РОЗДІЛ 3

ПРО ВИДІЛЕННЯ РЕГУЛЯРНИХ МНОЖНИКІВ З МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ

3.1. Зведення неособливої поліноміальної матриці до квазіунітального вигляду

Нехай ми маємо матричний многочлен

$$A(x) = Ex^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m \tag{3.1}$$

порядку n (тут E – одинична матриця і $A_1, \ldots, A_m$ – довільні числові (над полем $\mathbb{C}$) матриці n – го порядку). Якщо $A(x)$ ми запишемо у вигляді поліноміальної матриці

$$A(x) = \begin{Vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{Vmatrix}, \tag{3.2}$$

то, очевидно, її елементи $a_{ij}(x)$ із $\mathbb{C}[x]$ задовольняють умови

$$\deg a_{11} = \deg a_{22} = \cdots = \deg a_{nn}$$

і

$$\deg a_{ij} < \deg a_{ii}, \deg a_{ji} < \deg a_{ii}, \quad j > i.$$

Останні умови, зокрема, означають, що для кожного діагонального елемента a_{ij} всі елементи, розміщені в i-му стовпці поза головною діагоналлю, мають степінь нижчий, ніж $\deg a_{ii}$.

Поданим нижче означенням ми виділяємо клас поліноміальних матриць, який охоплює як частинний випадок поліноміальні матриці (3.1).

Означення 3.1. Поліноміальну матрицю

$$D(x)=\begin{Vmatrix} d_{11}(x) & d_{12}(x) & \cdots & d_{1n}(x) \\ d_{21}(x) & d_{22}(x) & \cdots & d_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1}(x) & d_{n2}(x) & \cdots & d_{nn}(x) \end{Vmatrix} \tag{3.3}$$

з елементами d_{ij} із $\mathbb{C}[x]$ будемо називати *квазіунітальною*, якщо

$$\deg d_{11} \le \deg d_{22} \le \cdots \le \deg d_{nn},$$

$$\deg d_{ij} < \deg d_{ii},\ \deg d_{ji} < \deg d_{ii},\ j > i.$$

Очевидно, що унітальна поліноміальна матриця (3.1) є квазіунітальною в сенсі поданого вище означення.

У кільці поліноміальних матриць n-го порядку введемо таке відношення еквівалентості.

Означення 3.2. Кажемо, що поліноміальна матриця $A(x)$ *еквівалентна* поліноміальній матриці $B(x)$ (в позначеннях $A(x) \sim B(x)$), якщо існує така числова неособлива матриця Q над полем $\mathbb{C}$ і така оборотна поліноміальна матриця $S(x)$ над кільцем $\mathbb{C}[x]$, що

$$A(x) = QB(x)S(x).$$

Легко бачити, що ця властивість еквівалентності рефлексивна, симетрична і транзитивна. Таким чином, множина всіх поліноміальних матриць розбивається на класи еквівалентних поліноміальних матриць.

Очевидно, що кожну поліноміальну матрицю з даного класу можна перетворити в довільну іншу матрицю цього ж класу за допомогою елементарних перетворень над рядками з коефіцієнтам з поля $\mathbb{C}$ і елементарних перетворень над стовпцями з коефіцієнтами з кільця $\mathbb{C}[x]$.

Нашою метою є доведення такої теореми.

Теорема 3.1. *В кожному класі неособливих еквівалентних поліноміальних матриць існує квазіунітальна поліноміальна матриця. Іншими словами, для довільної неособливої поліноміальної матриці $A(x)$ з елементами із $\mathbb{C}[x]$ існують такі оборотні матриці Q і $S(x)$ відповідно над полем $\mathbb{C}$ і кільцем $\mathbb{C}[x]$, що поліноміальна матриця $QA(x)S(x)$ – квазіунітальна.*

Доведення. Фіксуємо деякий клас K_0 еквівалентних матриць. В класі K_0, що розглядається, очевидно, існує матриця, перший стовпець якої має найменший степінь[1] (в класі матриць K_0). Легко бачити, що цю матрицю можна вибрати у вигляді

$$\begin{Vmatrix} d_{11}(x) & d_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ d_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{Vmatrix}, \tag{3.4}$$

де

$$\deg d_{ji} < \deg d_{11}, \quad j = 2, 3, \ldots, n \tag{3.5}$$

і

[1] Під степенем стовпця розуміється максимальний степінь елементів, які його складають.

$$\deg d_{12} < \deg d_{11}. \tag{3.6}$$

У класі матриць K_0, що розглядається, розглянемо підклас K_1, що складається з тих матриць вигляду (3.4) із K_0, які містять в лівому верхньому куті фіксований елемент і які задовольняють умови (3.5) і (3.6).

Для всіх матриць класу K_1 виділена в (3.4) (пунктиром) частина задовольняє умову квазіунітальності (оскільки для неї виконуються умови (3.5) і (3.6)).

У класі K_1 існує матриця, другий стовпець якої має найменший степінь (серед усіх матриць класу K_1). Записавши цю матрицю у вигляді

$$\left\| \begin{array}{ccc:cc} d_{11}(x) & d_{12}(x) & d_{13}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ d_{21}(x) & d_{22}(x) & d_{23}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{n1}(x) & d_{n2}(x) & a_{n3}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{array} \right\| \tag{3.7}$$

ми можемо, очевидно, вважати, що $\deg d_{22} > \deg d_{i2}$ $(i \neq 2)$. Зрозуміло, що $\deg d_{22} \geq \deg d_{11}$ (в протилежному випадку ми отримали б протиріччя з умовою мінімальності степеня першого стовпця матриці (3.7)). Серед матриць вигляду (3.7) (як ми доводимо нижче), існують матриці, для яких виділена пунктиром частина задовольняє умові квазіунітальності, тобто для яких $\deg d_{13} < \deg d_{11}$ і $\deg d_{23} < \deg d_{22}$. Множину всіх таких матриць з фіксованою підматрицею

$$\left\| \begin{matrix} d_{11}(x) & d_{12}(x) \\ d_{21}(x) & d_{22}(x) \end{matrix} \right\|$$

позначимо через K_2. Ми можемо вважати, що $\deg d_{rr} > \deg d_{ir}$ $(i \neq r)$. Очевидно, що $\deg d_{rr} \geq \deg d_{r-1,r-1}$. У протилежному випадку ми отримали б протиріччя з умовою мінімальності степеня $r-1$-го стовпця матриці (3.7).

Ми хочемо довести, що серед матриць вигляду (3.7) існує матриця, в якої виділена частина задовольняє умові квазіунітальності. Фіксуємо матрицю r – го порядку, що міститься у лівому верхньому куті матриці (3.7), і розглянемо всі ті матриці, в яких ця підматриця фіксована і виконана умова унітальності для перших r стовпців, дозволяючи $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ приймати всі можливі значення. Доведемо, що серед матриць існує потрібна.

Для кожної матриці вигляду (3.9) введемо міру відхилення від квазіунітальності

$$m=\max_{1\le i\le r}(\deg\alpha_1-\deg d_{ii}).$$

Нам треба показати, що серед матриць, що розглядаються (вигляду (3.9)), існує матриця, в якої виділена пунктиром частина має від'ємне відхилення. Доведемо цей факт від протилежного.

Нехай серед матриць, що розглядаються, не існує матриці з від'ємним відхиленням, тобто $m\ge 0$ для всіх $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$, що зустрічаються. Позначимо через m найменше відхилення $(m\ge 0)$. Позначимо далі через k найбільше число, таке що для деякої матриці вигляду (3.9)

$$\deg\alpha_1-\deg d_{11}<m,\ldots,\deg\alpha_{k-1}-\deg d_{k-1,k-1}<m. \qquad (3.8)$$

Маючи на увазі в наших побудовах застосувати метод математичної індукції, припустимо, що для деякого r, $1\le r\le n$, ми побудували клас матриць K_{r-1}, що складається з тих матриць вигляду

$$\begin{Vmatrix} d_{11}(x) & \dots & d_{1,r-1}(x) & d_{1r}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ d_{21}(x) & \dots & d_{2,r-1}(x) & d_{2r}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{r-1,1}(x) & \dots & d_{r-1,r-1}(x) & d_{r-1,r}(x) & \dots & a_{r-1,n}(x) \\ d_{r1}(x) & \dots & d_{r,r-1}(x) & a_{rr}(x) & \dots & a_{rn}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{1n}(x) & \dots & d_{n,r-1}(x) & a_{nr}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{Vmatrix}, \qquad (3.9)$$

які містять у лівому верхньому куті фіксовану підматрацю порядку $r-1$ і в яких виділена пунктиром частина задовольняє умові квазіунітальності і перші $r-1$ стовпців яких задовольняють послідовно згаданій вище умові мінімальності степеня.

У класі K_{r-1} існує матриця, r-ий стовпець якої має найменший степінь (серед усіх матриць класу K_{r-1}). Записавши цю матрицю у вигляді

$$\begin{Vmatrix} d_{11} & \dots & d_{1,r-1} & d_{1r} & \alpha_1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ d_{r1} & \dots & d_{r,r-1} & d_{rr} & \alpha_r & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & * \\ d_{n1} & \dots & d_{n,r-1} & d_{nr} & & \end{Vmatrix}, \qquad (3.10)$$

очевидно, що $\deg\alpha_k - \deg d_{kk} = m \quad (1 \le k \le r)$ для всіх матриць вигляду (3.10), що задовольняють умову (3.8) і мають найменше відхилення m.

Покладемо

$$\alpha_k = d_{kk}\xi + \rho\,,\ \deg\rho < \deg d_{kk}$$

і виконаємо в матриці, що розглядається, елементарне перетворення: із $(r+1)$-го стовпця віднімемо k-ий, помножений на $\xi(x)$. Виділена (пунктиром) частина $r+1$ – го стовпця набуде вигляду

$$\alpha_i' = \alpha_i - d_{ik}\xi\,,\ i = 1, 2, \ldots, r\,.$$

Знайдемо відхилення для поліноміального стовпця. Нехай $i \neq k$,

$$\deg\alpha_i' - \deg d_{ii} \le \max(\deg\alpha_i, \deg\alpha_{ik} + \deg\xi) -$$

$$-\deg d_{ii} \le \max(\deg\alpha_i - \deg d_{ii}, m + \deg d_{ik} -$$

$$-\deg d_{ii}) \le \max(\deg\alpha_i - \deg d_{ii}, m-1) \le$$

$$\le \begin{cases} m-1, & \text{якщо } i < k, \\ m, & \text{якщо } i > k. \end{cases}$$

Якщо ж $i = k$, то

$$\deg\alpha_i' - \deg d_{kk} = \deg\rho - \deg d_{kk} < 0\,.$$

Остання нерівність суперечить вибору числа k.

