РОЗДІЛ 2

ПРО РОЗКЛАД РЕГУЛЯРНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ В ДОБУТОК ЛІНІЙНИХ МНОЖНИКІВ

2.1. Умови сумісності неоднорідної системи лінійних рівнянь

Надалі нам знадобляться умови існування розв'язку над кільцем $\boldsymbol{F}[x]$ лінійних матричних рівнянь вигляду

$$AX = B, \quad YA_1 = B_1.$$

Тут A, B, A_1, B_1 – задані і X, Y – невідомі матриці з елементами із $\boldsymbol{F}[x]$ ($\boldsymbol{F}$ – довільне поле).

Для зручності викладу сформулюємо ці умови, замінивши кільце $\boldsymbol{F}[x]$ довільною комутативною областю[1] головних ідеалів.

Кожна прямокутна матриця A над комутативною областю головних ідеалів R за допомогою елементарних перетворень над рядками і стовпцями, тобто шляхом множення зліва і справа на оборотні матриці, зводиться до вигляду

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & \varepsilon_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & 0 \end{Vmatrix},$$

[1] Розуміється асоціативне кільце без дільників нуля.

де ε_i ділить ε_{i+1}, $i = 1,2,\ldots,r-1$. Елементи $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ називаються інваріантними множниками (див.[5] с.117). Число r збігається з рангом матриці A, добуток $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_r = \delta_r$ із спільним найбільшим дільником мінорів порядку r матриці A.

Твердження 2.1. *Щоб неоднорідна система лінійних рівнянь*

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i\,,\ i = 1,2,\ldots,m\,,\ a_{ik}\,, b_i \in R$$

була розв'язана в R, *необхідно і достатньо, щоб відповідні інваріантні множники матриці коефіцієнтів* A *і розширеної матриці*

$$\left\| \begin{matrix} & b_1 \\ A & \vdots \\ & b_m \end{matrix} \right\|$$

збігалися, з точністю до дільників одиниці, або, що те ж саме, щоб ранги матриць, що розглядаються, були рівні (*скажімо, числу* r) *і спільні найбільші дільники мінорів порядку* r *цих матриць збігалися з точністю до дільників одиниці кільця* R *(див.* [17]).

Твердження 2.2. *Щоб матричне рівняння*

$$AX = B$$

(A, B *– матриці над* R) *було розв'язне над* R, *необхідно і достатньо, щоб відповідні елементарні дільники матриць* A *і* $\|A \quad B\|$ *збігалися з точністю до дільників одиниці або, в іншій формі, щоб ранги матриць, що розглядаються, були рівні і спільні найбільші дільники мінорів порядку* r *цих матриць збіга-*

лися з точністю до дільників одиниці кільця R (*де* r *– спільний ранг матриць* A *і* $\begin{Vmatrix} A & B \end{Vmatrix}$).

Зауваження. Твердження 2.2 легко перефразувати на випадок рівняння вигляду

$$YA = B.$$

У цьому випадку в формулюванні замість матриці $\begin{Vmatrix} A & B \end{Vmatrix}$ треба взяти матрицю

$$\begin{Vmatrix} A \\ B \end{Vmatrix}.$$

В частинному випадку, коли R – поле, твердження 2.1 і 2.2 перетворюються в добре відомий критерій Кронекера–Капеллі сумісності системи лінійних рівнянь.

Сформулюємо відповідні твердження для цього частинного випадку.

Твердження 2.3. *Нехай* R *– поле. Щоб матричне рівняння* $AX = B$ (A, B – *матриці з елементами із* R) *мало розв'язок над* R, *необхідно і достатньо, щоб ранги матриць* A *і* $\begin{Vmatrix} A & B \end{Vmatrix}$ *були рівні.*

Твердження 2.4. *Щоб матричне рівняння* $YA = B$ (A, B – *матриці з елементами із* R) *було розв'язне над* R, *необхідно і достатньо, щоб ранги матриць* A *і* $\begin{Vmatrix} A \\ B \end{Vmatrix}$ *були рівні.*

Сформульовані вище твердження випливають як наслідок із двох більш загальних теорем, доведених автором для випадку області (не обов'язково комутативної) головних ідеалів (див. [17]). Ці теореми висвітлюються в кінці роботи (див. додаток).

2.2. Значення поліноміальної матриці на системі коренів многочлена

У питанні виділення множників з поліноміальної матриці важливу роль буде відігравати числова (тобто з елементами із поля $\mathbb{C}$) матриця, що є числовою матрицею “значень” поліноміальної матриці на множині коренів довільного многочлена. Точне означення цієї матриці “значень” таке.

Нехай задана довільна прямокутна поліноміальна матриця $G(x)$ будови $r \times s$ з елементами із $\mathbb{C}[x]$ і довільний унітальний многочлен $\varphi(x)$ з коефіцієнтами із $\mathbb{C}$. Поле $\mathbb{C}$, нагадаємо, ми вважаємо полем усіх комплексних чисел. Запишемо $\varphi(x)$ у вигляді канонічного добутку лінійних множників:

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} \ldots (x - \alpha_m)^{k_m},$$

де $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ – попарно різні корені многочлена $\varphi(x)$.

Під похідною поліноміальної матриці $G(x) = \left\| g_{ij}(x) \right\|$, як звичайно, розуміється матриця $G'(x)$, елементи якої є похідні $g'_{ij}(x)$ усіх її елементів $g_{ij}(x)$. Похідні вищих порядків позначимо через

$$G''(x), G'''(x), \ldots, G^{(t)}(x).$$

Означення 2.1. *Значенням поліноміальної матриці* $G(x)$ *на системі коренів многочлена* $\varphi(x)$ називаємо числову матрицю вигляду

$$M_{G(x)}(\varphi) = \left\| \begin{matrix} G(\alpha_1) \\ G'(\alpha_1) \\ \cdots \\ G^{(k_1-1)}(\alpha_1) \\ G(\alpha_2) \\ G'(\alpha_2) \\ \cdots \\ G^{(k_2-1)}(\alpha_2) \\ \cdots \\ G(\alpha_m) \\ G'(\alpha_m) \\ \cdots \\ G^{(k_m-1)}(\alpha_m) \end{matrix} \right\|. \qquad (2.1)$$

Кількість рядків матриці $M_{G(x)}(\varphi)$ дорівнює

$$\deg \varphi(x) = r(k_1 + k_2 + \cdots + k_m).$$

Кількість її стовпців збігається з числом s, тобто з кількістю стовпців матриці $G(x)$. Якщо многочлен $\varphi(x)$ не має кратних коренів, то

$$M_{G(x)}(\varphi) = \left\| \begin{matrix} G(\alpha_1) \\ G(\alpha_2) \\ \cdots \\ G(\alpha_m) \end{matrix} \right\|.$$

В нашому означенні матриця $M_{G(x)}(\varphi)$ залежить не тільки від многочлена φ, але і від порядку, в якому записані його корені $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Щоб підкреслити цю залежність, будемо часто матрицю $M_{G(x)}(\varphi)$ позначати також через

$$M_{G(x)}\left[\alpha_1^{(k_1)}, \alpha_2^{(k_2)}, \ldots, \alpha_m^{(k_m)}\right].$$

Твердження 2.5.

$$M_{G(x)L}(\varphi) = \left(M_{G(x)}(\varphi)\right)L, \tag{2.2}$$

де L *– довільна* $s \times k$ *-матриця над* $\mathbb{C}$.

Д о в е д е н н я. Співвідношення (2.2) випливає із означення 2.1 і зауваження, що

$$\begin{Vmatrix} G(\alpha_1)L \\ G'(\alpha_1)L \\ \ldots \\ G^{(k_1-1)}(\alpha_1)L \\ \ldots \\ \ldots \\ G(\alpha_m)L \\ G'(\alpha_m)L \\ \ldots \\ G^{(k_m-1)}(\alpha_m)L \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} G(\alpha_1) \\ G'(\alpha_1) \\ \ldots \\ G^{(k_1-1)}(\alpha_1) \\ \ldots \\ \ldots \\ G(\alpha_m) \\ G'(\alpha_m) \\ \ldots \\ G^{(k_m-1)}(\alpha_m) \end{Vmatrix} L.$$

Твердження 2.6.

$$M_{G_1(x)+G_2(x)}(\varphi) = M_{G_1(x)}(\varphi) + M_{G_2(x)}(\varphi).$$

Д о в е д е н н я випливає із означення матриці $M_{G(x)}(\varphi)$.

Твердження 2.7. *Наступні два твердження еквівалентні:*

1. $\operatorname{rang} M_{G(x)}(\varphi) \le k$;

2. *Існує така неособлива матриця* L *над* $\mathbb{C}$, *що матриця* $G(x)L$ *містить* $s-k$ *стовпців*, *усі елементи яких діляться на* $\varphi(x)$.

Доведення. Якщо правильна нерівність 1, то існує така неособлива матриця L над $\mathbb{C}$, що матриця $M_{G(x)}(\varphi)L$ містить принаймні $s-k$ нульових стовпців. Оскільки згідно з твердженням 2.5,

$$M_{G(x)}(\varphi)L = M_{G(x)L}(\varphi), \tag{2.3}$$

то, зважаючи на означення матриці $M_{G(x)L}(\varphi)$, робимо висновок, що матриця $G(x)L$ містить принаймні $s-k$ стовпців, усі елементи яких діляться на $\varphi(x)$. Якщо виконана умова 2, то $\operatorname{rang} M_{G(x)L}(\varphi) \le k$. Оскільки L – неособлива матриця над $\mathbb{C}$, то із співвідношення (2.3) випливає, що

$$\operatorname{rang} M_{G(x)}(\varphi) \le k.$$

Твердження 2.8. *Якщо* L *і* $R(x)$ *– оборотні матриці відповідно над* $\mathbb{C}$ *і* $\mathbb{C}[x]$, *то*

$$\operatorname{rang} M_{R(x)G(x)L}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{G(x)}(\varphi). \tag{2.4}$$

Доведення. Оскільки L – неособлива числова матриця, то, беручи до уваги твердження 2.5, маємо

$$\operatorname{rang} M_{R(x)G(x)L}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{R(x)G(x)}(\varphi). \tag{2.5}$$

Покажемо, що

$$\operatorname{rang} M_{R(x)G(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{G(x)}(\varphi).$$

