varphi_n,\ \varepsilon_2)}l_{n2} & \dots & \dfrac{\varphi_n}{(\varphi_n,\ \varepsilon_{n-1})}l_{n,\,n-1} & \dfrac{\varphi}{(\varphi_n,\ \varepsilon_n)} \end{Vmatrix} =$$

$$= E\varphi. \tag{4.46}$$

Отже, ми довели твердження.

Твердження 4.2. *Взаємною матрицею, позначимо її через* $L(\Phi)$*, першого співмножника в добутку* (4.39), *є другий співмножник у співвідношенні* (4.46), *причому* $l_{j+1,\,j}$ *мають степінь, менший степеня*

$$\left(\frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j},\ \psi_j\right)$$

або рівні нулеві, якщо

$$\left(\frac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j},\ \psi_j\right) = 1.$$

Переходячи до співвідношення (4.38), на основі співвідношень (4.33), (4.37) і (4.39) переконуємось, що поліноміальна матриця

$$P_n^{-1}(x)\begin{Vmatrix} \varphi_1 & & & & \mathbf{0} \\ a_{21}\varphi_1 & \varphi_2 & & & \\ \dots & \dots & \dots & & \\ a_{n1}\varphi_1 & a_{n2}\varphi_2 & & a_{n,n-1}\varphi_{n-1} & \varphi_n \end{Vmatrix} \tag{4.47}$$

регуляризується справа. Використовуючи теорему 3.4 і беручи до уваги твердження 4.2, бачимо, що

$$\operatorname{rang} M_{L(\Phi)P_n(x)\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \|}(\varphi) = nr,$$

або, позначаючи через P добуток $P_n(x)C$, C – числова матриця із співвідношення (4.37) (таким чином, $P = P_n(x)C$ належить до множини оборотних матриць, що задовольняють співвідношення (4.29)), знаходимо

$$\operatorname{rang} M_{L(\Phi)P(x)\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \|}(\varphi) = nr .$$

Очевидно, що, покладаючи в матриці $L(\Phi)$ замість многочленів $l_{ij} \in \mathbb{C}[x]$ многочлени

$$k_{ij} = k_{ij0} + k_{ij1}x + \ldots + k_{ijh_{ij}} x^{h_{ij}} ,$$

одержимо

$$\operatorname{rang} M_{W(\Phi)P(x)\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \|}(\varphi) = nr,$$

де $W(\Phi)$ – матриця (4.31), одержана із $L(\Phi)$ шляхом підстановки $l_{ij} \to k_{ij}$.

Для завершення доведення необхідності досить довести таку теорему.

Теорема 4.8. *Нехай P і P_1 – довільні оборотні матриці над $\mathbb{C}[x]$, що задовольняють співвідношення* (4.29), *тобто*

$$PA(x)Q = P_1A(x)Q_1 = \operatorname{diag}(\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots, \varepsilon_n(x)). \qquad (4.48)$$

Тоді

$$\operatorname{rang} M_{W(\Phi)P(x)\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \|}(\varphi) =$$

$$= \operatorname{rang} M_{W(\Phi)P_1(x)\| E \quad Ex \quad \ldots \quad Ex^{r-1} \|}(\varphi).$$

Д о в е д е н н я . Спочатку доведемо ряд допоміжних тверджень.

Легко бачити, що виконується рівність

$$Y \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}, \frac{\varphi}{\varphi_2}, \ldots, \frac{\varphi}{\varphi_n}\right) = \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}, \frac{\varphi}{\varphi_2}, \ldots, \frac{\varphi}{\varphi_n}\right) U = W(\Phi),$$

де матриця Y має вигляд (4.35), а

$$U =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ \dfrac{\frac{\varphi_2}{\varphi_1}}{\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \psi_1\right)} k_{21} & 1 & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\frac{\varphi_n}{\varphi_1}}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \psi_1\right)} k_{n1} & \dfrac{\frac{\varphi_n}{\varphi_2}}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_2}, \psi_2\right)} k_{n2} & \cdots & \dfrac{\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, \psi_{n-1}\right)} k_{n,n-1} & 1 \end{matrix} \right\|. \tag{4.49}$$

Нехай T – довільна оборотна матриця над $\mathbb{C}[x]$ вигляду

$$T=\begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1,n-1} & t_{1\,n} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2,n-1} & t_{2\,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_1}t_{n1} & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_2}t_{n2} & \cdots & \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_{n-1}}t_{n,n-1} & t_{n\,n} \end{Vmatrix}. \qquad (4.50)$$

Розглянемо добуток матриць U і T, який надалі позначатимемо буквою V, тобто $V=UT$. Через V_i позначимо підматрицю матриці V, утворену внаслідок викреслення i перших рядків та i перших стовпців матриці V, $i=1,2,\ldots,n-1$. Таким чином, V_{n-1} містить лише один елемент.

Твердження 4.3. *Многочлен*

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\psi_j\right)^{-1},\quad i>j$$

ділить многочлен

$$\frac{\varphi_{i+l}}{\varphi_j}\left(\frac{\varphi_{i+l}}{\varphi_j},\psi_j\right)^{-1},\quad i=2,3,\ldots,n,\quad j=1,2,\ldots,n-1,\ i+l\le n.$$

Доведення. Маємо

$$\frac{\varphi_{i+l}}{\varphi_j}\left(\frac{\varphi_{i+l}}{\varphi_j},\psi_j\right)^{-1}=\frac{\varphi_{i+l}}{\varphi_i}\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\frac{\varphi_{i+l}}{\varphi_i}\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\psi_j\right)^{-1}=$$

$$=\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\psi_j\right)^{-1}\frac{\varphi_{i+l}}{\varphi_i}\left(\frac{\varphi_{i+l}}{\varphi_i},\frac{\psi_j}{\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\psi_j\right)}\right)^{-1}.$$

Очевидно, що другий множник в останньому добутку – многочлен. Твердження доведено.