Проведене міркування індуктивно доводить існування матриці, для якої умова квазіунітальності виконана для всіх $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

В одержаній матриці $\deg d_{nn}(x) \ge \deg d_{n-1,n-1}(x)$, оскільки в протилежному випадку ми потрапили б у суперечність з умовою мінімальності степеня передостаннього стовпця. Теорема доведена.

Зауваження. Проведене наше доведення теореми не є ефективним. Проте, з цього доведення легко одержати ефективний алгоритм для зведення довільної поліноміальної матриці до квазіунітального вигляду. Власне, слід діяти, як указано в доведенні, вибираючи на кожному кроці стовпець найменшого степеня із явно присутніх стовпців нашої матриці. Якщо ж на якомусь кроці зустрівся стовпець меншого степеня, ніж степені уже побудованих стовпців, то слід цей стовпець, що появився, поставити в належне місце (можливо, навіть на місце першого стовпця) і почати нові побудови. Очевидно, що таких ”відступів” може бути лише скінчена кількість, тому процес за допомогою скінченої кількості кроків приведе нас до потрібного квазіунітального вигляду.

Лема 3.1. *Нехай* $D(x)$ *– квазіунітальна матриця* (3.3). *В множині стовпців вигляду* $\{D(x)p(x)\}$, *де* $p(x)$ *– довільний ненульовий* ($n+1$)*-ий стовпець з елементами з* $\mathbb{C}[x]$, *не існує стовпця степеня меншого числа* $\deg d_{11}(x)$.

Д о в е д е н н я. Нехай

$$p(x)=\begin{Vmatrix} p_1(x) \\ p_2(x) \\ \vdots \\ p_n(x) \end{Vmatrix}$$

– довільний ненульовий стовпець з елементами з $\mathbb{C}[x]$ і $p_i(x)$, $1 \le i \le n$ – елемент цього стовпця максимального степеня $s_i \ge 0$, тобто $\deg p_i(x) = s_i$.

Помножимо i - й рядок матриці $D(x)$ на стовпець $p(x)$. Враховуючи, що

$$\deg d_{ij}(x) < \deg d_{ii}(x),\ \ i \ne j\ ,\ \ j = 1, 2, \ldots, n$$

(ця нерівність випливає безпосередньо з вигляду (3.3) матриці $D(x)$), одержимо елемент степеня $\deg d_{ii}(x) + s_i$. Оскільки $\deg d_{11}(x) \le \deg d_{ii}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то стовпець $D(x)p(x)$ містить елемент степеня

$$\deg d_{ii}(x) + s_i \geq \deg d_{11}(x).$$

Цим лема доведена.

Лема 3.2. *Щоб для поліноміальної* $n \times n$ *матриці* $B(x)$, *для якої виконана умова* $\deg\det B(x) = nr$, *існувала така оборотна матриця* $R(x)$ *над* $\mathbb{C}[x]$, *що*

$$B(x)R(x) = \sum_{i=0}^{r} B_i x^{r-i}, \ \det B_0 \neq 0,$$

необхідно і достатньо, щоб у множині всіх матриць вигляду $\{B(x)S(x)\}$, *де* $S(x)$ *– довільна оборотна матриця над* $\mathbb{C}[x]$, *не існувало матриці, яка містила б стовпець степеня меншого числа* r.

Доведення. Необхідність. Нехай для матриці $B(x)$ існує така оборотна матриця $R(x)$ (над $\mathbb{C}[x]$), що

$$B(x)R(x) = \sum_{i=0}^{r} B_i x^{r-1}, \ \det B_0 \neq 0. \tag{3.11}$$

Якщо б для $B(x)$ існувала така оборотна матриця $S_1(x)$, що матриця $B(x)S(x)$ містить стовпець степеня меншого r, то, враховуючи (3.11), ми одержали б, що

$$B(x)S_1(x) = B(x)R(x)B_0^{-1}B_0R^{-1}(x)S_1(x). \tag{3.12}$$

Таким чином, для унітальної матриці $B(x)R(x)B_0^{-1}$ знайшовся б такий стовпець $p(x)$ з елементами із $\mathbb{C}[x]$, що стовпець $B(x)R(x)B_0^{-1}p(x)$ має степінь менший r, що суперечить лемі 3.1.

Д о с т а т н і с т ь. На основі теореми 3.1. для матриці $B(x)$ існують такі оборотні матриці S і $R(x)$ відповідно над $\mathbb{C}$ і $\mathbb{C}[x]$, що

$$SB(x)R(x)=\begin{Vmatrix} d_{11}(x) & d_{12}(x) & \dots & d_{1n}(x) \\ d_{21}(x) & d_{22}(x) & \dots & d_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}(x) & d_{n2}(x) & \dots & d_{nn}(x) \end{Vmatrix},$$

де

$$\deg d_{11} \le \deg d_{22} \le \ldots \le \deg d_{nn};$$

$$\deg d_{ij} < \deg d_{ii},\ j>i;$$

$$\deg d_{ji} < \deg d_{ii},\ j>i.$$

Оскільки $\deg d_{11} + \deg d_{22} + \cdots + \deg d_{nn} = nr$ і $r \le \deg d_{11} \le \le \deg d_{22} \le \ldots \le \deg d_{nn}$, то $\deg d_{ii} = r$, $i=1,2,\ldots,n$. Лема доведена.

3.2. Достатня умова виділення регулярного множника з матричного многочлена

Тут нашою метою є доведення такої теореми.

Теорема 3.2. *Нехай характеристичний многочлен* $\Delta(x)$ *матричного многочлена вигляду*

$$A(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m,\ \deg\Delta(x) > 0, \qquad (3.13)$$

коефіцієнтами якого є $n\times n$ *- матриці над* $\mathbb{C}$, *зображений у вигляді*

$$\Delta(x) = \varphi(x)\phi(x), \tag{3.14}$$

де $\deg \varphi(x) = nr$. *Щоб матричний многочлен (3.13) можна було зобразити у вигляді*

$$A(x) = B(x)D(x),$$

де

$$B(x) = Ex^r + B_1 x^{r-1} + \ldots + B_{r-1}x + B_r, \ \det B(x) = \varphi(x),$$

достатньо, щоб ранг значення супутньої матриці $A_{r-1}(x)$ *на системі коренів многочлена* $\varphi(x)$ *дорівнював* nr.

Доведемо спочатку такі допоміжні твердження.

Лема 3.3. *Якщо* $\Delta(x) = \varphi(x)\phi(x)$, *то*

$$A(x) = F(x)D(x), \tag{3.15}$$

де $\det F(x) = \varphi(x)$.

Доведення випливає з леми 1.3.

Лема 3.4. *Нехай правильним є співвідношення (3.15). Якщо існує така оборотна матриця* $T(x)$ *над* $\mathbb{C}[x]$, *що добуток* $F(x)T(x)$ *містить стовпець степеня меншого, ніж число* r, *то ранг значення супутньої матриці* $A_{r-1}(x)$ *на системі коренів многочлена* $\varphi(x)$ *менший, ніж* nr, *тобто*

$$\operatorname{rang} M_{A_{r-1}(x)}(\varphi) < nr.$$

Доведення. Нехай $\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \ldots (x-\alpha_p)^{k_p}$, $k_1 + \ldots$ $\ldots + k_p = nr$, $r \le m$. Легко підрахувати (на основі означення матриці $M_{A_{r-1}(x)}(\varphi)$ і співвідношення (3.15)), що

$$M_{A_{r-1}(x)}(\varphi) = H[\alpha_1^{(k_1)},\ldots,\alpha_p^{(k_p)}]M_{F_{r-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)},\ldots,\alpha_p^{(k_p)}], \quad (3.16)$$

де

$$H[\alpha_1^{(k_1)},\ldots,\alpha_p^{(k_p)}] = \begin{Vmatrix} H_{k_1}(\alpha_1) & & & \mathbf{0} \\ & H_{k_2}(\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & H_{k_p}(\alpha_p) \end{Vmatrix},$$

$$H_{k_i}(\alpha_i) =$$

$$= \begin{Vmatrix} D_*(\alpha_i) & & & & \mathbf{0} \\ D_*'(\alpha_i) & D_*(\alpha_i) & & & \\ D_*''(\alpha_i) & 2D_*'(\alpha_i) & D_*(\alpha_i) & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ D_*^{(k_i-1)}(\alpha_i) & \binom{k_i}{1}D_*^{(k_i-2)}(\alpha_i) & \binom{k_i}{2}D_*^{(k_j-3)}(\alpha_i) & \ldots & D_*(\alpha_i) \end{Vmatrix},$$

$D_*(x)$ – взаємна матриця матриці $D(x)$; $D_*^{(s)}(x)$ – похідна порядку s від матриці $D_*(x)$; k_i – кратність кореня α_i в многочлені $\varphi(x)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, $F_{r-1}(x) = F_*(x)\begin{Vmatrix} E & Ex & \ldots & Ex^{r-1} \end{Vmatrix}$. Оскільки ранг добутку двох матриць не перевершує рангу кожного із співмножників, то для доведення леми, враховуючи співвідношення (3.16), достатньо довести, що

$$\operatorname{rang} M_{F_{r-1}(x)}\left[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \ldots, \alpha_p^{(k_p)}\right] < nr.$$

Згідно з умовою леми, існує така оборотна матриця $T(x)$ над $\mathbb{C}[x]$, що добуток $F(x)T(x)$ містить стовпець степеня $< r$. Очевидно, що

$$T^{-1}(x)F_*(x)F(x)T(x) = E\det F(x).$$

Помноживши останнє співвідношення зліва на $T(x)$, одержимо

$$F_*(x)F(x)T(x) = T(x)\det F(x). \tag{3.17}$$

Із співвідношення (3.17) і умови леми 3.4 випливає, що для матриці $F_*(x)$ існує такий поліноміальний стовпець $l(x)$ степеня меншого, ніж r, що всі елементи стовпця $F_*(x)l(x)$ діляться на $\det F(x)$ або, що те ж саме, в множині всіх матриць вигляду $F_*(x)\left\| E\ Ex \ldots Ex^{r-1} \right\| Q$, де Q – довільна неособлива матриця над $\mathbb{C}$, існує матриця

$$F_*(x)\left\| E\ Ex \ldots Ex^{r-1} \right\| Q_1,$$

(де Q_1 – деяка неособлива матриця над $\mathbb{C}$), що містить стовпець, всі елементи якого діляться на $\det F(x)$. А це означає, що

$$\operatorname{rang} M_{F_{r-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \ldots, \alpha_j^{(k_j)}] < nr.$$

Лема доведена.