Оскільки для похідної добутку двох поліноміальних матриць можна застосувати формулу Лейбніца

$$\left[R(x)G(x)\right]^{(n)} = R^{(n)}(x)G(x) + \binom{n}{1}R^{(n-1)}(x)G'(x) +$$

$$+\binom{n}{2}R^{(n-2)}(x)G''(x) + \ldots + \binom{n}{n-2}R''(x)G^{(n-2)}(x) +$$

$$+\binom{n}{n-1}R'(x)G^{(n-1)}(x) + R(x)G^{(n)}(x), \qquad (2.6)$$

то

$$M_{R(x)G(x)}(\varphi) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} R(\alpha_1)G(\alpha_1) \\ (R(\alpha_1)G(\alpha_1))' \\ \ldots \\ (R(\alpha_1)G(\alpha_1))^{(k_1-1)} \\ R(\alpha_2)G(\alpha_2) \\ (R(\alpha_2)G(\alpha_2))' \\ \ldots \\ (R(\alpha_2)G(\alpha_2))^{(k_2-1)} \\ \ldots \\ R(\alpha_m)G(\alpha_m) \\ (R(\alpha_m)G(\alpha_m))' \\ \ldots \\ (R(\alpha_m)G(\alpha_m))^{(k_m-1)} \end{matrix} \right\| =$$

$$
= \begin{Vmatrix} R_{k_1}(\alpha_1) & & & \mathbf{0} \\ & R_{k_2}(\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & R_{k_m}(\alpha_m) \end{Vmatrix} \times
$$

$$
\times \begin{Vmatrix} G(\alpha_1) \\ G'(\alpha_1) \\ \dots \\ G^{(k_1-1)}(\alpha_1) \\ G(\alpha_2) \\ G'(\alpha_2) \\ \dots \\ G^{(k_2-1)}(\alpha_2) \\ \dots \\ \\ G(\alpha_m) \\ G'(\alpha_m) \\ \dots \\ G^{(k_m-1)}(\alpha_m) \end{Vmatrix}, \qquad (2.7)
$$

де

$$
R_{k_i}(\alpha_i) = \begin{Vmatrix} R(\alpha_i) & & & \mathbf{0} \\ R'(\alpha_i) & R(\alpha_i) & & \\ \dots & \dots & & \\ R^{(k_i-1)}(\alpha_i) & \binom{k_i-1}{1} R^{(k_j-2)}(\alpha_i) & \dots & R(\alpha_i) \end{Vmatrix}.
$$

Оскільки матриці $R(\alpha_i)$ – неособливі, то блоки $R_{k_i}(\alpha_i)$ – оборотні числові матриці. Отже, лівий множник матричного добутку (2.7) – неособлива матриця над $\mathbb{C}$ і оскільки правим співмножником у співвідношенні (2.7) є матриця $M_{G(x)}(\varphi)$, то

$$\operatorname{rang} M_{R(x)G(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{G(x)}(\varphi),$$

що і треба було довести.

Твердження 2.9. *Якщо многочлени над* $\mathbb{C}$ $\varphi(x)$ *і* $\psi(x)$ – *взаємно прості, то*

$$M_{G(x)}(\varphi(x)\psi(x)) = \begin{Vmatrix} M_{G(x)}(\varphi) \\ M_{G(x)}(\psi) \end{Vmatrix}. \qquad (2.8)$$

Доведення безпосередньо випливає з означення матриці $G(x)$ на системі коренів многочлена $\varphi(x)\psi(x)$ і врахування порядку співмножників у добутку $\varphi(x)\psi(x)$.

Твердження 2.10. *Правильною є рівність*

$$\operatorname{rang} M_{G(x)\varphi(x)}(\varphi(x)\psi(x)) = \operatorname{rang} M_{G(x)}(\psi(x)). \qquad (2.9)$$

Доведення. Нехай

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\ldots(x-\alpha_m)^{k_m},$$

$$\psi(x) = (x-\alpha_1)^{l_1}(x-\alpha_2)^{l_2}\ldots(x-\alpha_m)^{l_m}\psi_l(x), \qquad l_i \geq 0.$$

Застосувавши до добутку $G(x)\varphi(x)$ формулу Лейбніца (2.6), одержимо:

$$\left[G(\alpha_i)\varphi(\alpha_i)\right]^{(j)} = 0, \quad j = 0,1,\ldots,k_i-1, \; i = 1,2,\ldots,m, \qquad (2.10)$$

де $\left[G(\alpha_i)\varphi(\alpha_i)\right]^{(j)}$ – значення j-ї похідної добутку $G(x)\varphi(x)$

при $x = \alpha_i$. Якщо многочлени $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ – взаємно прості, то, згідно з твердженням 2.9, застосувавши співвідношення (2.8) і врахувавши рівність (2.10), одержимо

$$M_{G(x)\varphi(x)}\big(\varphi(x)\psi(x)\big) = \begin{Vmatrix} \mathbf{0} \\ M_{G(x)}(\psi) \end{Vmatrix}, \qquad (2.11)$$

що, як легко бачити, доводить у цьому випадку наше твердження. Припустимо тепер, що многочлени $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ – не взаємно прості. Нехай α – спільний корінь цих многочленів, тобто

$$\varphi(x) = (x-\alpha)^k \varphi_1(x), \qquad \varphi_1(\alpha) \neq 0, \ \ k \geq 1,$$

$$\psi(x) = (x-\alpha)^l \psi_1(x), \qquad \psi_1(\alpha) \neq 0, \ \ l \geq 1.$$

Розглянемо матрицю

$$M_{G(x)\varphi(x)}\left[\alpha^{(k+l)}\right].$$

Оскільки, зважаючи на співвідношення

$$\left[G(\alpha)\varphi(\alpha)\right]^{(j)} = 0, \quad j = 0,1,\ldots,k-1$$

і

$$\begin{Vmatrix} \left[G(\alpha)\varphi(\alpha)\right]^{(k)} \\ \left[G(\alpha)\varphi(\alpha)\right]^{(k+1)} \\ \left[G(\alpha)\varphi(\alpha)\right]^{(k+2)} \\ \cdots \\ \left[G(\alpha)\varphi(\alpha)\right]^{(k+l-1)} \end{Vmatrix} = \Phi(\alpha) \begin{Vmatrix} G(\alpha) \\ G'(\alpha) \\ G''(\alpha) \\ \cdots \\ G^{(l-1)}(\alpha) \end{Vmatrix},$$

де

$$\Phi(\alpha)=$$

$$=\begin{Vmatrix} \Phi_k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \Phi_{k+1} & C_k^{k+1}\Phi_k & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \Phi_{k+2} & C_{k+1}^{k+2}\Phi_{k+1} & C_k^{k+2}\Phi_k & \ldots & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi_{k+l-1} & C_{k+l-2}^{k+l-1}\Phi_{k+l-2} & C_{k+l-3}^{k+l-1}\Phi_{k+l-3} & \ldots & C_k^{k+l-1}\Phi_k \end{Vmatrix},$$

$\Phi_h=\varphi^{(h)}(\alpha)E$, E – одинична матриця порядку s,

$C_{h-j}^{h}=\begin{pmatrix} h \\ h-j \end{pmatrix}$, $h=k,\ldots,k+l-1$, $j=0,1,\ldots,k-1$, матриця $\Phi(x)$ має, очевидно, порядок sl,

$$M_{G(x)\varphi(x)}\left[\alpha^{(k+l)}\right]=\begin{Vmatrix} \overbrace{\begin{matrix} E & & & \\ & E & & \\ & & \ddots & \\ & & & E \end{matrix}}^{k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi(\alpha) \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} \left.\begin{matrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{matrix}\right\} k \\ G(\alpha) \\ G'(\alpha) \\ \ldots \\ G^{(l-1)}(\alpha) \end{Vmatrix}.$$

Оскільки $\varphi^{(k)}(\alpha)\neq 0$, то лівий множник останнього співвідношення оборотна матриця над $\mathbb{C}$ і, отже,

$$\operatorname{rang} M_{G(x)\varphi(x)}\left[\alpha^{(k+l)}\right]=\operatorname{rang} M_{G(x)}\left[\alpha^{(l)}\right].$$

Аналогічно в загальному випадку, позначаючи через $F_{k_i+l_i}(\alpha_i)$ матрицю,

$$F_{k_i+l_i}\left(\alpha_i\right)=\left\|\begin{array}{cccc|c} E & & & & \\ & E & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & E & \\ \hline & & & & \Phi_{l_i}\left(\alpha_i\right) \end{array}\right\|,$$

де E – одинична матриця порядку s, $\Phi_{l_i}\left(\alpha_i\right)$ – матриця порядку sl_i вигляду

$$\left\|\begin{array}{cccc} \Phi_{k_i} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \Phi_{k_i+1} & \binom{k_i+1}{k_i}\Phi_{k_i} & \ldots & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Phi_{k_i+l_i-1} & \binom{k_i+l_i-1}{k_i+l_i-2}\Phi_{k_i+l_i-2} & \ldots & \binom{k_i+l_i-1}{k_i}\Phi_{k_i} \end{array}\right\|,$$

$\Phi_{h_i}=\varphi^{(h_i)}(\alpha_i)E$, $h_i=k_i,\ldots,k_i+l_i-1$, $i=1,2,\ldots,m$, одержимо

$$\left\|\begin{array}{ccccc} F_{k_1+l_1}(\alpha_1) & & & & \mathbf{0} \\ & F_{k_2+l_2}(\alpha_2) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & F_{k_m+l_m}(\alpha_m) & \\ \mathbf{0} & & & & E \end{array}\right\|\times$$

$$\times\left\|\begin{matrix} \mathbf{0} \\ M_{G(x)}\left[\alpha_1^{(l_1)}\right] \\ \mathbf{0} \\ M_{G(x)}\left[\alpha_2^{(l_2)}\right] \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ M_{G(x)}\left[\alpha_m^{(l_m)}\right] \\ M_{G(x)}\left(\psi_1(x)\right) \end{matrix}\right\|. \tag{2.12}$$

Оскільки лівий множник у співвідношенні (2.12) – оборотна матриця (матриця E, що стоїть в правому нижньому куті цієї матриці, – одинична матриця порядку рівного кількості рядків матриці $M_{G(x)}(\psi_1(x))$) то, зважаючи на твердження 2.9, із співвідношення одержимо

$$\operatorname{rang} M_{G(x)\varphi(x)}\left(\varphi(x)\psi(x)\right) = \operatorname{rang} M_{G(x)}\left(\psi(x)\right),$$

що треба було довести.

Одиничну матрицю порядку n будемо надалі позначати через E_n, хоча, як правило, індекс n будемо опускати. Більше того, якщо з контексту буде очевидно, який порядок одиничних матриць, що зустрічаються, будемо позначати їх однією і тією ж буквою E без явного виписування індексів.

Нагадаємо деякі елементарні відомості про властивості взаємної матриці A_* квадратної матриці A над комутативним кільцем з одиницею без дільників нуля. Нагадаємо, що

$$A_* = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & & A_{nn} \end{Vmatrix}^T,$$

де A_{ij} – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці $A = \|a_{ij}\|$, $i, j = 1, 2, \dots, n$; T – операція транспонування.

Твердження 2.11.

$$(AB)_* = B_* A_*.$$

Доведення випливає із правила множення асоційованих матриць ([5], § 4) і застосування операції транспонування до добутку двох матриць.

Твердження 2.12. *Якщо* $\operatorname{rang} A \le n-2$*, то* $A_* = \mathbf{0}$.

Доведення. В нашому випадку матриця A не містить відмінного від нуля мінора порядку $n-1$.

Твердження 2.13. *Якщо A – неособлива, то A_* – неособлива.*

Доведення випливає із співвідношення

$$AA_* = A_*A = E \det A \quad (\det A \ne 0).$$

Твердження 2.14. *Якщо A матриця над полем $\mathbb{C}$ і* $\operatorname{rang} A = n-1$*, то* $\operatorname{rang} A_* = 1$.