Твердження 4.4. *Многочлен*

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\psi_j\right)^{-1}$$

ділить многочлен

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_{j-l}}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{j-l}},\psi_{j-l}\right)^{-1},\ i>j,\ \ j-l\geq 1.$$

Д о в е д е н н я . Легко бачити, що

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_{j-l}}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{j-l}},\psi_{j-l}\right)^{-1}=\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\psi_j\right)^{-1}\frac{\varphi_i}{\varphi_{j-l}}\times$$

$$\times\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{j-l}},\psi_{j-l}\right)^{-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\psi_j\right)\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\frac{\psi_{j-l}}{\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{j-l}},\psi_{j-l}\right)}\right)^{-1}.$$

Оскільки

$$\psi_{j-l}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{j-l}}, \psi_{j-l}\right)^{-1}$$

ділить ψ_j (на основі того, що ε_{j-l} ділить ε_j і φ_{j-l} ділить φ_j), то твердження доведено.

Твердження 4.5. *Многочлен*

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_{j-l}}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_{j-l}}, \psi_{j-l}\right)^{-1}$$

ділить многочлен

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \psi_j\right)^{-1}\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_{j-l}}, \ i > j, \ \ j-l \geq 1, \ \ j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Д о в е д е н н я. Маємо

$$\frac{\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}}{\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}, \psi_j\right)}\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_{j-l}} = \frac{\dfrac{\varphi_i}{\varphi_{j-l}}}{\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_{j-l}}, \psi_{j-l}\right)}\frac{\psi_j}{\psi_{j-l}}\frac{\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_{j-l}}, \psi_{j-l}\right)}{\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}, \psi_j\right)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\varphi_i}{\varphi_{j-l}}}{\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_{j-l}}, \psi_{j-l}\right)}\frac{\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}\dfrac{\varepsilon_j}{\varepsilon_{j-l}}, \psi_j\right)}{\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}, \psi_j\right)}.$$

Очевидно, що другий співмножник в останньому добутку – поліном, і т.д.

Твердження 4.6. *Многочлен*

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\psi_j\right)^{-1},\ i>j$$

ділить елементи j*-го стовпця матриці* V *починаючи з* i*-го, тобто елементи* v_{ij}, $v_{i+1.j}$, $\ldots, v_{nj}$.

Доведення. Елемент $v_{i+s,j}$, $s=0,1,\ldots,n-1$, j-го стовпця матриці V має вигляд

$$v_{i+s,j}=\frac{\frac{\varphi_{i+s}}{\varphi_1}k_{i+s,1}}{\left(\frac{\varphi_{i+s}}{\varphi_1},\psi_1\right)}t_{1j}+\frac{\frac{\varphi_{i+s}}{\varphi_2}k_{i+s,2}}{\left(\frac{\varphi_{i+s}}{\varphi_2},\psi_2\right)}t_{2j}+\cdots+\frac{\frac{\varphi_{i+s}}{\varphi_j}k_{i+s,j}}{\left(\frac{\varphi_{i+s}}{\varphi_j},\psi_j\right)}t_{ij}+$$

$$+\frac{\frac{\varphi_{i+s}}{\varphi_{j+1}}k_{i+s,j+1}}{\left(\frac{\varphi_{i+s}}{\varphi_{j+1}},\psi_{j+1}\right)}\frac{\varepsilon_{j+1}}{\varepsilon_j}t_{j+1,j}+\cdots+\frac{\frac{\varphi_{i+s}}{\varphi_{i+s-1}}k_{i+s,i+s-1}}{\left(\frac{\varphi_{i+s}}{\varphi_{i+s-1}},\psi_{i+s-1}\right)}\frac{\varepsilon_{i+s-1}}{\varepsilon_j}+\frac{\varepsilon_{i+s}}{\varepsilon_j}.$$

Многочлен

$$\frac{\varphi_{i+s}}{\varphi_j}\left(\frac{\varphi_{i+s}}{\varphi_j},\psi_j\right)^{-1}$$

ділить всі доданки, які знаходяться в написаній вище сумі лівіше від нього, на основі твердження 4.4 і всі доданки, які знаходяться справа від нього, на основі твердження 4.5. Беручи до уваги твердження 4.3, бачимо, що многочлен

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \psi_j\right)^{-1}$$

ділить многочлен

$$\frac{\varphi_{i+s}}{\varphi_j}\left(\frac{\varphi_{i+s}}{\varphi_j}, \psi_j\right)^{-1}.$$

Твердження доведено.

Лема 4.5. *Многочлен* $\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}$ *взаємно простий з* $\det V_i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Доведення. Зауважимо, що $(n-i)\times(n-i)$-матриця V_i є добутком двох матриць, перша з яких одержана з матриці U внаслідок викреслення її перших i рядків, а друга – з матриці T викресленням її перших i стовпців.