Д о в е д е н н я теореми 3.2. Згідно з лемою 3.3, маємо

$$A(x) = F(x)D(x),$$

де $\det F(x) = \varphi(x)$. Нагадаємо, що $\deg \varphi(x) = nr$.

Очевидно, що в множині матриць вигляду $\{F(x)S(x)\}$, де $S(x)$ – довільна оборотна матриця над $\mathbb{C}[x]$, не існує матриці, що містила б стовпець степеня меншого r, у протилежному випадку на основі леми 3.4 ранг матриці $M_{A_{r-1}(x)}(\varphi)$ був би менший, ніж nr, що суперечить умові теореми.

Тепер, використавши лему 3.2, робимо висновок, що існує така оборотна матриця $S_1(x)$ над $\mathbb{C}[x]$, що

$$F(x)S_1(x) = Ex^r + B_1x^{r-1} + \ldots + B_{r-1}x + B_r;$$

тоді

$$A(x) = (Ex^r + B_1x^{r-1} + \ldots + B_{r-1}x + B_r)S_1^{-1}(x)D(x),$$

що треба було довести.

Враховуючи теореми 3.2 і 3.18, бачимо, що правильна така теорема.

Теорема 3.3. *Нехай характеристичний многочлен* $\Delta(x)$ *матричного многочлена* (3.13) *зображений у вигляді*

$$\Delta(x) = \varphi(x)\phi(x),$$

де

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}\left(x-\alpha_2\right)^{k_2} \ldots (x-\alpha_p)^{k_p},$$

причому

$$K_\varphi \cap K_\phi = \varnothing.$$

Щоб при цих припущеннях матричний многочлен $A(x)$ *можна було зобразити вигляді*

$$A(x) = B(x)D(x),$$

де

$$B(x) = Ex^r + B_1x^{r-1} + \ldots + B_{r-1}x + B_r$$

і

$$\det B(x) = \varphi(x),$$

необхідно і достатньо, щоб

$$\operatorname{rang} M_{A_{r-1}(x)}(\varphi) = nr.$$

Із теореми 3.3 випливає важлива теорема про регуляризацію матричного многочлена.

Теорема 3.4. (Про регуляризацію матричного многочлена). *Нехай матричний многочлен* (3.13) *такий, що* $\deg\det A(x) = ns$. *Щоб для матриці* $A(x)$ *існувала така оборотна матриця* $R(x)$ *над* $\mathbb{C}[x]$, *що матричний многочлен*

$$A(x)R(x) = A_0^1 x^s + A_1^1 x^{s-1} + \ldots + A_{s-1}^1 x + A_s^1$$

– регулярний, тобто $\det A_0^1 \neq 0$ (*зокрема, унітальний*), *необхідно і достатньо, щоб ранг значення супутньої поліноміальної матриці* $A_{s-1}(x)$ (*див. означення* 2.3) *на системі коренів многочлена* $\Delta(x) = \det A(x)$ *дорівнював* ns.

3.3. Знаходження коефіцієнтів регулярного матричного многочлена, що виділяється. Теорема єдиності

Нехай матричний многочлен (3.13) зображений у вигляді

$$A(x) = B(x)D(x), \tag{3.18}$$

де

$$B(x) = B_0 x^r + B_1 x^{r-1} + \cdots + B_{r-1}x + B_r,\ \det B_0 \neq 0$$

і

$$\deg B(x) = b(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_p)^{k_p},\ b\in\mathbb{C}.$$

Правильна така теорема.

Теорема 3.5. *Якщо правильним є розклад* (3.18), *то*

$$\operatorname{rang} M_{A_{r-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \ldots, \alpha_p^{(k_p)}] =$$

$$= \operatorname{rang} M_{A_r(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \ldots, \alpha_p^{(k_p)}], \qquad (3.19)$$

тобто умова (3.19) *є необхідною умовою зображення матричного многочлена* (3.1) *у вигляді* (3.18).

Доведення. Якщо правильним є співвідношення (3.18), то, очевидно, існують такі матриці $N_1, N_2, \ldots, N_r$ над $\mathbb{C}$, що

$$A(x) = (Ex^r - N_1x^{r-1} - \cdots - N_{r-1}x - N_r)D(x).$$

Очевидно, що

$$Ex^r - N_1x^{r-1} - \cdots - N_{r-1}x - N_r = B(x)B_0^{-1} = B_1(x).$$

Помноживши $A_*(x)$ на $B_1(x)$ справа, одержимо

$$A_*(x)(Ex^r - N_1x^{r-1} - \cdots - N_{r-1}x - N_r) = D_{1*}(x)\det B_1(x),$$

або

$$\left\| A_*(x)x^r \ \ -A_*(x)x^{r-1} \ \ \cdots \ \ -A_*(x)x \ \ -A_*(x) \right\| \left\| \begin{matrix} E \\ N_1 \\ \vdots \\ N_r \end{matrix} \right\| =$$

$$= D_{1*}(x)\det B_1(x). \qquad (3.20)$$

Беручи тепер певну кількість похідних (яка залежить від кратності коренів) у лівій і правій частинах тотожності (3.20) і, підставляючи послідовно корені $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$, одержимо матричну тотожність

$$M_{A_*(x)x^r}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \dots, \alpha_p^{(k_p)}] -$$

$$-M_{A_{r-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \dots, \alpha_p^{(k_p)}] \begin{Vmatrix} N_r \\ N_{r-1} \\ \vdots \\ N_1 \end{Vmatrix} = \mathbf{0}$$

(див. означення 2.1). Це означає, що лінійне неоднорідне матричне рівняння

$$M_{A_{r-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \dots, \alpha_p^{(k_p)}] \begin{Vmatrix} X_r \\ X_{r-1} \\ \vdots \\ X_1 \end{Vmatrix} = M_{A_*(x)x^r}[\alpha_1^{(k_1)}, \ \dots, \alpha_p^{(k_p)}],$$

де $X_1, X_2, \dots, X_r$ – невідомі $n \times m$ - матриці, має розв'язок, звідки випливає (див. твердження 2.3), що

$$\operatorname{rang} M_{A_{r-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \dots \alpha_p^{(k_p)}] =$$

$$= \operatorname{rang} \begin{Vmatrix} M_{A_{r-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \dots, \alpha_p^{(k_p)}] & M_{A_*(x)x^r}[\alpha_1^{(k_1)}, \dots, \alpha_p^{(k_p)}] \end{Vmatrix}.$$

Зауваживши, що

$$\operatorname{rang} \begin{Vmatrix} M_{A_{r-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \dots, \alpha_p^{(k_p)}] & M_{A_*(x)x^r}[\alpha_1^{(k_1)}, \dots, \alpha_p^{(k_p)}] \end{Vmatrix} =$$

$$= \operatorname{rang} M_{A_r(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \dots, \alpha_p^{(k_p)}],$$

(див. означення 2.3) бачимо, що теорема доведена.

Враховуючи теорему 3.2. і щойно одержаний результат, отримуємо метод фактичного знаходження коефіцієнтів регулярного множника, що виділяється. А саме, правильною є така теорема.

Теорема 3.6. *Нехай характеристичний многочлен* $\Delta(x)$ *матричного многочлена* (3.13) *зображений у вигляді*

$$\Delta(x) = \varphi(x)\phi(x),$$

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots(x-\alpha_p)^{k_p},$$
$$k_1 + k_2 + \cdots + k_p = nr.$$

Якщо ранг значення супутньої матриці $A_{r-1}(x)$ (*вважаємо, що* $A_0 = A_*(x)$) *на системі коренів многочлена* $\varphi(x)$ *дорівнює* nr, *то*

$$A(x) = (Ex^r - N_1x^{r-1} - \cdots - N_{r-1}x - N_r)D_1(x), \qquad (3.21)$$

де $\det(Ex^r - N_1x^{r-1} - \cdots - N_{r-1}x - N_r) = \varphi(x)$, *причому матричні коефіцієнти* $N_1, N_2, \ldots, N_r$ *можуть бути знайдені у вигляді розв'язків лінійного матричного рівняння*

$$M_{A_{r-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \ldots, \alpha_p^{(k_p)}]\begin{Vmatrix} X_r \\ X_{r-1} \\ \vdots \\ X_1 \end{Vmatrix} = M_{A_*(x)x^r}[\alpha_1^{(k_1)}, \ \ldots, \alpha_p^{(k_p)}]. \qquad (3.22)$$

Д о в е д е н н я випливає з теорем 3.2 і 3.3.

Теорема 3.7 (єдиності). *При виконанні умов теореми* 3.2. *множник*

$$Ex^r - N_1x^{r-1} - \cdots - N_{r-1}x - N_r$$

у співвідношенні (3.21) *множником* $\varphi(x)$ *визначається однозначно.*

Д о в е д е н н я. Якщо виконуються умови теореми 3.2, то правильним є розклад (3.21). Оскільки

$$\operatorname{rang} M_{A_{r-1}(x)}[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \dots, \alpha_p^{(k_p)}] = nr\ ,$$

то матричні коефіцієнти $N_1, N_2, \dots, N_r$ рівнянням (3.22) визначаються однозначно.