Доведення. Зведемо матрицю A за допомогою неособливих перетворень P і Q до вигляду

$$PAQ = \begin{Vmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{Vmatrix}.$$

Оскільки $\operatorname{rang} Q_* A_* P_* = 1$, то, враховуючи попереднє твердження, переконуємось у правильності твердження.

Твердження 2.15. *Якщо* $A(x)$ *– поліноміальна матриця над* $\mathbb{C}[x]$, *то* $A(\alpha)_* = A_*(\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Доведення очевидне.

2.3. Виділення лінійного множника з матричного многочлена

Розглянемо матричний многочлен вигляду

$$A(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + \cdots + A_{s-1} x + A_s, \qquad \deg \det A(x) > 0, \tag{2.13}$$

$s \geq 2$, A_i, $i = 0,1,\ldots,s$ – квадратні матриці порядку n з елементами із поля $\mathbb{C}$. Очевидно, матричний многочлен можна розглядати як поліноміальну матрицю над $\mathbb{C}[x]$.

Многочлен $\det A(x)$ називатимемо характеристичним многочленом поліноміальної матриці $A(x)$ і позначатимемо через $\Delta(x)$.

Доведемо такі леми.

Лема 2.1. *Нехай* $\mathbf{F}$ *– поле.* $N(x)$ *– поліноміальна* $m \times n$*-матриця,* $m \leq n$ *над* $\mathbf{F}[x]$. *Позначимо через* $\delta(x)$ *спільний найбільший дільник всіх мінорів* m*-го порядку матриці* $N(x)$. *Якщо* $d(x)$ *– довільний дільник многочлена* $\delta(x)$, *то існує така*

$m \times m$-матриця $D(x)$ над $\mathbf{F}[x]$, для якої $\det D(x) = d(x)$ *і яка є лівим дільником $N(x)$, тобто*

$$N(x) = D(x) N_1(x). \tag{2.13'}$$

Доведення. Для матриці $N(x)$ існують такі оборотні матриці $R(x)$ і $Q(x)$ над $\mathbf{F}[x]$ (див. 2.1), що

$$R(x)N(x)Q(x) = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1(x) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \varepsilon_m(x) \end{Vmatrix},$$

де $\varepsilon_i(x)$ ділить $\varepsilon_{i+1}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m-1$,

$$\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) \ldots \varepsilon_m(x) = \delta(x).$$

Оскільки в $\mathbf{F}[x]$ кожний елемент однозначно зображається у вигляді добутку простих многочленів, то із співвідношення $\delta(x) = d(x)$ випливає, що

$$R(x)N(x)Q(x) = D_1(x) \begin{Vmatrix} \varepsilon_1'(x) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \varepsilon_m'(x) \end{Vmatrix},$$

де $\det D_1(x) = d(x)$.

Зважаючи на останню рівність, маємо

$$N(x) = R^{-1}(x) D_1(x) \begin{Vmatrix} \varepsilon_1'(x) & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \varepsilon_m'(x) \end{Vmatrix} Q^{-1}(x).$$

Покладаючи $R^{-1}(x)D_1(x)=D(x)$, одержуємо потрібне співвідношення (2.13').

Із леми 2.1 безпосередньо випливає така лема.

Лема 2.2. *Нехай* $N(x)$ *– поліноміальна* $m\times n$*-матриця,* $m\le n$*, з елементами із* $\mathbf{F}[x]$*. Щоб мінори* m*-го порядку матриці* $N(x)$ *мали спільним найбільшим дільником многочлен* $d(x)$*, необхідно і достатньо, щоб правильним був розклад*

$$N(x)=D(x)N_1(x),$$

де $D(x)$ *– така* $m\times m$*-матриця над* $\mathbf{F}[x]$*, що* $\det D(x)=d(x)$.

Лема 2.3. *Нехай* $N(x)$ *– прямокутна матриця з елементами із* $\mathbb{C}[x]$ *розміру* $m\times n$*,* $m\le n$*. Припустимо, що для* $1\le i\le m$ *всі мінори порядку* $m-i$ *зрізаної матриці*

$$\begin{Vmatrix} a_{i+1,1}(x) & a_{i+1,2}(x) & \dots & a_{i+1,n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(x) & a_{m2}(x) & \dots & a_{mn}(x) \end{Vmatrix} \qquad (2.14)$$

діляться на $\varphi(x)$*, а всі мінори порядку* m *заданої матриці* $N(x)$ *– на* $\varphi(x)(x-\alpha)$*,* $\alpha\in\mathbb{C}$*. При цих припущеннях існує така неособлива матриця* S *над* $\mathbb{C}$*, що в матриці* $SN(x)$ *мінори порядку* $m-i+1$*, складені з останніх* $m-i+1$ *рядків матриці* $SN(x)$*, мають спільний дільник* $\varphi(x)(x-\alpha)$*. (При* $i=m$

матриця (2.14) *перетворюється в порожню матрицю і в цьому випадку ми вважаємо* $\varphi(x)=1$).

Д о в е д е н н я. Зважаючи на лему 2.1, маємо

$$N(x)=\left\|\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & D_{m-i}(x) \\ \mathbf{0} & & & \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{ccc} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}(x) & \dots & a_{in}(x) \\ a'_{i+1,1}(x) & \dots & a'_{i+1,n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1}(x) & \dots & a'_{mn}(x) \end{array}\right\|, \qquad (2.15)$$

де $\det D_{m-i}(x)=\varphi(x)$.

Позначимо другий співмножник у співвідношенні (2.15) через $N_1(x)$. Якщо рядки підматриці

$$\left\|\begin{array}{ccc} a'_{i+1,1}(x) & \dots & a'_{i+1,n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1}(x) & \dots & a'_{mn}(x) \end{array}\right\|$$

матриці $N_1(x)$ при $x=\alpha$ лінійно залежні, то все зрозуміло. Якщо ж це не так, то, оскільки α є коренем всіх мінорів m-го порядку матриці $N_1(x)$, існує така лінійна комбінація рядків матриці $N_1(x)$ з коефіцієнтами, скажімо $p_1, p_2, \dots, p_m$, що всі елементи цього рядка діляться на $x-\alpha$. Можна вважати, що $p_i \neq 0$, а отже, можна взяти $p_i=1$. Покладемо

$$R = \left\| \begin{matrix} 1 & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ p_1 & \dots & & 1 & & \dots & p_m \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & & & 1 \end{matrix} \right\|, \ p_j \in \mathbb{C}.$$

Тоді, згідно з співвідношенням (2.15), матимемо

$$N(x) = D(x)N_1(x) = D(x)R^{-1}RN_1(x) =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \\ \mathbf{0} & & 1 & & \\ -p_1 & \dots & 1 & \dots & -p_m \\ & & 0 & & \\ & & \vdots & D_{m-i}(x) & \\ \mathbf{0} & & 0 & & \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ (x-\alpha)a'_{i1}(x) & \dots & (x-\alpha)a'_{in}(x) \\ a'_{i+1,\,1}(x) & \dots & a'_{i+1,\,n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{m1}(x) & \dots & a'_{mn}(x) \end{matrix} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \\ \mathbf{0} & & 1 & & \\ -p_1 & \dots & x-\alpha & \dots & -p_m \\ & & 0 & & \\ & & \vdots & D_{m-i}(x) & \\ \mathbf{0} & & 0 & & \end{array} \right\| N_1'(x). \qquad (2.16')$$

Тепер легко бачити, що існує така неособлива числова матриця S, що

$$SN(x) = \left\| \begin{array}{ccccc} 1 & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & x-\alpha & \dots & -p_m \\ & & 0 & & \\ & & \vdots & D_{m-i}(x) & \\ \mathbf{0} & & 0 & & \end{array} \right\| N_1'(x). \qquad (2.16)$$

Враховуючи лему 2.2 і співвідношення (2.16), бачимо, що лема 2.3 доведена.

Зауваження. Із доведення леми 2.3 випливає, що, якщо α не є коренем спільного найбільшого дільника мінорів, складених із останніх $m-i$ рядків матриці $N_1(x)$, то матрицю $SN(x)$ можна зобразити у вигляді

$$SN(x) = \begin{Vmatrix} 1 & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & x-\alpha & \dots & -p_m \\ & & & 0 & & \\ & & & \vdots & D_{m-i}(x) & \\ \mathbf{0} & & & 0 & & \end{Vmatrix} N_1(x),$$

де $D_{m-i}(x)$ – матриця у співвідношенні (2.15).

Лема 2.4. *Нехай визначник* $\det A(x)$ *поліноміальної матриці* $A(x)$ *ділиться на многочлен* $\varphi(x)$ *степеня* $k \le n$. *Тоді існує така неособлива матриця* S *над* $\mathbb{C}$, *що*

$$SA(x) = \begin{Vmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_k(x) \end{Vmatrix} A_1(x),$$

де $D_k(x)$ *– поліноміальна матриця порядку* $\le k$ *з визначником* $\det D_k(x) = \varphi(x)$.

Доведення легко проводиться послідовним застосуванням леми 2.3.

Твердження 2.16. *Нехай* $A(x)$ *– квадратна поліноміальна матриця порядку* n *над* $\mathbb{C}[x]$, $\deg \det A(x) > 0$. *Якщо* $\varphi(x)$ *– дільник визначника* $\Delta(x) = \det A(x)$ *і* $\deg \varphi(x) = k \le n$, *то* $\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) \le k$.

Доведення. Оскільки многочлен $\varphi(x)$ має k коренів (з врахуванням кратності), то, зважаючи на лему 2.4 легко переконатись в існуванні такої оборотної матриці S над $\mathbb{C}$, що

$$SA(x) = \begin{Vmatrix} 1 & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & F(x) \end{Vmatrix} A_1(x), \qquad (2.17)$$

де підматриця $F(x)$ має порядок $\le k$ і $\det F(x) = \varphi(x)$.

Переходячи у співвідношенні (2.17) до взаємних матриць і використовуючи твердження 2.11, будемо мати

$$A_*(x)S_* = A_{1*}(x) \begin{Vmatrix} \varphi(x) & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & \varphi(x) & \\ \mathbf{0} & & & F_*(x) \end{Vmatrix}. \qquad (2.18)$$

Із співвідношення (2.18) видно, що матриця $A_*(x)S_*$ містить $n-k$ стовпців, всі елементи яких діляться на $\varphi(x)$, звідки на основі твердження 2.7 робимо висновок, що

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)S_*}(\varphi) \le k.$$

Оскільки S_* – неособлива матриця (твердження 2.13), то, використовуючи твердження 2.5, одержуємо

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) \le k,$$

що треба було довести.

Теорема 2.1. *Нехай $\varphi(x)$ – унітальний дільник визначника $\det A(x)$ і $\deg \varphi(x) = k \le n$. Якщо $\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = k$, то існує така неособлива матриця R над $\mathbb{C}$, що*

$$RA(x) = \begin{Vmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Ex - B \end{Vmatrix} D(x),$$

де $\det(Ex - B) = \varphi(x)$.