На основі формули Біне - Коші (див. [5], с. 20) знаходимо

$$\det V_i = \sum_j \left|U_{ij}(x,k)\right| \left|T_{ij}(x)\right| + \det T_i(x), \tag{4.51}$$

де $\sum_j \left|U_{ij}(x,k)\right| \left|T_{ij}(x)\right|$ – сума добутків усіх можливих мінорів максимального $n-i$-го порядку першого співмножника матриці V_i, за винятком мінора унітрикутної матриці, що дорівнює одиниці, на відповідні мінори того ж порядку другого співмножника матриці V_i, а $T_i(x)$ – підматриця матриці $T(x)$, одержана внаслідок викреслення i перших її рядків та i перших стовпців.

Якщо припустити, всупереч твердженню леми, що многочлени

$$\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i} \text{ і } \det V_i,$$

мають спільний корінь α, то, враховуючи вигляд матриці $T(x)$ і умову

$$\frac{\varphi_{i+1}(\alpha)}{\varphi_i(\alpha)} = 0,$$ [1]

легко зауважити, що у випадку

$$\frac{\varepsilon_{i+1}(\alpha)}{\varepsilon_i(\alpha)} = 0$$

виконується співвідношення

$$T(\alpha) = \begin{Vmatrix} * & * \\ \mathbf{0} & T_i(\alpha) \end{Vmatrix}. \qquad (4.52)$$

Оскільки кожний ненульовий мінор $\left|U_{ij}(x,k)\right|$ є сумою одночленів, степінь яких відмінний від нульового, то із співвідношення (4.51) випливає, що $\det T_i(\alpha) = 0.$ Тобто, згідно з співвідношенням (4.52), $\det T(\alpha) = 0,$ що суперечить оборотності матриці $T(x)$.

Якщо

$$\frac{\varepsilon_{i+1}(\alpha)}{\varepsilon_i(\alpha)} \neq 0,$$

---

[1]яЦейявиразяозначаєязначенняянастки $\dfrac{\varphi_{i+1}(x)}{\varphi_i(x)}$ на елементі α. я

то, очевидно, в першому співмножнику матриці V_i $k_{i+1+t,i} \neq 0$, $t = 0, 1, \ldots, n-i-1$.

Нехай спочатку нерівність

$$\frac{\varepsilon_{i+1}(\alpha)}{\varepsilon_{i-l}(\alpha)} \neq 0$$

виконується при всіх $l = 0, 1, \ldots, i-1$.

Якщо нерівність

$$\frac{\varepsilon_{i+1+t}(\alpha)}{\varepsilon_{i-l}(\alpha)} \neq 0, \ \ 0 \le t \le n-i-1$$

виконується при всіх t і всіх l, то через те, що кожний мінор $\left|U_{ij}(\alpha, k)\right|$ відмінний від нуля і містить своїм доданком одночлен, що не зустрічається як доданок в інших мінорах $n-i$-го порядку першого співмножника матриці $V_i(\alpha)$, система всіх можливих мінорів $\left|U_{ij}(x, k)\right|$, що фігурують у співвідношенні (4.51) – лінійно незалежна над $\mathbb{C}$ при $x = \alpha.$ І тому із співвідношення (4.51) при $x = \alpha$ випливає, що $\det T_{ij}(\alpha) = 0,\ \det T_i(\alpha) = 0.$ Тобто $n-i$ останні стовпці матриці $T(\alpha)$ є лінійно залежними, що неможливо.

Якщо нерівність

$$\frac{\varepsilon_{i+1+t}(\alpha)}{\varepsilon_{i-l}(\alpha)} \neq 0$$

виконується не при всіх t, то нехай t_1 буде найменшим натуральним числом, при якому

$$\frac{\varepsilon_{i+1+t_1}(\alpha)}{\varepsilon_{i-l}(\alpha)} = 0$$

(при деякому l). Тоді, розглядаючи матрицю $T(x)$, легко зауважити, що підматриця матриці $T(\alpha)$, складена з її останніх $n-i$ стовпців, містить у лівому нижньому куті нульову підматрицю розмірів $(n-i-t_1)\times t_1$ і в правому нижньому куті неособливу підматрицю $T_{n-i-t_1}(\alpha)$ розмірів $(n-i-t_1)\times(n-i-t_1)$. Оскільки перші t_1 рядків першого співмножника матриці $V_i(\alpha)$ лівіше одиничних елементів містять лише ненульові елементи, кратні деяким поліномам $k_{ij}(\alpha)$, і утворюють підматрицю, всі можливі мінори порядку t_1 якої ненульові і лінійно незалежні над $\mathbb{C}$, а матриця $T_{n-i-t_1}(\alpha)$ – неособлива, то, як і в попередньому випадку, використовуючи співвідношення (4.51), робимо висновок, що t_1 перших стовпців підматриці матриці $T(\alpha)$, складеної з її $n-i$ стовпців – лінійно залежні, що суперечить оборотності матриці $T(x)$.

Нехай нерівність

$$\frac{\varepsilon_{i+1}(\alpha)}{\varepsilon_{i-l}(\alpha)} \neq 0$$

виконується не для всіх l. Нехай l_1 – найменше число, при якому

$$\frac{\varepsilon_{i+1}(\alpha)}{\varepsilon_{i-l_1}(\alpha)} \neq 0,\ 1 \le l_1 \le i-1.$$

Оскільки

$$\frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_{i-l_1-q}} = \frac{\varepsilon_{i+1}}{\varepsilon_{i-l_1}} \frac{\varepsilon_{i-l_1}}{\varepsilon_{i-l_1-q}},$$

то

$$\frac{\varepsilon_{i-l_1}(\alpha)}{\varepsilon_{i-l_1-q}(\alpha)}=0,\ \ 0\le q\le i-l_1-1.$$