Наслідок 3.1. *При виконанні умов теореми* 3.2. *регулярний множник у співвідношенні* (3.18) *множником* $\varphi(x)$ *визначається однозначно з точністю до правого оборотного над* $\mathbb{C}$ *множника.*

3.4. Про один конструктивний метод виділення регулярного множника з матричного многочлена

Нехай $\mathbf{F}$ – довільне поле. Розглянемо унітальний матричний многочлен $A(x)$ вигляду

$$A(x) = Ex^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_{s-1}x + A_s\ , \tag{3.23}$$

коефіцієнтами якого є $n \times n$-матриці над полем $\mathbf{F}$. Припустимо, що характеристичний многочлен $\Delta(x)$ матричного многочлена (3.23) зображений у вигляді

$$\Delta(x) = \Phi(x)\varphi(x)\ ,$$

де $\Phi(x)$ і $\varphi(x)$ – унітальні многочлени із $\mathbf{F}[x]$ відповідно степенів $n(s-1)$ і n, тобто

$$\deg \Phi(x) = n(s-1),\ \deg \varphi(x) = n\ . \tag{3.24}$$

Утворивши матрицю $E\Phi(x)$ (E – одинична $n \times n$-матриця), розділимо її зліва на $A(x)$, одержимо

$$E\Phi(x) = A(x)Q(x) + R(x)\ , \tag{3.25}$$

де

$$R(x) = R_0 x^{s-1} + R_1 x^{s-2} + \cdots + R_{s-2} x + R_{s-1}\,. \tag{3.26}$$

Лема 3.5. *Визначник* $\det R(x)$ *ділиться на* $\Phi(x)$, *тобто*

$$\det R(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \Phi(x))\,.$$

Д о в е д е н н я. Оскільки з урахуванням співвідношення (3.25) всі елементи поліноміальної матриці $R(x) + A(x)Q(x)$ діляться на $\Phi(x)$, тобто

$$R(x) \equiv -A(x)Q(x) \ (\mathrm{mod}\ \Phi(x))\,,$$

то

$$\det R(x) \equiv (-1)^n \det A(x) \det Q(x) \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ \Phi(x))\,.$$

Лема 3.6. *Якщо* $\det R(x) \neq 0$, *то* $R(x)$ *– регулярна поліноміальна матриця степеня* $s-1$.

Д о в е д е н н я. Нехай

$$R(x) = R_0 x^{s-1} + R_1 x^{s-2} + \cdots + R_{s-2} x + R_{s-1}\,.$$

Тоді в $\det R(x)$ коефіцієнт при $x^{n(s-1)}$ дорівнює $\det R_0$. Отже, на основі леми 3.5

$$\det R(x) = \Phi(x) \det R_0\,,$$

що доводить лему.

Теорема 3.8. *Залишаємось у позначеннях леми* 3.6. *Якщо* $\det R(x) \neq 0$, *то*

$$A(x) = R(x)U(x)\,,$$

де $U(x)$ *– регулярний лінійний множник.*

Д о в е д е н н я. Шукатимемо стовпці матриці $U(x)$ за формулами Крамера. Щоб кожний елемент матриці $U(x)$ був многочленом, необхідно і достатньо, щоб усі визначники, що утворюються з $\det R(x)$ заміною одного з стовпців в $R(x)$ на стовпець із $A(x)$, ділились на $\delta(x)$ (в кільці $\mathbf{F}[x]$). Щоб переконатись у тому, що остання умова виконується, нам достатньо перевірити, що всі мінори порядку n матриці

$$\left\| R(x) \quad A(x) \right\|$$

діляться на $\delta(x)$ або, що те ж саме, діляться на $\Phi(x)$. Оскільки $R(x) = E\Phi(x) - A(x)Q(x)$, то виписану матрицю за допомогою елементарних перетворень можна звести до вигляду

$$\left\| E\Phi(x) \quad A(x) \right\|.$$

В одержаній матриці, очевидно, всі мінори порядку n діляться на $\Phi(x)$, Отже, те ж саме правильно і для попередньої матриці, а, отже, $U(x)$ – поліноміальна матриця. Для завершення доведення теореми залишається зауважити, що $R(x)$ – регулярна матриця степеня $s-1$ (див. лему 3.6.) і тому $U(x)$ – регулярна поліноміальна матриця степеня 1. Теорему доведено.

Надалі припускатимемо, що характеристика поля $\mathbf{F}$ дорівнює нулеві.

Теорема 3.9. *У співвідношенні* (3.25) *визначник* $\det R(x)$ *відмінний від нуля тоді і тільки тоді, коли*

$$\operatorname{rang} M_{A_{s-2}(x)}(\Phi) = n(s-1) \tag{3.27}$$

і

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = n, \tag{3.28}$$

де матриці $M_{A_{s-2}(x)}(\Phi)$ *і* $M_{A_*(x)}(\varphi)$ *розглядаються над деяким розширенням поля* $\mathbf{F}$*, в якому* $\Delta(x)$ *розкладається на лінійні множники.*

Доведення. Необхідність. Припустимо, що $\det R(x) \neq 0$. Нам треба довести, що виконуються умови (3.27) і (3.28). Доведемо це від протилежного. На основі співвідношення (3.25) маємо

$$R_*(x) \equiv -Q_*(x)A(x) \ (\mathrm{mod}\ \Phi(x)), \qquad (3.29)$$

де $R_*(x)$, $Q_*(x)$, $A_*(x)$ – взаємні матриці, відповідно, матриць $R(x)$, $Q(x)$, $A(x)$. Якщо $\operatorname{rang} M_{A_{s-2}(x)}(\Phi) < n(s-1)$, то існує така неособлива матриця S над $\mathbf{F}$, що поліноміальна матриця

$$A_*(x)\left\| E \ \ Ex \ \ \ldots \ \ Ex^{s-2} \right\| S$$

містить стовпець, всі елементи якого діляться на $\Phi(x)$. Позначимо матрицю $\left\| E \ \ Ex \ \ \ldots \ \ Ex^{s-2} \right\|$ через $S(x)$. Помноживши обидві частини рівняння (3.29) справа на $S(x)$, одержимо

$$R_*(x)S(x) \equiv -Q_*(x)A_*(x)S(x) \ (\mathrm{mod}\ \Phi(x)) \qquad (3.30)$$

Із останнього співвідношення видно, що матриця $R_*(x)S(x)$ містить стовпець, всі елементи якого діляться на поліном $\Phi(x)$. Але

$$\deg R_*(x)S(x) < (n-1)(s-1) + s - 2 = n(s-1) - 1 .$$

Оскільки $\deg \Phi(x) = n(s-1)$, то матриця $R_*(x)S(x)$ містить нульовий стовпець, а це значить, що $\det R(x) = 0$, що суперечить припущенню.

Якщо $\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) < n$, то, очевидно, існує така оборотна над $\mathbf{F}$ матриця Q, що в $A_*(x)Q$ існує стовпець, всі елементи якого діляться на $\varphi(x)$. Без обмеження загальності можемо вважати, що це перший стовпець. Отже, алгебраїчні доповнення першого рядка матриці $Q^{-1}A(x)$ діляться на $\varphi(x)$, тобто система

$$\begin{Vmatrix} \varphi(x) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix} = Q^{-1}A(x) \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Vmatrix}$$

сумісна над $\mathbf{F}[x]$. Звідси випливає, що, поділивши $E\Phi(x)$ на $Q^{-1}A(x)$ зліва, матимемо

$$E\Phi(x) = Q^{-1}A(x)Q_1(x) + R_1(x), \tag{3.31}$$

де перший стовпець матриці $R_1(x)$ – нульовий. Помноживши співвідношення (3.31) зліва і справа на Q і Q^{-1}, одержимо

$$E\Phi(x) = A(x)Q_1(x)Q^{-1} + QR_1(x)Q^{-1}. \tag{3.32}$$

Оскільки $QR_1(x)Q^{-1}$ матрицями $E\Phi(x)$ і $A(x)$ визначається однозначно, то $R(x) = QR_1(x)Q^{-1}$. Але $\det R_1(x) = 0$, тому, $\det R(x) = 0$, що суперечить нашому припущенню. Необхідність доведено.

Достатність. Якщо $\det R(x) = 0$, то існує така неособлива матриця K над $\mathbf{F}$, що

$$E\Phi(x)K = A(x)Q(x)K + R(x)K, \tag{3.33}$$

де перший стовпець матриці $R(x)K$ складається з елементів степеня меншого, ніж $s-1$. Якщо він нульовий, то, повторюючи міркування, зв'язані з співвідношеннями (3.32) в зворотному порядку, переконуємося, що ранг матриці $M_{A_*(x)}(\varphi)$ менший n. Якщо ж перший стовпець матриці $R(x)K$ ненульовий, то на основі (3.33) одержуємо сумісну над $\mathbf{F}[x]$ систему рівнянь:

$$A(x)\begin{Vmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{Vmatrix} = H(x), \tag{3.34}$$

де $H(x)$ має вигляд

$$H(x) = \begin{Vmatrix} k_1\Phi(x) + a_1x^{s-2} + \ldots \\ k_2\Phi(x) + a_2x^{s-2} + \ldots \\ \dotfill \\ k_n\Phi(x) + a_nx^{s-2} + \ldots \end{Vmatrix}, \; k_i, a_i \in \mathbf{F}.$$

Нехай $\begin{Vmatrix} l_1(x) & l_2(x) & \ldots & l_n(x) \end{Vmatrix}$ – розв'язок системи (3.34), $l_i(x) \in \mathbf{F}[x]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Помноживши тотожність

$$A(x)\begin{Vmatrix} l_1(x) \\ l_2(x) \\ \vdots \\ l_n(x) \end{Vmatrix} = H(x)$$

зліва на $A_*(x)$, одержимо

$$\Phi(x)\varphi(x) = \begin{Vmatrix} l_1(x) \\ l_2(x) \\ \vdots \\ l_n(x) \end{Vmatrix} = A_*(x)\begin{Vmatrix} k_1\Phi(x) \\ k_2\Phi(x) \\ \dotfill \\ k_n\Phi(x) \end{Vmatrix} + A_*(x)\begin{Vmatrix} a_1x^{s-2} + \ldots \\ a_2x^{s-2} + \ldots \\ \dotfill \\ a_nx^{s-2} + \ldots \end{Vmatrix}.$$

Із останнього співвідношення видно, що всі елементи стовпця

$$A_*(x)\begin{Vmatrix} a_1x^{s-2} + \ldots \\ a_2x^{s-2} + \ldots \\ \dotfill \\ a_nx^{s-2} + \ldots \end{Vmatrix} = A_*(x)H_1(x)$$

діляться на $\Phi(x)$. Оскільки елементи $H_1(x)$ мають степінь не більший $s-2$, то цей стовпець ми завжди можемо побудувати за допомогою добутку $\begin{Vmatrix} E & Ex & \ldots & Ex^{s-2} \end{Vmatrix} L$, де L – деяка, відповідним чином підібрана, неособлива числова матриця. Це значить, що матриця $A_*(x)\left\| E \;\; Ex \;\; \dots \;\; Ex^{s-2} \right\| L$ містить стовпець, всі елементи якого діляться на $\Phi(x)$, що рівносильно тому, що

$$\operatorname{rang} M_{A_{s-2}(x)}(\Phi) < n(s-1) .$$

Теорема доведена.