Доведення. Нехай

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_k)$$

(корені $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ не обов'язково різні). Згідно з лемою 2.3, застосованою для випадку $i = n = m$, існує така неособлива матриця R_1 над $\mathbb{C}$, що

$$R_1 A(x) = \begin{Vmatrix} 1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & x - \alpha_1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1}(x) & \ldots & a_{n-1,n}(x) \\ a'_{n1}(x) & \ldots & a'_{nn}(x) \end{Vmatrix} = B_1(x) A_1(x).$$

Покажемо, що жоден корінь многочлена $\dfrac{\varphi(x)}{x - \alpha_1}$ не перетворює в нуль останній рядок матриці $A_1(x)$. Справді, якщо б це було не так, то, застосовуючи послідовно до матриці $R_1 A(x)$ лему 2.3, ми переконались би в існуванні такої неособливої матриці S_1 над $\mathbb{C}$, що алгебраїчні доповнення всіх елементів перших $n - k + 1$ рядків матриці $S_1 R_1 A(x)$ ділились би на многочлен $\varphi(x)$. Але тоді її взаємна матриця

$$[S_1 R_1 A(x)]_* = A_*(x) R_{1*} S_{1*}$$

(див. твердження 2.11) містила б принаймні $n - k + 1$ стовпців, всі елементи яких діляться на $\varphi(x)$. Згідно з твердженням 2.7 ми отримали б, що $\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) \le k - 1$, що суперечить припущенню.

Згідно з зауваженням до леми 2.3, існує така неособлива матриця R_2 над $\mathbb{C}$, що

$$R_2R_1A(x) = \left\| \begin{matrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & x-\alpha_2 & p \\ \mathbf{0} & & & 0 & x-\alpha_1 \end{matrix} \right\| A_2(x), \; p \in \mathbb{C}.$$

Міркуючи, як і вище, констатуємо, що всі мінори другого порядку, складені з елементів останніх двох рядків матриці $A_2(x)$, не перетворюються одночасно в нуль жодним коренем многочлена $\dfrac{\varphi(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}$, в протилежному випадку, застосовуючи послідовно лему 2.3 до матриці $R_2R_1A(x)$ ми, як і вище, прийшли б, використовуючи твердження 2.7, до суперечності з умовою теореми.

Продовжуючи аналогічні міркування, ми на k-му кроці побудуємо такі неособливі матриці $R_1, R_2, \ldots, R_k$ над $\mathbb{C}$, що

$$R_k \ldots R_2R_1A(x) = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} 1 & & & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ \hline & & & x-\alpha_k & & & * \\ & & & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{0} & & x-\alpha_2 & \\ \mathbf{0} & & & & & & x-\alpha_1 \end{array} \right\| A_k(x),$$

де у верхньому куті виділеного блока порядку k (відміченого зірочкою) знаходяться деякі елементи з $\mathbb{C}$. Теорему 2.1, таким чином, доведено.

Із теореми 2.1 як наслідок (при $k = n$) випливає такий важливий для нас результат про виділення лінійного множника.

Теорема 2.2. *Нехай* $\varphi(x)$ *– унітальний дільник степеня* n *визначника* $\Delta(x) = \det A(x)$ *поліноміальної матриці* $A(x)$. *Якщо*

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = n,$$

то

$$A(x) = (Ex - B)D(x)$$

і

$$\det(Ex - B) = \varphi(x).$$

Доведення. Згідно з теоремою 2.1, існує така неособлива матриця R над $\mathbb{C}$, що

$$RA(x) = (Ex - B_1)D_1(x).$$

Покладаючи $B = R^{-1}B_1R$ і $D(x) = R^{-1}D_1(x)$, одержуємо бажаний розклад.

2.4. Необхідність умов виділення лінійного множника

Теореми 2.1 і 2.2 дають достатні умови виділення лінійного множника (регулярного в теоремі 2.2.) з поліноміальної матриці. Нашою найближчою метою є виявлення тих дільників $\varphi(x)$ визначника $\Delta(x) = \det A(x)$, для яких знайдені нами достатні умови були б також і необхідними.

Лема 2.5. *Нехай існує така неособлива матриця* R *над* $\mathbb{C}$, *що*

$$RA(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F(x) \end{Vmatrix} D(x), \qquad (2.19)$$

де $F(x) = Ex - B$ *– матриця порядку* $k \le n$. *Якщо многочлени* $\varphi(x) = \det F(x)$ *і* $\det D(x)$ *– взаємно прості, то ранг значення матриці* $A_*(x)$ *на системі коренів многочлена* $\det F(x)$ *дорівнює* k.

Д о в е д е н н я . Нехай

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \cdots (x - \alpha_m)^{k_m}, \; k_1 + \cdots + k_m = k,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – попарно різні.

Згідно з твердженням 2.11, із співвідношення (2.19) випливає

$$A_*(x) R_* = D_*(x) \begin{Vmatrix} E_{n-k}\varphi(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_*(x) \end{Vmatrix}, \qquad (2.20)$$

$F_*(x)$ – взаємна матриця матриці $F(x)$.

Правий множник співвідношення (2.20) містить $n-k$ стовпців, всі елементи яких діляться на $\varphi(x)$. Це ж саме буде правильним і для матриці $A_*(x)R_*$. Таким чином, згідно з твердженням 2.7, ранг матриці $M_{A_*(x)R_*}(\varphi)$ не перевершує k, а отже (див. твердження 2.5),

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) \le k. \qquad (2.21)$$

Якщо б остання нерівність була строга, то, згідно з твердженням 2.7, це означало б, що існує така неособлива матриця Q над $\mathbb{C}$, що матриця $A_*(x)R_*Q$ містила б щонайменше $n-k+1$ стовпців, усі елементи яких діляться на многочлен $\varphi(x)$. Помноживши праву частину співвідношення (2.20) справа на Q і зліва на $D(x)$ і враховуючи взаємну простоту многочленів $\varphi(x)$ і $\det D(x)$, ми прийшли б до висновку, що матриця

$$\left\| \begin{matrix} E_{n-k}\varphi(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_*(x) \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} E_{n-k}\varphi(x)Q_{11} & E_{n-k}\varphi(x)Q_{12} \\ F_*(x)Q_{21} & F_*(x)Q_{22} \end{matrix} \right\|, \quad (2.22)$$

де

$$\left\| \begin{matrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{matrix} \right\| = Q,$$

містить $n-k+1$ стовпців, всі елементи яких діляться на $\varphi(x)$. Це означало б, що підматриця

$$\left\| F_*(x)Q_{21} \quad F_*(x)Q_{22} \right\| = F_*(x) \left\| Q_{21} \quad Q_{22} \right\|$$

матриці (2.22) містить $n-k+1$ стовпців, всі елементи яких діляться на $\varphi(x)$. Оскільки $\deg F_*(x) = k-1$ і $F_*(x)$ – регулярний, то матриця $F_*(x)\left\| Q_{21} \quad Q_{22} \right\|$ може містити $n-k+1$ стовпців, всі елементи яких діляться на многочлен k-го степеня $\varphi(x)$ лише в тому випадку, коли матриця $\left\| Q_{21} \quad Q_{22} \right\|$ містить $n-k+1$ нульових стовпців, що суперечить оборотності матриці Q. Одержана суперечність свідчить про те, що в нерівності (2.21) дійсно має місце знак рівності, що і доводить лему.

Доведена нами лема 2.5 виявляє певний клас дільників $\varphi(x)$ характеристичного многочлена $\Delta(x) = \det A(x)$, для яких достатні умови, вказані в теоремах 2.1 і 2.2, є також необхідними.

Сформулюємо в повному вигляді одержані нами результати.

Теорема 2.3. *Нехай* $\varphi(x)$ *– дільник* $\Delta(x)$ *і*

$$\deg \varphi(x) = k \leq n .$$

Щоб існувала така оборотна матриця R *над* $\mathbb{C}$*, що*

$$RA(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Ex - B \end{Vmatrix} D(x) ,$$

де $\det(Ex - B) = \varphi(x)$*, причому многочлени* $\varphi(x)$ *і* $\det D(x)$ *– взаємно прості, необхідно і достатньо, щоб*

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = k .$$

Теорема 2.4. *Нехай* $\varphi(x)$ *– дільник степеня* n *характеристичного многочлена* $\Delta(x) = \det A(x)$ *поліноміальної матриці* $A(x)$*, тобто*

$$\Delta(x) = \varphi(x)\Phi(x) .$$

Якщо многочлени $\varphi(x)$ *і* $\Phi(x)$ *– взаємно прості, то для існування розкладу*

$$A(x) = (Ex - B)D(x) ,$$

де $\det(Ex - B) = \varphi(x)$*, необхідно і достатньо, щоб*

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = n .$$

Подальше викладення має на меті розширити клас дільників $\varphi(x)$, для яких правильні теореми 2.3 і 2.4.

Введемо для поліноміальної матриці $A(x)$ в розгляд матрицю

$$A_1(x) = A_*(x) \begin{Vmatrix} E & Ex \end{Vmatrix} .$$

Лема 2.6. *Якщо існує така неособлива матриця* R *над* $\mathbb{C}$*, що*

$$RA(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F(x) \end{Vmatrix} D(x), \qquad (2.23)$$

де $F(x) = Ex - B$ *– матриця порядку* $k \le n$, *то*

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{A_1(x)}(\varphi),$$

де $\varphi(x) = \det F(x)$.

Доведення. Нехай

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1} \cdots (x-\alpha_m)^{k_m}.$$

Згідно з твердженням 2.11, взаємна матриця матриці (2.23) має вигляд

$$A_*(x)R_* = D_*(x) \begin{Vmatrix} E_{n-k}\varphi(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_*(x) \end{Vmatrix}. \qquad (2.24)$$

Помноживши останнє співвідношення на матрицю

$$\begin{Vmatrix} E_{n-k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F(x) \end{Vmatrix},$$

одержимо

$$A_*(x)R_*x \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_k \end{Vmatrix} - A_*(x)R_* \begin{Vmatrix} -E_{n-k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{Vmatrix} = D_*(x)\varphi(x). \qquad (2.25)$$

Використовуючи формулу (2.1), перейдемо від рівності (2.25) до значень на системі коренів многочлена $\varphi(x)$ (вважаючи порядок розміщення коренів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ зафіксованим), одержимо

$$M_{A_*(x)R_*x}(\varphi) \begin{Vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E_k \end{Vmatrix} = M_{A_*(x)R_*}(\varphi) \begin{Vmatrix} -E_{n-k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B \end{Vmatrix}.$$

Оскільки, згідно з формулою (2.23), всі елементи перших $n-k$ стовпців матриці $A_*(x)R_*$ діляться на $\varphi(x)$, то перші $n-k$ стовпців матриць $M_{A_*(x)R_*x}(\varphi)$ і $M_{A_*(x)R_*}(\varphi)$ дорівнюють нулеві. Отже,

$$M_{A_*(x)R_*x}(\varphi)\begin{Vmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & E_k\end{Vmatrix} = M_{A_*(x)R_*x}(\varphi)\,, \tag{2.26}$$

а це означає, що рівність (2.25) можна переписати у вигляді

$$M_{A_*(x)R_*x}(\varphi) = M_{A_*(x)R_*}(\varphi)\begin{Vmatrix}-E_{n-k} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & B\end{Vmatrix}.$$

Це значить, що матричне рівняння

$$M_{A_*(x)R_*}(\varphi)X = M_{A_*(x)R_*x}(\varphi)$$

відносно невідомої $n\times n$-матриці X має розв'язок над полем $\mathbb{C}$. Скориставшись твердженнями 2.3 і 2.5 одержимо

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = \operatorname{rang}\begin{Vmatrix}M_{A_*(x)}(\varphi) & M_{A_*(x)x}(\varphi)\end{Vmatrix}$$

або

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{A_1(x)}(\varphi)\,.$$

Лема 2.6 доведена.