Так само

$$\frac{\varepsilon_{i+1+p}(\alpha)}{\varepsilon_{i-l_1-q}(\alpha)}=0,\ \ 0\le p\le n-i-1.$$

Таким чином, матриця $T(\alpha)$ містить у лівому нижньому куті нульову підматрицю розмірів $(n-i)\times(i-l_1)$. Більше того, з нерівності

$$\frac{\varepsilon_{i+l_1}(\alpha)}{\varepsilon_{i-(l_1-1)}(\alpha)}\neq 0$$

і співвідношення

$$\frac{\varepsilon_{i+1}(\alpha)}{\varepsilon_{i-l_1-q}(\alpha)}=\frac{\varepsilon_{i+1}(\alpha)}{\varepsilon_{i-l_1+1}(\alpha)}\frac{\varepsilon_{i-l_1+1}(\alpha)}{\varepsilon_{i-l_1-q}(\alpha)}=0$$

випливає, що

$$\frac{\varepsilon_{i-l_1+1}(\alpha)}{\varepsilon_{i-l_1-q}(\alpha)}=0\,.$$

Тобто матриця $T(\alpha)$ містить у лівому нижньому куті нульову підматрицю розмірів $(n-i-l_1)\times(i-l_1)$.

Нехай тепер у цій новій ситуації t_1 – найменше натуральне число, при якому

$$\frac{\varepsilon_{i+1+t_1}(\alpha)}{\varepsilon_{i-(l_1-s)}(\alpha)}=0,\ \ 1\le s\le l_1,\ \ 1\le t_1\le n-i-1.$$

Тоді легко бачити, що підматриця матриці $T(\alpha)$, складена з її останніх $n-i$ стовпців, містить у лівому нижньому куті нульову підматрицю розмірів $(n-i-t_1)\times t_1$ і в правому нижньому куті неособливу підматрицю розмірів $(n-i-t_1)\times(n-i-t_1)$. Оскільки у випадку, що розглядається, перші t_1 рядків першого співмножника матриці $V_i(\alpha)$ лівіше одиничних елементів містять l_1 стовпців (рахуючи справа), всі елементи яких ненульові (і кратні деяким поліномам $k_{ij}(\alpha)$, то, як і в попередніх випадках, робимо висновок, що підматриця матриці $T(\alpha)$, складена з її останніх $n-i$ стовпців, містить підматрицю, складену з t_1 її перших стовпців, усі підстовпці якої висоти $n-i-l_1$ (рахуючи знизу) – лінійно залежні.

Таким чином, можемо вважати, що матриця $T(\alpha)$ містить нульову підматрицю розмірів $(n-i+t_1+1)\times(i-l_1+1)$. А це означає, що $\det T(\alpha)=0$, що суперечить оборотності матриці $T(x)$. Лема доведена.

Лема 4.6. *Для* $(n-i)\times(n-i)$ *-матриць*

$$F_i = \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i}, \frac{\varphi_{i+2}}{\varphi_i}, \cdots, \frac{\varphi_n}{\varphi_i}\right)$$

і підматриць V_i *існують такі квадратні матриці* X_i *і* Y_i *над* $\mathbb{C}(k)[x]$, *що виконується співвідношення*

$$F_i X_i + V_i Y_i = E, \tag{4.53}$$

E *– одинична матриця відповідного порядку,* $i=1,2,\ldots,n-1$.

Д о в е д е н н я. Достатньо показати, що стовпці матриць F_i і V_i породжують одиничний (правий) $\mathbb{C}(k)[x]$ – модуль. Цей модуль, позначимо його через (F_i, V_i), має, очевидно, лінійно незалежний базис, який можна записати у вигляді $(n-i)\times(n-i)$–матриці Z_i.

Доведемо, що Z_i – оборотна матриця. Для цього досить показати, що $\det Z_i \in \mathbb{C}$. Зауважимо, що Z_i ділить зліва кожну матрицю, утворену зі стовпців матриць F_i і V_i, тому $\det Z_i$ ділить визначник кожної такої матриці. Враховуючи, що $\det Z_i$ ділить $\det F_i$, робимо висновок, що $\det Z_i \in \mathbb{C}[x]$. Якщо б $\det Z_i$ не був числом, то він мав би деякий корінь $\alpha \in \mathbb{C}$, який був би коренем також деякого многочлена $\frac{\varphi_t}{\varphi_i}$, $t > i$. Очевидно, $t \neq i+1$, бо $\det Z_i$ ділить $\det V_i$, а на основі леми 4.5

$$\left(\frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i},\ \det V_i\right) = 1.$$

Без обмеження загальності будемо вважати, що

$$\frac{\varphi_j(\alpha)}{\varphi_i(\alpha)} \neq 0,\ \ j = i+1, i+2, \dots, t-1.$$

Розглянемо всі матриці вигляду

$$\left\|\begin{matrix} \frac{\varphi_{i+1}}{\varphi_i} & 0 & \cdots & 0 & & & \\ 0 & \frac{\varphi_{i+2}}{\varphi_i} & \cdots & 0 & & * & \\ \ldots & \ldots & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & & \frac{\varphi_{t-1}}{\varphi_i} & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & v_{tt} & \cdots & v_{tn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & v_{nt} & \ldots & v_{nn} \end{matrix}\right\|, \qquad (4.54)$$

утворені з стовпців матриць F_i і V_i.