Нехай характеристичний многочлен $\Delta(x)$ матричного многочлена $A(x)$ зображений у вигляді

$$\Delta(x) = \varphi(x)\Phi(x) ,$$

де $\deg \varphi(x) = n$, $\deg \Phi(x) = n(s-1)$, причому $\Delta(x)$ – многочлен над основним полем $\mathbf{F}$ (не обов'язково алгебраїчно замкненим).

Правильна така теорема.

Теорема 3.10. *Щоб матричне рівняння*

$$X^s + A_1 X^{s-1} + \cdots + A_{s-1} X + A_s = 0, \qquad (3.35)$$

коефіцієнти якого збігаються з відповідними коефіцієнтами матричного многочлена $A(x)$ *(див.* (3.23)) *мало розв'язок над* $\mathbf{F}$ *з характеристичним многочленом* $\varphi(x)$ *достатньо, щоб*

$$\operatorname{rang} M_{A_{s-2}(x)}(\Phi) = n(s-2) \qquad (3.36)$$

і

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = n , \qquad (3.37)$$

де числові матриці $M_{A_{s-2}(x)}(\Phi)$ *і* $M_{A_*(x)}(\varphi)$ *побудовані над деяким розширенням поля* $\mathbf{F}$.

Доведення. Якщо виконані умови (3.36) і (3.37), то, згідно з теоремою 3.9, у співвідношенні

$$E\,\Phi(x) = A(x)Q(x) + R(x) , \qquad (3.38)$$

$\det R(x) \neq 0$. Отже, на основі теореми 3.8 маємо

$$A(x) = R(x)U(x), \tag{3.39}$$

де $U(x)$ – лінійний регулярний множник. Оскільки $R(x)$ визначається співвідношенням (3.38), не виходячи за межі поля $\mathbf{F}$, і в співвідношенні (3.39) можна вважати, що $U(x)$ має вигляд

$$U(x) = Ex - U,$$

то U є матрицею над $\mathbf{F}$ і, згідно з узагальненою теоремою Безу, є розв'язком матричного рівняння (3.35). Теорему доведено.

Наслідок 3.2. *Щоб матричне рівняння*

$$X^s + A = 0 \tag{3.40}$$

мало розв'язок над основним полем $\mathbf{F}$ ($\mathbf{F}$ *– поле, над яким задана матриця* A), *характеристичним многочленом якого є многочлен* $\varphi(x)$ (*над* $\mathbf{F}$), *причому корені полінома* $\varphi(x)$ (*можливо, в деякому розширенні поля* $\mathbf{F}$) *відмінні від решти коренів многочлена* $\det(Ex^s + A)$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = n, \tag{3.41}$$

де $A_*(x)$ *– взаємна матриця матриці* $Ex^s + A$.

Д о в е д е н н я. Якщо B – $n \times n$ - матриця над $\mathbf{F}$, що є розв'язком матричного рівняння (3.40), то, згідно з узагальненою теоремою Безу,

$$Ex^s + A = (Ex - B)C(x).$$

Оскільки

$$\det(Ex^s + A) = \varphi(x)\det C(x)$$

і многочлени $\varphi(x)$ і $\det C(x)$ – взаємно прості, то з урахуванням теореми 3.3,

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = n\,,$$

де $A_*(x)$ – взаємна матриця матриці $Ex^s + A$.

Якщо виконана умова (3.41), то, згідно з теоремою 3.2,

$$Ex^s + A = (Ex - B)C(x)\,, \tag{3.42}$$

де $\det(Ex - B) = \varphi(x)$.

Оскільки, згідно з теоремою 2.22 множники $Ex - B$ і $C(x)$ у співвідношенні (3.42) комутують, тобто

$$Ex^s + A = C(x)(Ex - B)\,,$$

і многочлени $\det C(x)$ і $\varphi(x)$ взаємно прості за умовою, то на основі теореми 3.9 маємо

$$\operatorname{rang} M_{A_{s-2}(x)}(\det C(x)) = n(s-1)\,. \tag{3.43}$$

Тепер, враховуючи співвідношення (3.41) і (3.43), очевидно, що твердження наслідку 3.2 випливає з теореми 3.10. Наслідок доведено.

Нехай тепер

$$A(x) = Ex^2 + A_1 x + A_2\,,$$

$$\Delta(x) = \varphi(x)\psi(x)\,,\ \deg\varphi(x) = n\,.$$

Припустимо, що у співвідношенні

$$E\varphi(x) = A(x)Q(x) + R(x)\,,\ \deg R(x) < 2\,,$$

поліноміальна матриця $R(x)$ така, що $\det R(x) \neq 0$. Тоді, згідно з лемою 3.6 і теоремою 3.8,

$$R(x) = R_0 x + R_1\,,\ \det R_0 \neq 0\,,$$

$$A(x) = (R_0 x + R_1)(R_0^{-1} x + R_2)$$

або

$$Ex^2 + A_1 x + A_2 = (Ex + R_1 R_0^{-1})(Ex + R_0 R_1)\,. \qquad (3.44)$$

Теорема 3.11. *Щоб у розкладі* (3.44) *лінійні множники комутували, необхідно і достатньо, щоб*

$$A_1 A_2 = A_2 A_1\,.$$

Доведення. Необхідність безпосередньо випливає із співвідношення (3.44).

Достатність. Оскільки

$$E\varphi(x) = (Ex^2 + A_1 x + A_2)Q(x) = R_0 x + R_1\,,$$

то R_0 і R_1 є многочлени від матриць A_1 і A_2 над $\mathbf{F}$. Оскільки A_1 і A_2 за умовою теореми комутують і згідно з співвідношенням (3.44)

$$R_1 R_0^{-1} + R_0 R_2 = A_1\,,$$

то матриця $R_0 R_2$ є також многочленом від A_1 і A_2, отже,

$$R_1 R_0^{-1} R_0 R_2 = R_0 R_2 R_1 R_0^{-1}\,,$$

що треба було довести.

Наслідок 3.3. *Нехай*

$$A(x) = Ex^2 + A_1 x + A_2\,,$$

A_1, A_2 *–* $n \times n$ *- матриці над* $\mathbf{F}$ *і* $\Delta(x) = \varphi(x)\psi(x)$, $\deg \varphi(x) = n$, *де многочлени* $\varphi(x)$ *і* $\psi(x)$ *взаємно прості. Щоб унітальний матричний тричлен* $A(x)$ *можна було зобразити у вигляді добутку лінійних комутуючих множників, тобто*

$$A(x) = (Ex + B)(Ex + C) = (Ex + C)(Ex + B),$$

причому $\det(Ex + B) = \varphi(x)$, *необхідно і достатньо, щоб виконувались такі умови:*

1. $\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\psi) = n$,

2. $A_1 A_2 = A_2 A_1$.

Доведення безпосередньо випливає з теорем 3.8 і 3.10 і теореми 3.3.

3.5. Теорема про ранги значень супутніх матриць поліноміальної матриці на системі коренів її характеристичного многочлена. Інваріанти квазіунітальної матриці

Тут основною метою є доведення важливої для наступного викладення теореми.

Теорема 3.12. *Нехай*

$$D(x) = \begin{Vmatrix} d_{11}(x) & d_{12}(x) & \dots & d_{1n}(x) \\ d_{21}(x) & d_{22}(x) & \dots & d_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}(x) & d_{n2}(x) & \dots & d_{nn}(x) \end{Vmatrix}$$

– *квазіунітальна матриця* (*див. означення* 3.1), *діагональні елементи якої мають степені*

$$\delta_1 \le \delta_2 \le \delta_3 \le \ldots \le \delta_n.$$

Нехай далі $\Delta(x)$ – *визначник матриці* $D(x)$ *і* $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + {} + \dots + \delta_n$ – *його степінь. Тоді*

$$\operatorname{rang} M_{D_{k-1}(x)}(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \min(k, \delta_i), \ k \geq 1. \tag{3.45}$$

Д о в е д е н н я. Якщо

$$D_*(x) = \begin{Vmatrix} D_{11}(x) & D_{12}(x) & \dots & D_{1n}(x) \\ D_{21}(x) & D_{22}(x) & \dots & D_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{n1}(x) & D_{n2}(x) & \dots & D_{nn}(x) \end{Vmatrix}$$

– взаємна матриця квазіунітальної матриці $D(x)$, то, як легко бачити,

$$\begin{aligned} &\deg D_{11} \geq \deg D_{22} \geq \ldots \geq \deg D_{nn}, \\ &\deg D_{ij} < \deg D_{ii}, \\ &\deg D_{ji} < \deg D_{ii}, \ i \neq j, \ i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Запишемо супутню матрицю $D_{k-1}(x)$ у вигляді

$$D_{k-1}(x) = \tag{3.47}$$

$$= \left\Vert \begin{array}{ccc:ccc:c:ccc} D_{11} & \dots & D_{n1} & xD_{11} & \dots & xD_{n1} & \dots & x^{k-1}D_{11} & \dots & x^{k-1}D_{n1} \\ D_{12} & \dots & D_{n2} & xD_{12} & \dots & xD_{n2} & \dots & x^{k-1}D_{12} & \dots & x^{k-1}D_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{1n} & \dots & D_{nn} & xD_{1n} & \dots & xD_{nn} & \dots & x^{k-1}D_{1n} & \dots & x^{k-1}D_{nn} \end{array} \right\Vert .$$

Згідно з нерівностями (3.46), найбільшими степенями в кожному стовпці матриці $D_{k-1}(x)$ будуть ті елементи, які стоять на головній діагоналі всіх (виділених пунктиром) кліток матриці (3.47). Будемо виконувати числові елементарні перетворення над стовпцями матриці $D_{k-1}(x)$. За допомогою цих перетворень замінимо всі стовпці степеня $\geq \delta$ на стовпці вигляду

$$\begin{Vmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x^{\alpha}\Delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Vmatrix}. \tag{3.48}$$

Нехай ми маємо стовпець

$$\begin{Vmatrix} x^r D_{i1} \\ \dots \\ x^r D_{ii} \\ \dots \\ x^r D_{in} \end{Vmatrix}$$

(очевидно, $\deg D_{ii} = \delta - \delta_i$), для якого $r + \delta - \delta_i \geq \delta_i$, тобто $r \geq \delta_i$. Дописуючи стовпці з попередніх кліток, помножені на належні числові коефіцієнти, стовпець, що нас цікавить, приведемо до вигляду

$$x^{r-\delta_j} \begin{Vmatrix} d_{1i}D_{11} + \cdots + d_{ii}D_{i1} + \cdots + d_{ni}D_{n1} \\ \\ d_{1i}D_{1i} + \cdots + d_{ii}D_{ii} + \cdots + d_{ni}D_{ni} \\ \\ d_{1i}D_{1n} + \cdots + d_{ii}D_{in} + \cdots + d_{ni}D_{nn} \end{Vmatrix},$$

що, очевидно, збігається з (3.48).