Із леми 2.6 як наслідок при $k=n$ одержуємо такий важливий для подальшого результат.

Теорема 2.5. *Якщо для поліноміальної матриці $A(x)$ має місце розклад*

$$A(x) = (Ex-B)D(x)\,,$$

то

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{A_1(x)}(\varphi), \tag{2.27}$$

де

$$\varphi(x) = \det(Ex - B).$$

Теорема 2.5 дає нам необхідну умову виділення із поліноміальної матриці регулярного лінійного множника.

Лема 2.7. *Нехай задана пара матриць*

$$Q = \begin{Vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_k \end{Vmatrix}, \qquad \hat{Q} = \begin{Vmatrix} B_1 & \mathbf{0} \\ B_2 & B_1 \\ B_3 & 2B_2 \\ \dots & \dots \\ B_k & (k-1)B_{k-1} \end{Vmatrix},$$

$k \le n$, B_i $(i = 1, 2, \dots, k)$ – *довільні матриці порядку* n *над* $\mathbb{C}$.

Якщо

$$\operatorname{rang} B_1 = 1, \qquad \operatorname{rang} Q = \operatorname{rang} \hat{Q}, \tag{2.28}$$

то

$$\operatorname{rang} Q \ge k.$$

Доведення проводиться індукцією по k. Позначимо через Q_0 і $\hat{Q}_0$ матриці, які утворюються із Q і $\hat{Q}$ відкиненням нижнього блоку B_k і $\|B_k \quad (k-1)B_{k-1}\|$ відповідно. З умови $\operatorname{rang} Q = \operatorname{rang} \hat{Q}$ випливає, що $\operatorname{rang} Q_0 = \operatorname{rang} \hat{Q}_0$. Тому, згідно з індуктивним припущенням, $\operatorname{rang} Q_0 \ge k - 1$. Звідси, враховуючи вигляд матриці $\hat{Q}$ і той факт, що $\operatorname{rang} B_1 = 1$, робимо висновок, що $\operatorname{rang} \hat{Q} \ge (k-1) + 1$. Враховуючи рівність (2.28), бачимо, що лема 2.7 доведена.

Для зручності подальшого викладення введемо такі позначення. Через $K = K_\Delta$ позначимо множину всіх коренів многочлена $\Delta(x) = \det A(x)$ (без врахування кратності) і через K_i – множину, тих коренів $\alpha \in K$, для яких $\operatorname{rang} A(\alpha) = i$. Отже,

$$K = K_0 \cup K_1 \cup \ldots \cup K_{n-1}.$$

(очевидно, що деякі підмножини K_i можуть бути порожні).

Для кожного дільника $\varphi(x)$ характеристичного многочлена $\Delta(x)$ через K_φ позначаємо множину всіх коренів многочлена $\varphi(x)$ (без врахування кратності).

Лема 2.8. *Нехай для матричного многочлена $A(x)$ існує така оборотна матриця R над $\mathbb{C}$, що*

$$RA(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F(x) \end{Vmatrix} D(x), \tag{2.29}$$

де $F(x) = E_k x - B$ – матриця порядку $k \le n$.

Покладемо

$$\varphi(x) = \det F(x), \qquad \Phi(x) = \det D(x).$$

Якщо $K_\varphi \cap K_\Phi \subset K_{n-1}$, то

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = k.$$

Доведення. Покладемо

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \cdots (x-\alpha_m)^{k_m},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – попарно різні. Очевидно, що

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = k.$$

Без обмеження загальності можна вважати, що матриця B має вигляд

$$B = \begin{Vmatrix} B_1 & & & \mathbf{0} \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & B_m \end{Vmatrix},$$

де для діагональних кліток B_i характеристичний многочлен дорівнює

$$\det(Ex - B_i) = (x - \alpha_i)^{k_i} = \varphi_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, m .$$

Тоді, з урахуванням рівності (2.20), взаємна матриця $A_*(x)R_*$ матриці $RA(x)$ (див. твердження 2.11) буде мати вигляд

$$A_*(x)R_* = D_*(x)\begin{Vmatrix} E\varphi(x) & & & \mathbf{0} \\ & F_{1*}(x)\dfrac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & F_{m*}(x)\dfrac{\varphi(x)}{\varphi_m(x)} \end{Vmatrix}, \quad (2.30)$$

де $F_{i*}(x)$ – взаємна матриця для $F_i(x) = E_{k_i}x - B_i$.

Маємо

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{A_*(x)R_*}(\varphi) .$$

Повернемось до процесу побудови матриці $M_{A_*(x)R_*}(\varphi)$. При підстановці кореня α_i в матрицю $A_*(x)R_*$ і її похідні до $k_i - 1$ -го порядку будемо отримувати блоки, в яких ненульові блоки будуть знаходитись тільки в єдиній вертикальній смузі, в якій розміщений блок $F_{i*}(x)\dfrac{\varphi(x)}{\varphi_i(x)}$ (в першій смузі, в якій знаходиться $E\varphi(x)$, при всіх α_i будуть стояти нулі). Оскільки ненульові блоки у вертикальних смугах розміщені в різних горизонтальних смугах (що відповідають різним кореням α_i), маємо рівність

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)R_*}(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \operatorname{rang} M_{A_*(x)R_*}(\varphi_i) . \qquad (2.31)$$

Для доведення леми 2.8 залишилось показати, що для кожного $i = 1, 2, \ldots, m$ ранг матриці $M_{A_*(x)}(\varphi_i)$ дорівнює k_i.

Матриця $F(x)$ є клітково-діагональною матрицею з клітками $F_i(x) = E_k x - B_i$ по головній діагоналі. Фіксуємо індекс i $(1 \le i \le m)$ і в рівності (2.29) віднесемо всі клітки $F_j(x)$ для $j \ne i$ до матриці $D(x)$. Тоді знайдемо таку оборотну матрицю R_i над $\mathbb{C}$, що

$$R_i R A(x) = \begin{Vmatrix} E_{n-k_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_i(x) \end{Vmatrix} D_i(x) . \qquad (2.32)$$

Якщо α_i не є коренем многочлена $\det D(x)$, то можемо застосувати до рівності (2.32) лему 2.5. Згідно з цією лемою, маємо

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi_i) = k_i .$$

Якщо ж α_i, будучи коренем $\varphi(x)$, є одночасно коренем многочлена $\det D(x)$, то, згідно з умовою $\alpha_i \in K_{n-1}$, а значить, $\operatorname{rang} A_*(\alpha_i) = 1$ (див. твердження 2.14). Скористаємось лемою 2.6. Застосовуючи цю лему до рівності (2.32), одержимо формулу

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi_i) = M_{A_1(x)}(\varphi_i)\,.$$

Випишемо явно матриці $M_{A_*(x)}(\varphi_i)$, $M_{A_1(x)}(\varphi_i)$:

$$M_{A_*(x)}(\varphi_i) = \begin{Vmatrix} A_*(\alpha_i) \\ A_*'(\alpha_i) \\ \dots \\ A_*^{(k_i-1)}(\alpha_i) \end{Vmatrix},$$

$$M_{A_1(x)}(\varphi_i) = \begin{Vmatrix} A_*(\alpha_i) & \alpha_i A_*(\alpha_i) + 0 \\ A_*'(\alpha_i) & \alpha_i A_*'(\alpha_i) + A_*'(\alpha_i) \\ A_*''(\alpha_i) & \alpha_i A_*''(\alpha_i) + 2A_*'(\alpha_i) \\ \dots & \dots \\ A_*^{(k_i-1)}(\alpha_i) & \alpha_i A_*^{(k_i-1)}(\alpha_i) + (k_i-1)A_*^{(k_i-2)}(\alpha_i) \end{Vmatrix}.$$

Перші доданки другої вертикальної смуги в матриці $M_{A_1(x)}(\varphi_i)$ ми можемо забрати, не змінюючи рангу цієї матриці. Застосуємо до матриці $M_{A_*(x)}(\varphi_i)$ і перетвореної щойно вказаним способом матриці $M_{A_1(x)}(\varphi_i)$ лему 2.7. Це можна зробити, оскільки $\operatorname{rang} M(\alpha_i) = 1$.

Застосування цієї леми дає рівність

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)R_*}(\varphi_i) = \operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi_i) \ge k_i\,.$$

З другого боку, формула (2.30) свідчить про те, що в матриці $M_{A_*(x)}R_*$ лише одна вертикальна смуга, що складається із k_i стовпців, може містити ненульові елементи. Отже, маємо рівність

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi_i) = k_i\,,$$

а це, як зазначалось (див.формулу (2.31)), і доводить лему 2.8.

Теорема 2.6. *Нехай характеристичний многочлен* $\Delta(x)$ *матричного многочлена* $A(x)$ *зображено у вигляді*

$$\Delta(x) = \varphi(x)\Phi(x),$$

де $\varphi(x)$ *– унітальний многочлен степеня* $k \le n$*, причому*

$$K_{\varphi} \cap K_{\Phi} \subset K_{n-1}.$$

Щоб існувала така оборотна матриця R *над* $\mathbb{C}$*, що*

$$RA(x) = \left\| \begin{matrix} E_{n-k} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F(x) \end{matrix} \right\| D(x),$$

де $F(x) = Ex - B$ *– матриця порядку* k*, причому* $\det F(x) = \varphi(x)$*, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці* $A_{*}(x)$ *на системі коренів многочлена* $\varphi(x)$ *дорівнював* k*.*

Д о в е д е н н я випливає з теореми 2.3 і леми 2.8.

Окремим випадком теореми 2.6 є таке твердження.

Теорема 2.7. *Нехай характеристичний многочлен* $\Delta(x)$ *матричного многочлена* $A(x)$ *зображено у вигляді*

$$\Delta(x) = \varphi(x)\Phi(x), \tag{2.33}$$

де $\varphi(x)$ *– унітальний многочлен степеня* n*, причому*

$$K_{\varphi} \cap K_{\Phi} \subset K_{n-1}.$$

Щоб матричний многочлен $A(x)$ *можна було зобразити у вигляді*

$$A(x) = (Ex - B)D(x),$$

де лінійний множник має визначник

$$\det(Ex - B) = \varphi(x),$$

необхідно і достатньо, щоб ранг значення матриці $A_*(x)$ *на системі коренів многочлена* $\varphi(x)$ *дорівнював* n.