Якщо

$$\frac{\varphi_t(\alpha)}{\varphi_i(\alpha)} = 0,$$

то на основі рівності

$$\frac{\varphi_t(\alpha)}{\varphi_i(\alpha)} = \frac{\varphi_t(\alpha)}{\varphi_{t-1}(\alpha)} \frac{\varphi_{t-1}(\alpha)}{\varphi_i(\alpha)}$$

і того, що

$$\frac{\varphi_{t-1}(\alpha)}{\varphi_i(\alpha)} \neq 0$$

ми одержали б, що

$$\frac{\varphi_t(\alpha)}{\varphi_{t-1}(\alpha)} = 0.$$

Оскільки, згідно з лемою 4.5, визначники не всіх матриць вигляду (4.54) мають корінь α, то α не може бути коренем многочлена $\det Z_i$, що суперечить нашому припущенню. Отже, $\det Z_i \in \mathbb{C}$, тобто Z_i – оборотна матриця, і т.д.

Лема 4.7. *Для матриці* V *існує така нижня унітрикутна матриця* S *з елементами із* $\mathbb{C}(k)[x]$, *що добуток* VS *має вигляд*

$$VS = \begin{Vmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1,n-1} & u_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1}u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2,n-1} & u_{2n} \\ \frac{\varphi_3}{\varphi_1}u_{31} & \frac{\varphi_3}{\varphi_2}u_{32} & \cdots & u_{3,n-1} & u_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2}u_{n2} & \cdots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}u_{n,n-1} & u_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{4.55}$$

Доведення. При $i=1$ співвідношення (4.53) має вигляд

$$F_1X_1 + V_1Y_1 = E.$$

Помноживши його справа на перший стовпець матриці V без першого елемента $v_{11} = t_{11}$, одержимо

$$F_1X_1\begin{Vmatrix} v_{21} \\ \cdots \\ v_{n1} \end{Vmatrix} + V_1Y_1\begin{Vmatrix} v_{21} \\ \cdots \\ v_{n1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} v_{21} \\ \cdots \\ v_{n1} \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, що стовпець $F_1X_1\begin{Vmatrix} v_{21} & \cdots & v_{n1} \end{Vmatrix}^T$ має вигляд

$$\begin{Vmatrix} \frac{\varphi_2}{\varphi_1}u_{21} & \cdots & \frac{\varphi_n}{\varphi_1}u_{n1} \end{Vmatrix}^T.$$

Позначивши $Y_1 \| v_{21} \quad \cdots \quad v_{n1} \|^T$ через $\| s_{21} \quad \cdots \quad s_{n1} \|^T$, бачимо, що виконується співвідношення

$$V \begin{Vmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ s_{21} & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ s_{n1} & 0 & & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} u_{11} & * & \cdots & * \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} u_{21} & * & \cdots & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} u_{n1} & * & \cdots & * \end{Vmatrix}.$$

Використовуючи співвідношення (4.53) при $i = 2, 3, \dots, n-1$ і, як і в попередньому випадку, застосовуючи його послідовно до матриць $V_2, \dots, V_{n-1},$ переконуємось у правильності леми 4.7.

Твердження 4.7. *Нехай* $\Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ *– діагональ-матриця над* $\mathbb{C}[x]$. *Щоб для матриці* H *з елементами з* $\Pi[x]$, *де* Π *довільне розширення поля* $\mathbb{C}$, *існувала матриця* G *така, що*

$$H\Phi = \Phi G, \tag{4.56}$$

необхідно і достатньо, щоб матриця H *мала вигляд*

$$H = \begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1,n-1} & h_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2,n-1} & h_{2n} \\ \frac{\varphi_3}{\varphi_1} h_{31} & \frac{\varphi_3}{\varphi_2} h_{32} & \cdots & h_{3,n-1} & h_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} h_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2} h_{n2} & \cdots & \frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} h_{n,n-1} & h_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{4.57}$$

Доведення безпосередньо випливає з означення матриці Φ і співвідношення (4.56).

Твердження 4.8. *Множина оборотних матриць* H, *які задовольняють співвідношення* (4.56), *є групою стосовно матричного множення.*

Доведення очевидне.

Твердження 4.9. *Якщо оборотна матриця* H *має вигляд* (4.57), *то і* H^{-1} *має вигляд* (4.57).

Доведення випливає з тверджень 4.7 і 4.8.

Лема 4.8. *Якщо нижня унітрикутна матриця* S *задовольняє співвідношення*

$$\left\| \begin{matrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1,n-1} & t_{1n} \\ \dfrac{\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1} t_{21}}{\left(\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}, \psi_1\right)} & t_{22} & \cdots & t_{2,n-1} & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\dfrac{\varphi_n}{\varphi_1} t_{n1}}{\left(\dfrac{\varphi_n}{\varphi_1}, \psi_1\right)} & \dfrac{\dfrac{\varphi_n}{\varphi_2} t_{n2}}{\left(\dfrac{\varphi_n}{\varphi_2}, \psi_2\right)} & \cdots & \dfrac{\dfrac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} t_{n,n-1}}{\left(\dfrac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, \psi_{n-1}\right)} & t_{nn} \end{matrix} \right\| S = H, \qquad (4.58)$$

де матриця H *має вигляд* (4.57), *то* S^{-1} *має вигляд*

$$S^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dfrac{\frac{\varphi_2}{\varphi_1} l_{21}}{\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}, \psi_1\right)} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\frac{\varphi_n}{\varphi_1} l_{n1}}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \psi_1\right)} & \dfrac{\frac{\varphi_n}{\varphi_2} l_{n2}}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_2}, \psi_2\right)} & \cdots & \dfrac{\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}} l_{n,n-1}}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}}, \psi_{n-1}\right)} & 1 \end{matrix} \right\|. \tag{4.59}$$