Починаючи з останньої клітки матриці (крайньої справа) $D_{k-1}(x)$ за допомогою згаданих вище числових перетворень приведемо всі стовпці степеня $\geq \delta$ до вигляду (3.48). Віднімемо всі так перетворені стовпці (які мали степінь $\geq \delta$) і розглянемо ті, що залишились. Кожна нетривіальна лінійна комбінація з числовими коефіцієнтами цих (які залишились) стовпців є ненульовий стовпець степеня $< \delta$ і тому такий, що ділиться на $\Delta(x)$. Справді, нехай ми маємо лінійну комбінацію

$$u_j = \sum_{(r,\, i)} \mu_{ri} x^r D_{ij} \ , \ \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.49}$$

де сумування поширене на всі такі пари (r, i), що $r < \delta_i$. Виберемо найбільше значення $r = r_0$, для якого існують значення i з умовою $\mu_{r_0 i} \neq 0$. Позначимо далі найменше значення i з такою умовою через i_0. Тоді для кожного ненульового коефіцієнта μ_{ri} маємо $r \leq r_0$ і якщо $r = r_0$, то $i > i_0$. Розглянемо степені доданків у співвідношенні (3.49) при $j = i_0$:

$$\deg x^{r_0} D_{i_0 i_0} = r + \delta - \delta_{i_0} \, ,$$

$$\deg x^{r_0} D_{i i_0} = r_0 + \deg D_{i i_0} < r + \delta - \delta_{i_0} \, ,$$

$$\deg x^{r} D_{i i_0} = r + \deg D_{i i_0} < r + \deg D_{i_0 i_0} < r + \delta - \delta_{i_0} \, .$$

Таким чином, для u_{i_0} у співвідношенні (3.49) тільки один доданок дає найбільший степінь, а, значить, лінійна комбінація (3.48) не дорівнює нулеві.

Тепер, беручи до уваги означення матриці $M_{D_{r-1}(x)}(\Delta)$, для завершення доведення залишалось показати, що число стовпців степеня $< \delta$ матриці $D_{k-1}(x)$ дорівнює $\sum_{i=1}^{n} \min(k, \delta_i)$. Якщо $\delta_j \neq 0$ і $\delta_j \leq k$, то, очевидно, матриця $D_{k-1}(x)$ містить δ_j стовпців

$$D_j,\, xD_j,\, x^2 D_j,\, \ldots,\, x^{\delta_j - 1} D_j$$

степеня $< \delta$. Очевидно, якщо $\delta_j = 0$, то таких стовпців немає. Нехай δ_{j_0} – натуральне число з максимальним індексом, що має властивість $\delta_{j_0} \le k$. Тоді ясно, що матриця $D_{k-1}(x)$ містить точно

$$\sum_{j=0}^{j_0} \delta_i + (n - j_0)k = \sum_{i=1}^{n} \min(k, \delta_i)$$

стовпців степеня $< \delta$. Теорема доведена.

Наслідок 3.4. *Нехай $D(x)$ – квазіунітальна $n \times n$-матриця, діагональні елементи якої мають степені $\delta_1 \le \delta_2 \le \ldots \le \delta_n$. Якщо $k \ge \delta_n$, то*

$$\operatorname{rang} M_{D_{k-1}(x)}(\Delta) = \delta .$$

Доведення безпосередньо випливає з формули (3.45).

Теорема 3.13. *Нехай $D(x)$ – квазіунітальна матриця поліноміальної матриці $A(x)$, діагональні елементи якої мають степені $\delta_1 \le \delta_2 \le \ldots \le \delta_n$. Тоді*

$$\operatorname{rang} M_{A_{k-1}(x)}(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} \min(k, \delta_i),\ k \ge 1. \tag{3.50}$$

Доведення випливає безпосередньо із теореми 3.12 і твердження 2.8.

Наслідок 3.5. *Нехай $D(x)$ – квазіунітальна матриця поліноміальної матриці $A(x)$. Якщо $k \ge \delta_n$, то*

$$\operatorname{rang} M_{A_{k-1}(x)}(\Delta) = \deg \Delta(x) .$$

Д о в е д е н н я випливає з формули (3.50).

Теорема 3.14. *Показники степенів*

$$\delta_1 \le \delta_2 \le \ldots \le \delta_n$$

діагональних елементів квазіунітальної матриці $D(x)$ *поліноміальної матриці* $A(x)$ *визначаються матрицею* $A(x)$ *однозначно.*

Д о в е д е н н я. Нехай $D_1(x)$ – деяка інша квазіунітальна матриця поліноміальної матриці $A(x)$ і

$$\delta_1' \le \delta_2' \le \ldots \le \delta_n'$$

– степенів її діагональних елементів. І нехай

$$\delta_1 = \delta_2 = \ldots = \delta_t = 0,\ \delta_{t+1} \ne 0$$

і

$$\delta_1' = \delta_2' = \ldots = \delta_s' = 0,\ \delta_{s+1}' \ne 0\,.$$

При $k = 1$ формула (3.50) в обох випадках має вигляд

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\Delta) = n - t\,,$$

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\Delta) = n - s\,,$$

звідки випливає, що $t = s$. Отже, діагональні елементи квазіунітальних матриць $D(x)$ і $D_1(x)$ мають відповідно степені

$$0, \ldots, 0, \delta_{t+1}, \delta_{t+2}, \ldots, \delta_n\,, \tag{3.51}$$

$$0, \ldots, 0, \delta_{t+1}', \delta_{t+2}', \ldots, \delta_n'\,. \tag{3.52}$$

Припустимо, що $\delta_{t+1} \ne \delta_{t+1}'$. Нехай для визначеності $\delta_{t+1} < \delta_{t+1}'$.

Покладемо $k = \delta_{t+1} + 1$. Тоді, згідно з формулою (3.50), маємо, з одного боку, на основі (3.51)

$$\operatorname{rang} M_{A_{k-1}(x)}(\Delta) = \delta_{t+1} + (n-t-1)(\delta_{t+1}+1) = \delta_{t+1}(n-t) + n - t - 1 .$$

З другого боку, на основі (3.52)

$$\operatorname{rang} M_{A_{k-1}(x)}(\Delta) = \delta_{t+1}(n-t) .$$

Одержане протиріччя показує помилковість нашого припущення. Таким чином, $\delta_{t+1} = \delta'_{t+1}$. Припускаючи, що ми вже довели, що $\delta_{t+l} = \delta'_{t+l}$, $t+l < n$, легко показати, застосовуючи наведені вище міркування, що $\delta_{t+l+1} = \delta'_{t+l+1}$. Теорема доведена.

3.6. Теореми про ранг значення супутньої матриці на системі коренів дільника характеристичного многочлена

Доведемо спочатку таку теорему.

Теорема 3.15. *Якщо*

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} x + A_m ,$$

$$\deg \det A(x) = \delta > 0$$

– матричний многочлен n-го порядку, де A_i, $(i = 0, 1, \ldots, m)$ – квадратні матриці над $\mathbb{C}$, то

$$\operatorname{rang} M_{A_{m-1}(x)}(\Delta) = \delta ,$$

тобто ранг $M_{A_{m-1}(x)}(\Delta)$ дорівнює кількості коренів (з урахуванням їх кратності) многочлена $\det A(x) = \Delta(x)$.

Доведемо спочатку таку лему.

Лема 3.7. *У множині всіх стовпців вигляду* $\{D(x)S(x)\}$, $D(x)$ *– квазіунітальна матриця* (*див. означення* 3.1) *степеня* l, $S(x)$ *– довільний стовпець з елементами із* $\mathbb{C}[x]$:

$$S(x) = \left\| s_1(x) \quad s_2(x) \quad \dots \quad s_n(x) \right\|^T,$$

причому $s_n(x) \neq 0$, *не існує стовпця степеня меншого, ніж* l.