Наслідок 2.1. *Якщо характеристичний многочлен матричного многочлена* $A(x)$ *зображено у вигляді* (2.33), *причому многочлени* $\varphi(x)$ *і* $\Phi(x)$ *– взаємно прості, то для існування для матричного многочлена* $A(x)$ *розкладу вигляду*

$$A(x) = (Ex - B)D(x)$$

такого, що

$$\det(Ex - B) = \varphi(x),$$

необхідно і достатньо, щоб ранг значення матриці $A_*(x)$ *на системі коренів многочлена* $\varphi(x)$ *дорівнював* n.

2.5. Матричне многочленне рівняння

Як зазначалось, наявність для матричного многочлена

$$A(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \cdots + A_{m-1}x + A_m \tag{2.34}$$

розкладу

$$A(x) = (Ex - B)D(x) \tag{2.35}$$

рівносильна існуванню розв'язку $X = B$ для матричного рівняння

$$X^m A_0 + X^{m-1}A_1 + \ldots + XA_{m-1} + A_m = 0. \tag{2.36}$$

Отже, ефективна побудова розкладів вигляду (2.35) дає нам також спосіб ефективної побудови розв'язків матричного рівняння (2.36).

Припустимо, що для поліноміальної матриці $A(x)$ і унітального дільника $\varphi(x)$ степеня n її характеристичного многочлена $\Delta(x)$ виконуються умови теореми 2.4, тобто ранг значень взаємної матриці $A_*(x)$ на системі коренів многочлена $\varphi(x)$ дорівнює n, а тому для $A(x)$ правильним є розклад (2.35), причому

$$\det(Ex - B) = \varphi(x).$$

Перейдемо в рівності (2.35) до взаємних матриць

$$A_*(x) = D_*(x)(Ex - B)_*. \tag{2.37}$$

Помноживши співвідношення (2.37) справа на $Ex - B$, одержимо

$$A_*(x)x - A_*(x)B = D_*(x)\varphi(x). \tag{2.38}$$

Фіксуємо для $\varphi(x)$ канонічний розклад на лінійні множники:

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \cdots (x - \alpha_m)^{k_m},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – попарно різні.

Нижче при побудові значень поліноміальних матриць на системі коренів многочлена $\varphi(x)$ ми без додаткових застережень будемо припускати, що мається на увазі власне це фіксоване розміщення коренів. Іншими словами, під $M_{G(x)}(\varphi)$ розуміється

$$M_{G(x)}[\alpha_1^{k_1}, \alpha_2^{k_2}, \ldots, \alpha_m^{k_m}].$$

Використовуючи формули (2.1), (2.2), із рівності (2.38) знаходимо

$$M_{A_*(x)}(\varphi)B = M_{xA_*(x)}(\varphi). \tag{2.39}$$

Оскільки за умовою ранг матриці $M_{A_*(x)}(\varphi)$ дорівнює n, то матриця B рівністю визначається однозначно і її фактичне знаходження зводиться до розв'язання лінійного матричного рівняння. При цьому існування розв'язку забезпечено теоремою 2.4.

Сформулюємо одержані нами результати.

Теорема 2.8. *Нехай для поліноміальної матриці* $A(x)$ *і для її унітального дільника* $\varphi(x)$ *степеня* n *її характеристичного многочлена* $\Delta(x)$ *виконується умова*

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = n. \tag{2.40}$$

Тоді матриця B *в розкладі*

$$A(x) = (Ex - B)D(x),$$

для якої

$$\det(Ex - B) = \varphi(x),$$

єдина і може бути знайдена як розв'язок лінійного матричного рівняння

$$M_{A_*(x)}(\varphi)X = M_{xA_*(x)}(\varphi). \tag{2.41}$$

У термінах матричного рівняння (2.36) теорему 2.8 можна переформулювати у такий спосіб.

Теорема 2.9. *Якщо для поліноміальної матриці* (2.34) *і для унітального дільника* $\varphi(x)$ *степеня* n *многочлена* $\det A(x)$ *виконується умова* (2.40), *то матричне рівняння* (*2.36*) *має єдиний розв'язок* $X = B$, *для якого*

$$\det(Ex - B) = \varphi(x),$$

і цей розв'язок можна знайти як розв'язок рівняння (2.41).

Наслідок 2.2. *Нехай для характеристичного многочлена* $\Delta(x)$ *поліноміальної матриці* (2.34) *фіксовано розклад*

$$\Delta(x) = \varphi(x)\Phi(x),$$

де $\varphi(x)$ *– унітальний многочлен степеня* n, *для якого виконується умова*

$$K_{\varphi} \cap K_{\Phi} \subset K_{n-1}.$$

Якщо для рівняння (2.36) *існує розв'язок з характеристичним многочленом* $\varphi(x)$, *то такий розв'язок єдиний.*

Справді, існування розв'язку з поданим $\varphi(x)$ забезпечує для цього $\varphi(x)$ виконання умови (2.40) (теорема 2.7) і ми можемо застосувати теорему 2.9.

Наслідок 2.3. *Якщо характеристичний многочлен* $\Delta(x) = \det A(x)$ *має лише прості корені, то для кожного його унітального дільника* $\varphi(x)$ *існує не більше одного розв'язку* $X = B$ *матричного рівняння* (2.36) *з характеристичним многочленом*

$$\varphi(x) = \det(Ex - B).$$

Лема 2.9. *Якщо для характеристичного матричного многочлена* $A(x)$, *який будемо називати також характеристичною поліноміальною матрицею матричного рівняння* (2.36) (*або рівняння* $A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \cdots + A_{m-1} X + A_m = 0$), *перші інваріантні множники* (*див.* 2.1) *дорівнюють одиниці, тобто*

$$\varepsilon_1(x) = \varepsilon_2(x) = \ldots = \varepsilon_{n-1}(x) = 1,$$

то $\operatorname{rang} A(\alpha) = n - 1$ *для довільного кореня* α *многочлена*

$$\Delta(x) = \det A(x).$$

Доведення. Для $A(x)$ існують такі оборотні матриці $R(x)$ і $Q(x)$ над $\mathbb{C}[x]$, що

$$R(x)A(x)Q(x) = \left\| \begin{matrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ \mathbf{0} & & & & \varepsilon_n(x) \end{matrix} \right\|.$$

Оскільки $R(\alpha)$ і $Q(\alpha)$ – оборотні матриці, то, згідно із попереднім співвідношенням, маємо

$$\operatorname{rang} A(\alpha) = \operatorname{rang}(R(\alpha)A(\alpha)Q(\alpha)) = n-1$$

для довільного кореня α многочлена $\det A(x)$.

Оскільки кожний ненульовий многочлен має лише скінченну кількість унітальних дільників, то, враховуючи наслідок 2.2 і наведену щойно лему, одержуємо такий результат.

Теорема 2.10. *Якщо всі елементарні дільники характеристичної матриці* $A(x)$ *матричного рівняння* (2.36) *попарно прості* (*тобто* $\varepsilon_1(x) = \ldots = \varepsilon_{n-1}(x) = 1$), *то рівняння* (2.36) *має лише скінченну кількість розв'язків.*

З теореми 2.10 випливає така теорема.

Теорема 2.11. *Якщо характеристичний многочлен* $\Delta(x)$ *характеристичної матриці матричного рівняння* (2.36) *не має кратних коренів, то матричне рівняння* (2.36) *має лише скінченну кількість розв'язків.*

Зауваження. Розв'язання матричного рівняння вигляду

$$A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \cdots + A_{m-1} X + A_m = 0$$

еквівалентне зображенню матричного многочлена $A(x)$ у вигляді

$$A(x) = D_1(x)(Ex - B).$$

Очевидно, ці “праві” питання зводяться до розглянутого нами випадку виділення лівих лінійних множників за допомогою операції транспонування матриць.

Зауваження. В теоремі 2.10 припущення про взаємну простоту елементарних дільників істотне, тобто без нього теорема перестає бути правильною.

Наведемо приклад. Для матриці

$$A(x) = \begin{Vmatrix} x^2 - x & 0 \\ 0 & x^2 - 2x \end{Vmatrix}$$

елементарні дільники дорівнюють

$$x,\ x,\ x-1,\ x-2.$$

Для $\varphi(x) = x(x-1)$ маємо розклад

$$A(x) = \left(Ex - \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 0 \end{Vmatrix} \right) \left(Ex - \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ -\xi & 2 \end{Vmatrix} \right)$$

з довільним ξ. Таким чином, розкладів поліноміальної матриці $A(x)$ і коренів відповідних матричних рівнянь – нескінченно багато.

2.6. Розклад регулярного матричного многочлена на лінійні множники

Тут обмежимося розглядом тільки регулярних матричних многочленів і при деяких обмеженнях сформулюємо умови розкладності їх на лінійні регулярні множники. Не зменшуючи загальності, ми можемо, зрозуміло, припускати многочлени, що розглядаються, унітальними.

Отже, нехай нам заданий унітальний матричний многочлен

$$A(x) = Ex^s + A_1 x^{s-1} + \cdots + A_{s-1}x + A_s, \qquad (2.42)$$

де $A_1, A_2, \ldots, A_s$ – довільні матриці порядку n над полем $\mathbb{C}$.

Ставиться питання про існування для $A(x)$ розкладу вигляду

$$A(x) = (Ex - B_1)(Ex - B_2)\ldots(Ex - B_s). \qquad (2.43)$$

Переходячи в рівності (2.43) до визначників, одержуємо розклад характеристичного многочлена $\Delta(x)$ матриці (2.42) на унітальні множники, кожен з яких має степінь n:

$$\Delta(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_s(x), \qquad (2.44)$$

де

$$\varphi_i(x) = \det(Ex - B_i),\ i = 1, 2, \ldots, s.$$

Означення 2.2. Розклад (2.43) поліноміальної матриці (2.42) з характеристичним многочленом $\Delta(x)$ будемо називати *паралельним* розкладові (2.44).

Означення 2.3. Поліноміальні матриці вигляду

$$A_i(x) = A_*(x)\begin{Vmatrix} E & Ex & \ldots & Ex^i \end{Vmatrix},\ i = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (2.45)$$

де $A_*(x)$ – взаємна матриця поліноміальної матриці $A(x)$, будемо називати *супутніми поліноміальними матрицями* матричного многочлена (2.42).

Згідно з введеним означенням, при $i=0$ маємо

$$A_0(x) = A_*(x)\,.$$

Лема 2.10. *Нехай для* (2.42) *задано розклад на унітальні співмножники*

$$A(x) = F(x)G(x)\,,$$

де – $F(x)$ *має степінь* r, $0 \le r \le s-2$.

Припустимо далі, що многочлен $\det G(x)$ *має такий унітальний дільник* $\varphi(x)$, *що*

$$\operatorname{rang} M_{A_r(x)}[(\det F(x))\varphi(x)] = n(r+1)\,. \tag{2.46}$$

Тоді для $A(x)$ *існує розклад*

$$A(x) = F(x)(Ex-B)G(x)\,,$$

де

$$\det(Ex-B) = \varphi(x)\,.$$

Д о в е д е н н я. Згідно з теоремою 2.2 досить показати, що

$$\operatorname{rang} M_{G_*(x)}(\varphi) = n\,.$$

Припустимо, що це не так, тобто що ранг зліва менший, ніж n. Тоді, з врахуванням твердження 2.7 існує така неособлива матриця L над $\mathbb{C}$, що в матриці $G_*(x)L$ деякий стовпець складається з елементів, що діляться на $\varphi(x)$. Покажемо, що тоді знайдеться така неособлива матриця H над $\mathbb{C}$, що в матриці $A_{r(x)}H$ всі елементи деякого стовпця будуть ділитися на $(\det F(x))\varphi(x)$, що згідно з згаданим вище твердженням 2.7, буде суперечити припущенню (2.46).