Д о в е д е н н я . Згідно з твердженням 4.9, матриця H^{-1} має вигляд (4.57). Помноживши рівність (4.58)[2] зліва на H^{-1} і справа на S^{-1}, одержимо

$$S^{-1} = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & & & 0 \\ s_{21} & 1 & & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{n,n-1} & 1 \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{matrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1,n-1} & H_{1n} \\ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2,n-1} & H_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\varphi_n}{\varphi_1} H_{n1} & \frac{\varphi_n}{\varphi_2} H_{n2} & \cdots & \frac{\varphi_n}{\varphi_1} H_{n,n-1} & H_{nn} \end{matrix} \right\| V. \tag{4.60}$$

---

[2]яВраховуючи твердження 4.6, першим співмножником у добуткові (4.58) можна вважати матрицю V . Тоді l_{ij} яв матриці (4.59) – многочлени над $\mathbb{C}(k)[x]$.я

Ми хочемо показати, що

$$s_{ij} = \frac{\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}}{\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}, \psi_j\right)} l_{ij}, \; i > j. \tag{4.61}$$

Елемент s_{ij} отримується в результаті множення i-го рядка матриці H^{-1} на j-й стовпець першого співмножника добутку (4.58) (див. виноску). Розбивши при цьому i-й рядок матриці H^{-1} на три підрядки, одержимо

$$s_{ij} = \left\| \frac{\varphi_i}{\varphi_1} H_{i1} \quad \ldots \quad \frac{\varphi_i}{\varphi_{j-1}} H_{1,\, j-1} \quad \frac{\varphi_i}{\varphi_j} H_{ij} \right\| \left\| t_{1j} \quad \ldots \quad t_{ij} \right\|^T +$$

$$+ \left\| \frac{\varphi_i}{\varphi_{j+1}} H_{i,\, j+1} \quad \ldots \quad \frac{\varphi_i}{\varphi_{i-1}} H_{i,i-1} \right\| \left\| \frac{\dfrac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j}}{\left(\dfrac{\varphi_{j+1}}{\varphi_j}, \psi_j\right)} t_{j+1,\, j} \quad \ldots \quad \frac{\dfrac{\varphi_{j-1}}{\varphi_j}}{\left(\dfrac{\varphi_{i-1}}{\varphi_j}, \psi_j\right)} t_{i-1,\, j} \right\|^T +$$

$$+ \left\| H_{ii} \quad \ldots \quad H_{in} \right\| \left\| \frac{\varphi_i}{\varphi_j} \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \psi_j\right)^{-1} t_{ij} \quad \ldots \quad \frac{\varphi_n}{\varphi_j} \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_j}, \psi_j\right)^{-1} t_{nj} \right\|^T . \tag{4.62}$$

Якщо $i = j + 1,$ то другий доданок в останній сумі відсутній внаслідок відсутності у цьому випадку другого підрядка. Покажемо, що кожний із трьох доданків у сумі, що розглядається, має множник

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j} \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \psi_j\right)^{-1}.$$

Оскільки

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_k}=\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\frac{\varphi_j}{\varphi_k}$$

при $k \le j$, то перший доданок суми (4.62) має множник $\frac{\varphi_i}{\varphi_k}$, а отже, і множник

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\psi_j\right)^{-1}.$$

Довільний доданок суми, якій дорівнює другий доданок співвідношення (4.62), має вигляд

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_{j+k}}H_{i,\,j+k}\,\frac{\varphi_{j+k}}{\varphi_j}\left(\frac{\varphi_{j+k}}{\varphi_j},\psi_j\right)^{-1}t_{j+k,\,j}=$$

$$=\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\psi_j\right)^{-1}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\psi_j\right)\left(\frac{\varphi_{j+k}}{\varphi_j},\psi_j\right)^{-1}h_{i,\,j+k}t_{j+k,\,j},$$

$$1\le k\le i-j-1.$$

Очевидно, що при $i \ge j+k$ частка

$$\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\psi_j\right)\left(\frac{\varphi_{j+k}}{\varphi_j},\psi_j\right)^{-1}$$

– многочлен. Кожний доданок (при $l \ge i$) суми, якій дорівнює третій доданок суми (4.62), має вигляд

$$\frac{\varphi_l}{\varphi_j}\left(\frac{\varphi_l}{\varphi_j},\psi_j\right)^{-1}H_{il}t_{li}=\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\psi_j\right)^{-1}\frac{\dfrac{\varphi_l}{\varphi_j}}{\left(\dfrac{\varphi_l}{\varphi_j},\dfrac{\psi_j}{\left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j},\psi_j\right)}\right)}H_{il}t_{li}. \tag{4.63}$$

Очевидно, що останній множник у правій частині співвідношення (4.63) – многочлен. Отже, всі три виділені доданки суми (4.62) мають спільний дільник

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_j}\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j},\psi_j\right)^{-1}.$$

Лема доведена.