Доведення. Припустимо, що всупереч твердженню леми існує такий стовпець

$$p(x) = \left\| p_1(x) \quad p_2(x) \quad \dots \quad p_n(x) \right\|^T, \; p_n(x) \neq 0$$

з елементами із $\mathbb{C}[x]$, що добуток

$$D(x)\,p(x) = \left\| \begin{matrix} d_{11}(x) & d_{12}(x) & \dots & d_{1n}(x) \\ d_{21}(x) & d_{22}(x) & \dots & d_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1}(x) & d_{n2}(x) & \dots & d_{nn}(x) \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} p_1(x) \\ p_2(x) \\ \dots \\ p_n(x) \end{matrix} \right\| \qquad (3.53)$$

має степінь менший, ніж l. Розглянемо всі добутки вигляду

$$d_{11}(x)p_1(x),\, d_{22}(x)p_2(x),\, \dots,\, d_{nn}(x)p_n(x).$$

Нехай

$$\deg(d_{kk}(x)p_k(x)) = \max[\deg(d_{11}(x)p_1(x)),$$

$$\deg(d_{22}(x)p_2(x)), \dots, \deg(d_{nn}(x)p_n(x))]. \qquad (3.54)$$

Оскільки, згідно з (3.53), степінь добутку

$$\left\| d_{k1}(x) \quad d_{k2}(x) \quad \dots \quad d_{kk}(x) \quad \dots \quad d_{kn}(x) \right\| \left\| \begin{matrix} p_1(x) \\ p_2(x) \\ \dots \\ p_n(x) \end{matrix} \right\| \qquad (3.55)$$

менший, ніж l,

$$\deg(d_{kk}(x)p_k(x)) \ge \deg(d_{nn}(x)p_n(x)) \ge l,\ \deg d_{nn}(x) = l,$$

то серед елементів $d_{ki}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $i \ne k$ рядка

$$\left\| d_{k1}(x) \quad d_{k2}(x) \quad \ldots \quad d_{kn}(x) \right\|$$

існує такий елемент $d_{ks}(x)$, $1 \le s \le n$, $s \ne k$, що

$$\deg(d_{ks}(x)p_s(x)) \ge \deg(d_{kk}(x)p_k(x)). \qquad (3.56)$$

У протилежному випадку степінь добутку (3.55) був би не менший l, що суперечило б нашому припущенню. Оскільки $D(x)$ – квазіунітальна матриця, то

$$\deg d_{ss}(x) > \deg d_{ks}(x),\ s \ne k$$

і, отже, згідно з нерівністю (3.56), ми мали б

$$\deg(d_{ks}(x)p_s(x)) > \deg(d_{ks}(x)p_s(x)) \ge \deg(d_{kk}(x)p_k(x)),$$

що суперечить співвідношенню (3.54). Лема доведена.

Доведення теореми 3.15. Згідно з теоремою 3.1, для поліноміальної матриці $A(x)$ існують такі оборотні матриці Q і $R(x)$ відповідно над $\mathbb{C}$ і $\mathbb{C}[x]$, що правильною є рівність $QA(x)R(x) = D(x)$, де $D(x)$ – квазіунітальна матриця, тобто

$$A(x) = Q^{-1}D(x)R^{-1}(x). \qquad (3.57)$$

З урахуванням твердження 2.11 взаємна матриця $A_*(x)$ матриці $A(x)$ має вигляд

$$A_*(x) = R_*^{-1}(x)D_*(x)Q_*^{-1}, \qquad (3.58)$$

де $D_*(x)$, $R_*^{-1}(x)$, Q_*^{-1} – взаємні матриці матриць $D(x)$, $R^{-1}(x)$, Q^{-1} відповідно. Зауважимо, що

$$A_{m-1}(x) = A_*(x)\left\| E \ \ Ex \ \ \ldots \ \ Ex^{m-1} \right\|. \qquad (3.59)$$

Із співвідношень (3.58) і (3.59) випливає, що

$$A_{m-1}(x) = R_*^{-1}(x) D_*(x) Q_*^{-1} \left\| E \ \ Ex \ \ \ldots \ \ Ex^{m-1} \right\|, \qquad (3.60)$$

де $R_*^{-1}(x)$, Q_*^{-1} – оборотні матриці. Оскільки

$$Q^{-1}\left\| E \ \ Ex \ \ \ldots \ \ Ex^{m-1} \right\| = \left\| E \ \ Ex \ \ \ldots \ \ Ex^{m-1} \right\| \begin{Vmatrix} Q_*^{-1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Q_*^{-1} \end{Vmatrix},$$

де

$$\begin{Vmatrix} Q_*^{-1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Q_*^{-1} \end{Vmatrix},$$

очевидно, оборотна матриця, то, враховуючи співвідношення (3.60), маємо

$$A_{m-1}(x) = R_*^{-1}(x) D_{m-1}(x) \begin{Vmatrix} Q_*^{-1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Q_*^{-1} \end{Vmatrix}, \qquad (3.61)$$

де $D_{m-1}(x) = D_*(x)\left\| E \ \ Ex \ \ \ldots \ \ Ex^{m-1} \right\|$.

Згідно з твердженням 2.8 і співвідношенням (3.61), маємо

$$\operatorname{rang} M_{A_{m-1}(x)}(\Delta) = \operatorname{rang} M_{D_{m-1}(x)}(\Delta). \qquad (3.62)$$

На основі щойно доведеної леми 3.7 і співвідношення (3.57) робимо висновок, що степінь m матриці $A(x)$ не менший степеня δ_n квазіунітальної матриці $D(x)$, тобто $m-1 \geq \delta_n - 1$. Таким чином,

$$D_{m-1}(x) = D_*(x) \left\| E \;\; Ex \;\; \ldots \;\; Ex^{\delta_n - 1} \;\; Ex^{\delta_n} \;\; \ldots \;\; Ex^{m-1} \right\|.$$

Використовуючи наслідок 3.4, робимо висновок, що

$$\operatorname{rang} M_{D_{m-1}(x)}(\Delta) = \delta = \deg \Delta(x). \qquad (3.63)$$

Із співвідношень (3.62) і (3.63) випливає, що

$$\operatorname{rang} M_{A_{m-1}(x)}(\Delta) = \delta.$$

Теорема 3.16. *Якщо*

$$\Delta(x) = \varphi(x)\Phi(x), \qquad (3.64)$$

причому многочлени $\varphi(x)$ *і* $\Phi(x)$ *– взаємно прості, то*

$$\operatorname{rang} M_{A_{m-1}(x)}(\varphi) = \deg \varphi(x).$$

Доведення. На основі співвідношення (3.64), згідно з лемою 2.1, існує така поліноміальна матриця $F(x)$, що

$$A(x) = F(x)N(x), \qquad (3.65)$$

причому $\det F(x) = \varphi(x)$.

Зведемо поліноміальну матрицю $F(x)$ до квазіунітального вигляду

$$QF(x)R(x) = D(x), \qquad (3.66)$$

де Q і $R(x)$ – оборотні відповідно над $\mathbb{C}$ і $\mathbb{C}[x]$ матриці, $D(x)$ – квазіунітальна матриця. Із співвідношень (3.65) і (3.66) випливає, що

$$QA(x) = D(x)N_1(x), \qquad (3.67)$$

де $N_1(x) = R^{-1}(x)N(x)$.

Оскільки $\deg QA(x) = m$ (див. теорему 3.15) і $N_1(x)$ – не дільник нуля, то, згідно з лемою 3.7,

$$\deg D(x) \le m . \tag{3.68}$$

Із співвідношення (3.67) випливає, що

$$A(x) = Q^{-1}D(x)N_1(x) , \tag{3.69}$$

де, згідно з (3.68), $\deg Q^{-1}D(x) \le m$.

Розглянемо матрицю

$$A_{m-1}(x) = A_*(x)\begin{Vmatrix} E & Ex & \dots & Ex^{m-1} \end{Vmatrix}. \tag{3.70}$$

Враховуючи співвідношення (3.69), маємо

$$A_{m-1}(x) = N_{1*}(x)D_*(x)Q_*^{-1}\begin{Vmatrix} E & Ex & \dots & Ex^{m-1} \end{Vmatrix} =$$

$$= N_{1*}(x)D_*(x)\begin{Vmatrix} E & Ex & \dots & Ex^{m-1} \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} Q_*^{-1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & Q_*^{-1} \end{Vmatrix}. \tag{3.71}$$

Оскільки $\varphi(x)$ і $\Phi(x)$ – взаємно прості, то, враховуючи формулу (1.12.) (див. доведення твердження 2.8) і співвідношення (3.71), маємо

$$\operatorname{rang} M_{A_{m-1}(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{D_{m-1}(x)}(\varphi) , \tag{3.72}$$

де

$$D_{m-1}(x) = D_*(x)\begin{Vmatrix} E & Ex & \dots & Ex^{m-1} \end{Vmatrix}.$$

Оскільки, згідно з (3.68), $\deg D(x) \le m$, то, беручи до уваги наслідок 3.4, маємо

$$\operatorname{rang} M_{D_{m-1}(x)}(\varphi) = \deg \varphi(x)\,, \qquad (3.73)$$

що треба було довести.

Теорема 3.17. *Нехай* $\varphi(x)$ *– дільник* $\Delta(x)$ *і*

$$\varphi(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_s(x),$$

де $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_s(x)$ *– попарно взаємно прості многочлени. Тоді*

$$\operatorname{rang} M_{A_{m-1}(x)}(\varphi) = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{rang} M_{A_{m-1}(x)}(\varphi_i)\,.$$

Доведення. Ми можемо $\Delta(x)$ зобразити у вигляді добутку

$$\Delta(x) = \Phi_1(x)\Phi_2(x)\ldots\Phi_s(x)$$

попарно взаємно простих многочленів так, щоб для кожного $i = 1, 2, \ldots, s$ множник $\varphi_i(x)$ був дільником $\Phi_i(x)$.

На основі теорем 3.15 і 3.16 маємо рівність

$$\operatorname{rang} M_{A_{m-1}(x)}(\Delta(x)) = \sum_{i=1}^{s} \operatorname{rang} M_{A_{m-1}(x)}(\Phi_i(x))\,. \qquad (3.74)$$

Для кожної прямокутної матриці M через $\{M\}$ позначимо підпростір, натягнений на всі рядки цієї матриці.

Із рівності (3.74) випливає, що правильним є розклад в пряму суму

$$\left\{M_{A_{m-1}(x)}(\Delta)\right\} = \left\{M_{A_{m-1}(x)}(\Phi_1)\right\} \oplus \ldots \oplus \left\{M_{A_{m-1}(x)}(\Phi_s)\right\}. \qquad (3.75)$$

Очевидно, що

$$\left\{M_{A_{m-1}(x)}(\varphi)\right\} = \left\{M_{A_{m-1}(x)}(\varphi_1)\right\} + \ldots + \left\{M_{A_{m-1}(x)}(\varphi_s)\right\}. \qquad (3.76)$$

Крім того,

$$\left\{M_{A_{m-1}(x)}(\varphi_i)\right\} \subset \left\{M_{A_{m-1}(x)}(\Phi_i)\right\}.$$

Із рівності (3.75) і останнього включення випливає, що сума (3.76) – пряма, звідки і випливає твердження теореми.