Нехай

$$F(x) = Ex^r + F_1 x^{r-1} + \cdots + F_r .$$

Покладемо

$$H = \begin{Vmatrix} E & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & F_r L \\ \mathbf{0} & E & \dots & \mathbf{0} & F_{r-1} L \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & E & F_1 L \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & L \end{Vmatrix}.$$

Тоді

$$A_r(x)H = A_*(x)\begin{Vmatrix} E & Ex & \dots & Ex^r \end{Vmatrix} H =$$

$$= A_*(x)\begin{Vmatrix} E & Ex & \dots & Ex^{r-1} & F(x)L \end{Vmatrix} =$$

$$= \begin{Vmatrix} A_*(x) & xA_*(x) & \dots & x^{r-1}A_*(x) & G_*(x)L\det F(x) \end{Vmatrix}.$$

В матриці $A_r(x)H$ з неособливою матрицею H над $\mathbb{C}$ крайній правий блок містить стовпець, всі елементи якого діляться на $\varphi(x)\det F(x)$, що, як зазначалось вище, суперечить умові леми.

Доведення леми закінчено.

Теорема 2.12. *Нехай для характеристичного многочлена* $\Delta(x)$ *унітальної поліноміальної матриці* $A(x)$ *задано розклад*

$$\Delta(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)\dots\varphi_s(x) \tag{2.47}$$

на унітальні множники, кожний з яких має степінь n. *Якщо для кожного* $r = 0,1,\dots,s-2$ *правильна рівність*

$$\operatorname{rang} M_{A_r(x)}(\varphi_1(x)\cdots\varphi_{r+1}(x)) = n(r+1), \tag{2.48}$$

то для $A(x)$ *правильним є паралельний розкладові* (2.47) *розклад*

$$A(x) = (Ex - B_1)(Ex - B_2)\cdots(Ex - B_s), \tag{2.49}$$

для якого $\det(Ex - B_i) = \varphi_i(x)$ *при всіх* $i = 1, 2, \ldots, s$.

Д о в е д е н н я. Припустимо, що для деякого r, $0 \le r \le s-2$ правильним є розклад

$$A(x) = (Ex - B_1)\cdots(Ex - B_r)G(x),$$

де $\det(Ex - B_i) = \varphi_i(x)$ при всіх $i \le r$. Позначимо добуток лінійних множників у цьому розкладі через $F(x)$ і застосуємо до нього доведену вище лему 2.10, причому за $\varphi(x)$ візьмемо $\varphi_{r+1}(x)$. Рівність (2.48) збігається, очевидно, з умовою (2.46). Отже, для $A(x)$ маємо розклад

$$A(x) = (Ex - B_1)\cdots(Ex - B_r)(Ex - B_{r+1})G_1(x),$$

в якому

$$\det(Ex - B_{r+1}) = \varphi_{r+1}(x).$$

Провівши це міркування для $r = 0, 1, \ldots, s-2$, ми і одержимо розклад (2.49).

2.7. Необхідність умов розкладу на лінійні множники

Аналогічно до того, як у 2.4 було вказано випадки, коли достатні умови виділення лінійного множника є також і необхідними, тут ми також виявимо ті ситуації, в яких достатні умови теореми 2.12 будуть також необхідними. Почнемо з леми.

Лема 2.11. *Нехай для матричного многочлена* $A(x)$ (*не обов'язково регулярного*) *маємо розклад на множники*

$$A(x) = F(x)G(x),$$

де $F(x)$ *– унітальний матричний многочлен степеня* $r \geq 1$. *Якщо многочлени* $\det F(x)$ *і* $\det G(x)$ *– взаємно прості, то*

$$\operatorname{rang} M_{A_{r-1}(x)}(\det F(x)) = nr. \tag{2.50}$$

Д о в е д е н н я. Нагадаємо, що

$$A_{r-1}(x) = A_*(x)\begin{Vmatrix} E & Ex & \dots & Ex^{r-1} \end{Vmatrix}$$

(див. означення 2.3). Припустимо, що ранг матриці, що стоїть у лівій частині рівності (2.50), менший, ніж nr. Тоді, згідно з твердженням 2.7, для деякої неособливої матриці L над $\mathbb{C}$ матриця $A_{r-1}(x)L$ містить стовпець, всі елементи якого діляться на $\det F(x)$, це ж саме буде і для матриці $G(x)A_{r-1}(x)L$, тобто для матриці

$$(\det G(x))F_*(x)\begin{Vmatrix} E & Ex & \dots & Ex^{r-1} \end{Vmatrix}L.$$

Використовуючи тут умову взаємної простоти многочленів $\det F(x)$ і $\det G(x)$ робимо висновок, що деякий стовпець матриці

$$F_*(x)\begin{Vmatrix} E & Ex & \dots & Ex^{r-1} \end{Vmatrix}L \tag{2.51}$$

ділиться на $\det F(x)$. Матриця $F_*(x)$ має степінь $(n-1)r$, тому матриця (2.51) має степінь

$$(n-1)r + (r-1) = nr - 1.$$

З другого боку, $\deg(\det F(x)) = nr$. Тому в матриці (2.51) деякий стовпець складається виключно з нулів. З огляду на неособливість матриці $F_*(x)$ це ж правильно і для матриці

$$\begin{Vmatrix} E & Ex & \ldots & Ex^{r-1} \end{Vmatrix} L.$$

Але останнє означає, що стовпці матриці

$$\begin{Vmatrix} E & Ex & \ldots & Ex^{r-1} \end{Vmatrix}$$

лінійно залежні, над полем $\mathbb{C}$, що в дійсності не так. Одержана суперечність доводить твердження леми.

Теорема 2.13. *Нехай для унітального матричного многочлена $A(x)$ степеня s його характеристичний многочлен $\Delta(x)$ зображується у вигляді добутку*

$$\Delta(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)\ldots\varphi_s(x) \tag{2.52}$$

унітальних співмножників, кожний із яких має степінь n. Якщо многочлени

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_s(x)$$

– попарно взаємно прості, то для існування розкладу

$$A(x) = (Ex - B_1)(Ex - B_2)\cdots(Ex - B_s),$$

паралельного розкладові (2.52) (*тобто такого, що* $\det(Ex - B_i) = \varphi_i(x)$, $1 \le i \le s$) *необхідно і достатньо, щоб для* $r = 0, 1, \ldots, s-2$ *виконувались рівності*

$$\operatorname{rang} M_{A_r(x)}(\varphi_1(x)\cdots\varphi_{r+1}(x)) = n(r+1).$$

Доведення. Досить об'єднати теорему 2.12 і доведену вище лему 2.11.

Доведена нами теорема 2.13 правильна, як ми зараз покажемо, і для більш широкого випадку, коли співмножники

$\varphi_i(x)$ попарно “майже” взаємно прості; в тому сенсі, що всякий корінь α довільної пари многочленів $\varphi_i(x)$ і $\varphi_j(x)$ $(i \neq j)$ міститься в K_{n-1} (тобто $\operatorname{rang} A(\alpha) = n-1$ див. позначення в 2.4). Подана нижче теорема своїми початками має теорему 2.7. Доведемо спочатку таку лему.

Лема 2.12. *Нехай для характеристичного многочлена* $\Delta(x)$ *унітального матричного многочлена* $A(x)$ *задано розклад*

$$\Delta(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)\cdots\varphi_s(x) \tag{2.52}$$

на унітальні співмножники, кожний з яких має степінь n, *причому для довільної пари різних індексів* i *та* j $(1 \le i,\ j \le s)$ *виконується умова*

$$K_{\varphi_i} \cap K_{\varphi_j} \subset K_{n-1}. \tag{2.53}$$

Якщо існує розклад

$$A(x) = (Ex - B_1)(Ex - B_2)\cdots(Ex - B_s),$$

для якого

$$\det(Ex - B_i) = \varphi_i(x),\ i = 1, 2, \ldots, s,$$

то для кожного $r = 0, 1, \ldots, s-2$ *виконується рівність*

$$\operatorname{rang} M_{A_r(x)}(\varphi_1(x)\cdots\varphi_{r+1}(x)) = n(r+1). \tag{2.54}$$

Д о в е д е н н я леми проведемо індукцією по степеню s. При $s = 1$ доводити нема що. Якщо $s = 2$, то твердження леми, тобто правильність рівності (2.54) при $r = 0$, міститься в теоремі 2.7. Нехай $s \ge 3$ і нехай лему вже доведено для унітальних матричних многочленів степеня $s-1$.

Покладемо

$$\overline{A}(x) = (Ex - B_2)\cdots(Ex - B_s).$$

Якщо α – корінь $\varphi_i(x)$ та $\varphi_j(x)$ для $i \geq 2$, $j \geq 2$, $i \neq j$, то, оскільки

$$\operatorname{rang} A(\alpha) = n-1, \ \det \overline{A}(\alpha) = 0$$

і

$$A(\alpha) = (E\alpha - B_1)\overline{A}(\alpha),$$

маємо

$$\operatorname{rang} \overline{A}(\alpha) = n-1.$$

Отже, до матриці $\overline{A}(x)$ можна застосувати індуктивне припущення, а тому

$$\operatorname{rang} M_{\overline{A}_{r-1}(x)}(\varphi_2(x)\cdots\varphi_{r+1}(x)) = nr \qquad (2.55)$$

для всіх $r = 1, 2, \ldots, s-2$.