Лема 4.9. *Для матриці* $W(\Phi)T$*, де* T *– довільна оборотна матриця над* $\mathbb{C}[x]$ *вигляду* (4.50), *існує така оборотна матриця* R *над* $\mathbb{C}(k)[x]$, *що добуток* $RW(\Phi)T$ *має вигляд*

$$RW(\Phi)T =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccc}
\frac{\varphi}{\varphi_1} & & \dots & & \mathbf{0} \\
\frac{\frac{\varphi}{\varphi_1}}{\left(\frac{\varphi}{\varphi_1},\ \psi_1\right)} r_{21} & \frac{\varphi}{\varphi_2} & \dots & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\frac{\varphi}{\varphi_1}}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1},\ \psi_1\right)} r_{n1} & \frac{\frac{\varphi}{\varphi_2}}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_2},\ \psi_2\right)} r_{n2} & \dots & \frac{\frac{\varphi}{\varphi_{n-1}}}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}},\ \psi_{n-1}\right)} r_{n,n-1} & \frac{\varphi}{\varphi_n}
\end{array} \right\|, \tag{4.64}$$

де

$$r_{ij} = r_{ij0} + r_{ij1}x + \ldots + r_{ijh_{ij}}x^{h_{ij}},$$

якщо

$$\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \psi_j\right) \neq 1, \ \textit{то} \qquad r_{ij} = 0,$$

якщо

$$\left(\frac{\varphi_i}{\varphi_j}, \psi_j\right) = 1, \ \textit{то} \qquad h_{ij} = \deg \frac{(\varphi_i, \varepsilon_j)}{\varphi_j} - 1,$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots, n; \ \ j = 0, 1, 2, \ldots, n-1; \ i > j;$$

r_{ijs} *– елементи поля* $\mathbb{C}(k)$, $s = 0, 1, \ldots, h_{ij}$, *тобто раціональні функції змінних* k_{ijs} (*див* (4.31)).

Доведення. Помноживши матрицю

$$W(\Phi)T = \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}, \cdots, \frac{\varphi}{\varphi_n}\right) UT$$

справа на матрицю S, взяту із леми 4.7, одержимо

$$\operatorname{diag}\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}, \frac{\varphi}{\varphi_2}, \cdots, \frac{\varphi}{\varphi_n}\right) VS =$$

$$= \begin{Vmatrix} \frac{\varphi}{\varphi_1} u_{11} & \frac{\varphi}{\varphi_1} u_{12} & \cdots & \frac{\varphi}{\varphi_1} u_{1,n-1} & \frac{\varphi}{\varphi_1} u_{1n} \\ \frac{\varphi}{\varphi_2} u_{21} & \frac{\varphi}{\varphi_2} u_{22} & \cdots & \frac{\varphi}{\varphi_2} u_{2,n-1} & \frac{\varphi}{\varphi_2} u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\varphi}{\varphi_n} u_{n1} & \frac{\varphi}{\varphi_n} u_{n2} & \cdots & \frac{\varphi}{\varphi_n} u_{n,n-1} & \frac{\varphi}{\varphi_n} u_{nn} \end{Vmatrix} =$$

$$= R^{-1} \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}, \frac{\varphi}{\varphi_2}, \ldots, \frac{\varphi}{\varphi_n}\right),$$

де R^{-1} – оборотна матриця над $\mathbb{C}(k)[x]$. Отже, маємо

$$W(\Phi)TS = R^{-1}\operatorname{diag}\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}, \frac{\varphi}{\varphi_2}, \cdots, \frac{\varphi}{\varphi_n}\right)$$

або, враховуючи лему 4.8

$$RW(\Phi)T = \operatorname{diag}\left(\frac{\varphi}{\varphi_1}, \frac{\varphi}{\varphi_2}, \cdots, \frac{\varphi}{\varphi_n}\right)S^{-1} =$$

$$= \begin{Vmatrix} \dfrac{\varphi}{\varphi_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \dfrac{\frac{\varphi}{\varphi_1}}{\left(\frac{\varphi}{\varphi_1},\ \psi_1\right)} l_{21} & \dfrac{\varphi}{\varphi_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\frac{\varphi}{\varphi_1}}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1},\ \psi_1\right)} l_{n\,1} & \dfrac{\frac{\varphi}{\varphi_2}}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_2},\ \psi_2\right)} l_{n2} & \cdots & \dfrac{\frac{\varphi}{\varphi_{n-1}}}{\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_{n-1}},\ \psi_{n-1}\right)} l_{n,n-1} & \dfrac{\varphi}{\varphi_n} \end{Vmatrix}.$$

Очевидно, без обмеження загальності можемо вважати, що $l_{ij} = r_{ij}$ (див. співвідношення (4.64)). Лема доведена.

Д о в е д е н н я теореми 4.8. Виходячи зі співвідношення (4.48), маємо

$$P_1P^{-1}\operatorname{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n) = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)Q^{-1}Q_1.$$

Отже, згідно з твердженням 4.7, $P_1P^{-1} = T$, де T – оборотна матриця над $\mathbb{C}[x]$ вигляду (4.50). Таким чином,

$$P_1 = TP,\ \ P = T^{-1}P_1. \qquad (4.65)$$

Розглянемо матриці

$$W(\Phi)P\left\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \right\|,\ W(\Phi)P_1\left\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \right\|.$$

Беручи до уваги першу з рівностей (4.65), лему 4.9 і твердження 2.8, знаходимо

$$\operatorname{rang} M_{W(\Phi)P_1\left\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \right\|}(\varphi) =$$
$$= \operatorname{rang} M_{RW(\Phi)TP\left\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \right\|}(\varphi), \quad (4.66)$$

де R – оборотна матриця з леми 4.9. Враховуючи вигляд матриць $RW(\Phi)TP$ і $W(\Phi)P$, робимо висновок, що матрицю

$$RW(\Phi)TP\left\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \right\|$$

можна одержати з матриці

$$W(\Phi)P\left\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \right\|$$

шляхом підстановки $k_{ijs} \to r_{ijs}$. Отже, матрицю

$$M_{RW(\Phi)TP\left\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \right\|}(\varphi)$$