3.7. Необхідність умови виділення регулярного множника з матричного многочлена

Припустимо, що для неособливого матричного многочлена

$$A(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \dots + A_{m-1} x + A_m \tag{3.77}$$

існує розклад

$$A(x) = B(x) D(x) \tag{3.78}$$

з унітальним множником $B(x)$ степеня r. Покладемо

$$\Delta(x) = \det A(x), \qquad \varphi(x) = \det B(x), \qquad \Phi(x) = \det D(x).$$

Нашою метою є виявлення тих дільників $\varphi(x)$ характеристичного многочлена $\Delta(x)$, для яких достатня умова виділення унітального лівого множника, знайдена в теоремі 3.2, була б також і необхідною, тобто для яких із існування розкладу (3.78) випливала б рівність

$$\operatorname{rang} M_{A_{r-1}(x)}(\varphi) = nr.$$

Нижче буде доведено (теорема 3.18), що таку властивість мають ті дільники $\varphi(x)$, для яких $K_\varphi \cap K_\Phi \subset K_{n-1}$ (стосовно означення $K_\varphi, K_\Phi, K_{n-1}$ див. розділ 2). Почнемо з такого допоміжного твердження.

Лема 3.8. *Нехай для матричного многочлена* (3.77) *існує розклад* (3.78) *з унітальним множником* $B(x)$ *степеня* r *і нехай* $\varphi(x) = \det B(x)$. *Тоді*

$$\operatorname{rang} M_{A_{r-1}(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{A_{s-1}(x)}(\varphi)$$

для всіх $s \geq r$.

Доведення. Поряд з (3.78) ми маємо рівність $A_*(x) = D_*(x)B_*(x)$. Далі, для деякої неособливої числової матриці H (порядку ns) правильна рівність

$$\left\| E \;\; Ex \;\; \ldots \;\; Ex^{r-1} \;\; Ex^{r} \;\; \ldots \;\; Ex^{s-1} \right\| H =$$

$$= \left\| E \;\; Ex \;\; \ldots \;\; Ex^{r-1} \;\; B(x) \;\; B(x)x \;\; \ldots \;\; B(x)x^{s-r-1} \right\|$$

(цей факт випливає з доведення теореми 3.12, див. співвідношення (3.47) і (3.48)). Отже,

$$A_{s-1}H = \left\| A_*(x) \;\; A_*(x)x \;\; \ldots, A_*(x)x^{r-1} \;\; D_*(x)\varphi(x) \right.$$
$$\left. D_*(x)\varphi(x)x \;\; \ldots \;\; D_*(x)\varphi(x)x^{s-r-1} \right\| .$$

Звідси очевидним чином випливає твердження леми.

Лема 3.9. *Нехай в тих же позначеннях*

$$\varphi(x) = (x-\alpha)^k \varphi_1(x), \quad \varphi_1(\alpha) \neq 0.$$

Тоді

$$\operatorname{rang} M_{A_{r-1}(x)}[\alpha^{(k)}] = \operatorname{rang} M_{A_{s-1}(x)}[\alpha^{(k)}]$$

для всіх $s \geq r$.

Доведення. Твердження очевидне на основі леми 3.8.

Лема 3.10. *Збережемо позначення лем* 3.8 *і* 3.9 *та припустимо, що* $s \geq k$. *Тоді ранг матриці*

$$M_{A_{s-1}(x)}[\alpha^{(k)}] \tag{3.79}$$

збігається з рангом

$$\left\| \begin{matrix} A_*(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \frac{A'_*(\alpha)}{1!} & A_*(\alpha) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \frac{A''_*(\alpha)}{2!} & \frac{A'_*(\alpha)}{1!} & A_*(\alpha) & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_*^{(k-1)}(\alpha)}{(k-1)!} & \frac{A_*^{(k-2)}(\alpha)}{(k-2)!} & \frac{A_*^{(k-3)}(\alpha)}{(k-3)!} & \dots & \frac{A_*(\alpha)}{1!} & A_*(\alpha) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{matrix} \right\|. \quad (3.80)$$

Доведення. Покажемо, що матрицю (3.79) елементарними операціями можна перетворити в матрицю (3.80). Покладемо $B_i(x) = x^i A_*(x)$ так, що $B_0(x) = A_*(x)$. Тоді матрицю (3.79) можна записати у вигляді

$$\left\| \begin{matrix} B_0(\alpha) & B_1(\alpha) & \dots & B_{s-1}(\alpha) \\ B'_0(\alpha) & B'_1(\alpha) & \dots & B'_{s-1}(\alpha) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_0^{(k-1)}(\alpha) & B_1^{(k-1)}(\alpha) & \dots & B_{s-1}^{(k-1)}(\alpha) \end{matrix} \right\|. \quad (3.81)$$

Оскільки при $i = 0, 1, \dots, s-2$ ми маємо

$$B_{i+1}(x) = xB_i(x),$$

$$B'_{i+1}(x) = xB'_i(x) + B_i(x),$$

$$B''_{i+1}(x) = xB''_i(x) + 2B'_i(x),$$

....

$$B_{i+1}^{(k-1)}(x) = xB_i^{(k-1)}(x) + (k-1)B_i^{(k-2)}(x),$$

то, віднімаючи в (3.81) з кожного стовпця попередній (починаючи з останнього), помножений на α, одержимо матрицю

$$\begin{Vmatrix} B_0(\alpha) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ B_0'(\alpha) & B_0(\alpha) & B_1(\alpha) & \dots & B_{s-2}(\alpha) \\ B_0''(\alpha) & 2B_0'(\alpha) & 2B_1'(\alpha) & \dots & 2B_{s-2}'(\alpha) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_0^{(k-1)}(\alpha) & (k-1)B_0^{(k-2)}(\alpha) & (k-1)B_1^{(k-2)}(\alpha) & \dots & (k-1)B_{s-2}^{(k-2)}(\alpha) \end{Vmatrix}$$

Виносимо з кожного рядка відповідний множник і повторюємо процес з матрицею на одиницю меншого порядку. В результаті одержуємо матрицю (3.80). Лема доведена.

Лема 3.11. *Нехай зберігаються позначення леми* 3.9. *Тоді, якщо* $\alpha \in K_{n-1}$, *то*

$$\operatorname{rang} M_{A_{r-1}(x)}[\alpha^{(k)}] \geq k .$$

Д о в е д е н н я. Якщо $\alpha \in K_{n-1}$, тобто $\operatorname{rang} A(\alpha) = n-1$, то $\operatorname{rang} A_*(\alpha) = 1$. Але в такому разі ранг матриці (3.80) буде $\geq k$. Лема 3.11 тепер випливає з леми 3.9.

Теорема 3.18. *Нехай неособливий матричний многочлен* (3.77) *зображений у вигляді* (3.78) *з унітальним множником* $B(x)$ *степеня* r. *Якщо* $K_\varphi \cap K_\Phi \subset K_{n-1}$, *то* $\operatorname{rang} M_{A_{r-1}(x)}(\varphi) = nr$.

Д о в е д е н н я. Нехай

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \dots (x-\alpha_p)^{k_p} ,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ – попарно різні, $k_1 + k_2 + \cdots + k_p = nr$. Стверджуємо, що для всіх $j = 1, 2, \dots, p$ правильна нерівність

$$\operatorname{rang} M_{A_{r-1}(x)}[\alpha_j^{(k_j)}] \geq k_j . \qquad (3.82)$$

Дійсно, якщо α_j не є коренем многочлена $\Phi(x)$, то k_j – кратність кореня α_j у многочлені $\Delta(x)$, і тому, згідно з теоремою 3.16 маємо

$$\operatorname{rang} M_{A_{m-1}(x)}[\alpha_j^{(k_j)}] = k_j .$$

Оскільки $m \geq r$, то, згідно з лемою 3.9, нерівність перетворюється у цьому випадку в рівність. Якщо ж $\Phi(\alpha_j) = 0$, то, згідно з умовою $\alpha_j \in K_{n-1}$, і нерівність (3.82) правильна на основі леми 3.11. Звернемось тепер до теореми 3.17. Просумувавши нерівності (3.82) по всіх $j = 1, 2, \ldots, p$ і використавши цю теорему, одержимо

$$\operatorname{rang} M_{A_{r-1}(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{A_{m-1}(x)}(\varphi) =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} \operatorname{rang} M_{A_{m-1}(x)}[\alpha_j^{(k_j)}] \geq \sum_{j=1}^{p} k_j = nr .$$

Для завершення доведення теореми 3.18 залишається лише зауважити, що кількість стовпців у матриці $M_{A_{r-1}(x)}(\varphi)$ дорівнює nr і тому остання нерівність не може бути строгою.

Об'єднуючи щойно доведену теорему 3.18 з теоремою 3.2, ми можемо сформулювати такий результат.

Теорема 3.19. *Нехай характеристичний многочлен* $\Delta(x)$ *неособливого матричного многочлена* $A(x)$ *зображений у вигляді*

$$\Delta(x) = \varphi(x)\Phi(x),$$

де $\varphi(x)$ *– унітальний многочлен степеня* nr. *Припустимо, що*

$$K_\varphi \cap K_\Phi \subset K_{n-1}.$$

Щоб матричний многочлен $A(x)$ *можна було записати у вигляді добутку* $A(x)=B(x)D(x)$, *де* $B(x)$ *– унітальний і* $\det B(x)=\varphi(x)$, *необхідно і достатньо, щоб ранг значення супутньої матриці* $A_{r-1}(x)$ *на системі коренів многочлена* $\varphi(x)$ *дорівнював* nr, *тобто*

$$\operatorname{rang} M_{A_{r-1}(x)}(\varphi)=nr .$$

Теорема 3.20. *Якщо всі елементарні дільники поліноміальної матриці* $A(x)$ *– попарно взаємно прості, то матричний многочлен* $A(x)$ *має лише скінчену кількість унітальних дільників (лівих або правих).*

Доведення. Оскільки характеристичний многочлен $\Delta(x)$ матриці $A(x)$ має скінчену кількість унітальних дільників і, згідно з умовою теореми і леми 2.9 $\operatorname{rang} A(\alpha)=n-1$ для довільного кореня многочлена $\Delta(x)=\det A(x)$, то наше твердження випливає з теореми 3.7, доведеної вище теореми 3.19 і зауваження, що права подільність зводиться до лівої за допомогою операції транспонування.