можна одержати з матриці

$$M_{W(\Phi)P\left\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \right\|}(\varphi)$$

таким же шляхом. Це ж стосується і відповідних субвизначників матриць, що розглядаються. Оскільки попарно різні змінні величини k_{ijs} є незалежними трансцендентними величинами, то

$$\operatorname{rang} M_{RW(\Phi)TP\left\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \right\|}(\varphi) \le$$

$$\leq \operatorname{rang} M_{W(\Phi)P\left\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \right\|}(\varphi). \tag{4.67}$$

Із співвідношень (4.66) і (4.67) випливає, що

$$\operatorname{rang} M_{W(\Phi)P_1\left\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \right\|}(\varphi) \leq$$
$$\leq \operatorname{rang} M_{W(\Phi)P\left\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \right\|}(\varphi). \tag{4.68}$$

Аналогічно, виходячи з другої із рівностей (4.65) і беручи до уваги твердження 4.9, одержуємо

$$\operatorname{rang} M_{W(\Phi)P\left\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \right\|}(\varphi) \leq$$
$$\leq \operatorname{rang} M_{W(\Phi)P_1\left\| E \quad Ex \quad \dots \quad Ex^{r-1} \right\|}(\varphi). \tag{4.69}$$

Порівнюючи нерівності (4.68) і (4.69), переконаємось у правильності теореми 4.8 і тим самим теореми 4.7. Теорема 4.7 доведена.

Нехай тепер у множині K_{r-1} існує s матриць, без обмеження загальності можна вважати, що це перші s матриць в ряді

$$K_{1,r-1}, K_{2,r-1}, \dots, K_{t,r-1},$$

ранг значень яких на системі коренів многочлена φ дорівнює nr. В цьому випадку правильна (див. теореми 3.4, 3.6) така теорема.

Теорема 4.9. *Нехай характеристичний многочлен* $\Delta(x)$ *неособливого матричного многочлена*

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m \tag{4.70}$$

можна зобразити у вигляді добутку (4.28). *Якщо ранги значень супровідних матриць*

$$K_{1,r-1}, K_{2,r-1}, \dots, K_{s,r-1}$$

на системі коренів многочлена φ *дорівнюють* nr, *то*

$$A(x) = B_1(x)C_1(x), \ \det B_1(x) = \varphi(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A(x) = B_s(x)C_s(x), \ \det B_s(x) = \varphi(x),$$

причому матричні коефіцієнти $N_{i1}, N_{i2}, \ldots, N_{ir}$ *унітальних матричних многочленів*

$$B_i(x) = Ex^r - N_{i1}x^{r-1} - \ldots - N_{ir}$$

можна знайти як розв'язки

$$X_1 = N_{i1}, X_2 = N_{i2}, \ldots, X_r = N_{ir}$$

відповідних лінійних матричних рівнянь вигляду

$$M_{K_{i,r-1}}(\varphi)\begin{Vmatrix} X_r \\ \cdots \\ X_2 \\ X_1 \end{Vmatrix} = M_{W(\Phi_i)Px^r}(\varphi), \ i = 1, 2, \ldots, s. \tag{4.71}$$

Зауваження 4.2. Очевидно, що розв'язки матричних рівнянь (4.71) є матрицями над полями $\mathbb{C}[k^i]$. Легко бачити, що, надаючи змінним

$$k_{110}^{(i)}, k_{111}^{(i)}, \ldots, k_{n,n-1,h_{n,n-1}}^{(i)}$$

допустимі значення із $\mathbb{C}$, ми одержимо унітальні поліноміальні матриці над $\mathbb{C}[x]$, які ділять $A(x)$ зліва і форми Сміта яких збігаються з однією з форм $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_s$.

При $r = 1$ із сформульованих результатів одержуємо такі застосування до теорії многочленних матричних рівнянь.

Теорема 4.10. *Щоб матричне рівняння*

$$X^m A_0 + X^{m-1} A_1 + \ldots + XA_{m-1} + A_m = \mathbf{0} \qquad (4.72)$$

мало розв'язок $X = B$, *для якого* $\det(Ex - B) = \varphi(x)$, $\varphi(x)$ – *дільник степеня* n *визначника матричного многочлена* (4.70), *необхідно і достатньо, щоб серед матриць* $K_{10}, K_{20}, \ldots, K_{t0}$ *знайшлась хоча б одна матриця* $K_{p0}, 1 \le p \le t$, *ранг значення якої на системі коренів многочлена* φ *дорівнював би* nr.

Теорема 4.11. *Якщо для поліноміальної матриці* (4.70) *і для унітального дільника* $\varphi(x)$ *многочлена* $\Delta(x)$ *ранг значень супутніх матриць* $K_{10}, K_{20}, \ldots, K_{s0}$, $1 \le s \le t$ *на системі коренів многочлена* φ *дорівнює* n, *то розв'язки* (*над* $\mathbb{C}$) *матричного, рівняння* (4.72) *можна одержати з розв'язків лінійних матричних рівнянь*

$$M_{K_{i0}(x)}(\varphi) X = M_{W(\Phi)P(x)x}(\varphi), \; i = 1, 2, \ldots, s,$$

якщо змінним $k^{(i)}_{110}, k^{(i)}_{111}, \ldots, k^{(i)}_{n,n-1,h_{n,n-1}}$ *від яких, взагалі кажучи, ці розв'язки залежать, надавати всі допустимі значення із поля* $\mathbb{C}$.