Згідно з означенням супутніх матриць $A_r(x)$ і матриці значень $M_{G(x)}(\varphi)$ (див. означення 2.1), маємо

$$M_{A_r(x)}(\varphi_1(x)\cdots\varphi_{r+1}(x)) =$$

$$= \left\| M_{A_*(x)}(\varphi_1(x)\ldots\varphi_{r+1}(x)) \quad \ldots \quad M_{A_*(x)x^r}(\varphi_1(x)\ldots\varphi_{r+1}(x)) \right\|. \quad (2.56)$$

Нас цікавить ранг цієї матриці. Виконаємо в цій матриці елементарні перетворення: з кожної виписаної нами вертикальної смуги, починаючи з останньої, віднімемо попередню смугу, помножену на B_1. Перша смуга при цьому залишиться без змін. В $i+1$-й смузі після виконання згаданих вище перетворень буде стояти нова смуга:

$$M_{A_*(x)x^i}(\varphi_1(x)\ldots\varphi_{r+1}(x)) - M_{A_*(x)x^{i-1}}(\varphi_1(x)\ldots\varphi_{r+1}(x))B_1.$$

Згідно з твердженням 2.5 і 2.6 це дорівнює

$$M_{A_*(x)x^{i-1}(Ex-B_1)}(\varphi_1(x)\ldots\varphi_{r+1}(x)).$$

Але

$$A(x)=(Ex-B_1)\bar{A}(x),$$

тому

$$A_*(x)x^{i-1}(Ex-B_1)=\bar{A}_*(x)x^{i-1}\varphi_1(x).$$

Цим для матриці, що нас цікавить, одержано зображення

$$M_{A_r(x)}(\varphi_1(x)\cdots\varphi_{r+1}(x))=$$

$$=\left\| M_{A_*(x)}(\varphi_1(x)\ldots\varphi_{r+1}(x)), \quad M_{\bar{A}_{r-1}(x)\varphi_1(x)}(\varphi_1(x)\ldots\varphi_{r+1}(x)) \right\|.$$

У першій вертикальній смузі останньої матриці (яку ми записали такою, що складається з двох вертикальних смуг, розділених комою) міститься блок $M_{A_*(x)}(\varphi_1)$. Всі рядки з другої смуги, які є продовженням рядків із блоку $M_{A_*(x)}(\varphi_1)$, складаються виключно із нулів. Отже, ранг матриці (2.56) дорівнює

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi_1(x))+\operatorname{rang} M_{\bar{A}(x)\varphi_1(x)}(\varphi_1\cdots\varphi_{r+1}).$$

Перший доданок тут дорівнює n (теорема 2.7). Другий доданок, згідно з твердженням 2.10, дорівнює

$$\operatorname{rang} M_{\bar{A}_{r-1}(x)}(\varphi_2\ldots\varphi_{r+1}),$$

тобто дорівнює nr (див.(2.55)). Таким чином,

$$\operatorname{rang} M_{A_r(x)}(\varphi_1\ldots\varphi_{r+1})=n+nr=n(r+1).$$

Лема доведена.

Теорема 2.14. *Нехай для характеристичного многочлена* $\Delta(x)=\det A(x)$ *унітального матричного многочлена задано розклад*

$$\Delta(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x)\cdots\varphi_s(x) \tag{2.57}$$

на унітальні співмножники, кожний з яких має степінь n, *причому для довільної пари різних індексів* i *та* j, $1\le i$, $j\le s$ *виконується умова,*

$$K_{\varphi_i}\cap K_{\varphi_j}\subset K_{n-1}. \tag{2.58}$$

Тоді для існування розкладу

$$A(x)=(Ex-B_1)(Ex-B_2)\cdots(Ex-B_s),$$

для якого

$$\det(Ex-B_i)=\varphi_i(x),\ i=1,2,\ldots,s,$$

необхідно і достатньо, щоб для кожного $r=0,1,\ldots,s-2$ *виконувалась рівність*

$$\operatorname{rang} M_{A_r(x)}(\varphi_1\cdots\varphi_{r+1})=n(r+1).$$

Доведення випливає з леми 2.12 і теореми 2.13.

При виконанні умови (2.58) теореми 2.14 має місце єдиність розкладу на лінійні множники, паралельного даному розкладові (2.57) для $\Delta(x)$. Докладніше цей факт означає ось що.

Теорема 2.15. *Нехай для* $A(x)$ *виконуються умови теореми* 2.14. *Якщо для* $A(x)$ *маємо два розклади*

$$A(x)=(Ex-B_1)(Ex-B_2)\cdots(Ex-B_s),$$

$$A(x)=(Ex-C_1)(Ex-C_2)\cdots(Ex-C_s),$$

паралельні розкладові (2.57) *для* $\Delta(x)$, *тобто*

$$\det(Ex - B_i) = \det(Ex - C_i) = \varphi_i(x),$$

то

$$B_i = C_i, \ i = 1, 2, \ldots, s.$$

Д о в е д е н н я легко провести індукцією по s, враховуючи теорему 2.7.

2.8. Виділення лінійного множника з кліткововідіагональної матриці

Нехай нам задано клітково-діагональну матрицю

$$A(x) = \begin{Vmatrix} A_1(x) & & & \mathbf{0} \\ & A_2(x) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & A_m(x) \end{Vmatrix}. \qquad (2.59)$$

Якщо з кожної діагональної клітки $A_i(x)$ виділяється лінійний множник $Ex - B_i$, тобто, якщо

$$A_i(x) = (Ex - B_i)C_i(x),$$

то для $A(x)$ маємо лівий лінійний дільник $Ex - B$, де

$$B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_m).$$

Цей очевидний факт, виявляється, допускає обернення, якщо тільки характеристичні многочлени діагональних кліток попарно взаємно прості.

Теорема 2.16. *Якщо характеристичні многочлени*

$$\Delta_1(x), \Delta_2(x), \ldots, \Delta_m(x)$$

діагональних кліток поліноміальної матриці (2.59) *відмінні від нуля і попарно взаємно прості, то кожний лівий унітальний лінійний дільник* $Ex - B$ *має такий же самий клітково-діагональний вигляд*

$$B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, \ldots, B_m),$$

причому $Ex - B_i$ *– лівий дільник* $A_i(x)$, $1 \le i \le m$.

Доведення. Очевидно, що при доведенні досить обмежитися випадком двох діагональних кліток, порядки яких ми позначимо через n_1 і n_2.

Запишемо матрицю B у вигляді кліткової матриці

$$B = \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{Vmatrix},$$

де B_{11} і B_{22} – квадратні клітки порядків, відповідно, n_1 і n_2.

За умовою

$$\begin{Vmatrix} A_1(x) & 0 \\ 0 & A_2(x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Ex - B_{11} & -B_{12} \\ -B_{21} & Ex - B_{22} \end{Vmatrix} G(x). \quad (2.60)$$

Позначимо через $\delta_1(x)$ і $\delta_2(x)$ спільні найбільші дільники мінорів порядків n_1 і n_2 в матрицях

$$\begin{Vmatrix} Ex - B_{11} & -B_{12} \end{Vmatrix}$$

і

$$\begin{Vmatrix} -B_{21} & Ex - B_{22} \end{Vmatrix}$$

відповідно. Тоді, згідно з лемою 2.2, існують такі квадратні поліноміальні матриці $D_1(x)$ і $D_2(x)$ порядків n_1 і n_2 з визначниками $\delta_1(x)$ і $\delta_2(x)$ відповідно, що

$$\left\| Ex - B_{11} \quad -B_{12} \right\| = D_1(x) \left\| G_{11}(x) \quad G_{12}(x) \right\|,$$

$$\left\| -B_{21} \quad Ex - B_{22} \right\| = D_2(x) \left\| G_{21}(x) \quad G_{22}(x) \right\|.$$

З рівності (2.60) випливає, що $D_1(x)$ і $D_2(x)$ є лівими дільниками матриць $A_1(x)$ і $A_2(x)$, відповідно. Покладемо

$$A_1(x) = D_1(x) F_1(x),$$

$$A_2(x) = D_2(x) F_2(x).$$

Після скорочення рівності (2.60) зліва на неособливу матрицю $\operatorname{diag}(D_1(x), D_2(x))$ одержимо

$$\begin{Vmatrix} F_1(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_2(x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} G_{11}(x) & G_{12}(x) \\ G_{21}(x) & G_{22}(x) \end{Vmatrix} G(x). \qquad (2.61)$$

Стверджуємо, що матриця $G(x)$, що стоїть у правій частині останньої рівності як лівий множник, є оборотною поліноміальною матрицею. Очевидно, що $\det G(x)$ є дільником $\det(F_1(x) F_2(x))$ і тому для доведення нашого твердження достатньо показати, що $\det G(\alpha) \neq 0$ для довільного кореня α многочлена $\det(F_1(x) F_2(x))$. Припустимо протилежне, тобто, що $\det G(\alpha) = 0$. Покладемо в рівності (2.61) $x = \alpha$:

$$\begin{Vmatrix} F_1(\alpha) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_2(\alpha) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} G_{11}(\alpha) & G_{12}(\alpha) \\ G_{21}(\alpha) & G_{22}(\alpha) \end{Vmatrix} G(\alpha). \qquad (2.62)$$

Оскільки многочлени $\det F_1(x)$ і $\det F_2(x)$ – взаємно прості, то α є коренем одного (і тільки одного) з цих многочленів. Нехай для визначеності $\det F_2(\alpha)=0$. Тоді $F_1(\alpha)$ – неособлива матриця порядку n_1. З другого боку, ранг матриці

$$\begin{Vmatrix} G_{21}(x) & G_{22}(x) \end{Vmatrix}$$

дорівнює n_2, оскільки в протилежному випадку спільний найбільший дільник усіх мінорів порядку n_2 матриці

$$\begin{Vmatrix} G_{21}(x) & G_{22}(x) \end{Vmatrix}$$

мав би степінь ≥ 1, що суперечить тому, що $\det D_2(x)=\delta_2(x)$. Отже, ранг матриці

$$\begin{Vmatrix} F_1(\alpha) & \mathbf{0} & G_{11}(\alpha) & G_{12}(\alpha) \\ \mathbf{0} & F_2(\alpha) & G_{21}(\alpha) & G_{22}(\alpha) \end{Vmatrix}$$

дорівнює n_1+n_2. Але з огляду на (2.62) і теорему Кронекера-Капеллі, (див. твердження 2.3) ранг матриці $G(\alpha)$ також дорівнює n_1+n_2, а це означає, що $\det G(\alpha)\neq 0$.

Отже, нами доведено, що $\deg(\det G(x))=0$. Співставляючи цей факт із рівностями (2.60) і (2.61), приходимо до висновку, що

$$\deg(\delta_1(x)\delta_2(x))=\deg\det(Ex-B)=n_1+n_2.$$

Але $\deg\delta_1(x)\leq n_1$ і $\deg\delta_2(x)\leq n_2$, оскільки $\delta_1(x)$ і $\delta_2(x)$ є дільниками многочленів $\det(Ex-B_{11})$ і $\det(Ex-B_{22})$ відповідно. Тому $\deg\delta_1(x)=n_1$ і $\deg\delta_2(x)=n_2$, а це означає, що

$$\delta_1(x)=\det(Ex-B_{11}), \qquad \delta_2(x)=\det(Ex-B_{22}).$$

Всі мінори порядку n_1 матриці

$$\begin{Vmatrix} Ex-B_{11} & -B_{12} \end{Vmatrix}$$

діляться на $\delta_1(x)$. Виберемо в матриці $-B_{12}$ довільний стовпець і замінемо цим стовпцем будь-який стовпець матриці $Ex - B_{11}$. Визначник утвореної матриці, з одного боку, є многочленом степеня $< n_1$, з другого – він ділиться на $\delta_1(x)$; отже, цей визначник дорівнює нулеві. Оскільки останній факт правильний незалежно від того, який стовпець матриці $Ex - B_{11}$ ми викидаємо і замість нього ставимо стовпець із $-B_{12}$, то цей вибраний із $-B_{12}$ стовпець обов'язково нульовий. Цим доведемо, що матриця B_{12} – нульова. Аналогічно встановимо, що матриця $-B_{21}$ також нульова, отже

$$B = \operatorname{diag}(B_{11}, B_{22}).$$

Теорема доведена.

Щойно доведена теорема дає можливість будувати приклади поліноміальних матриць, з яких не виділяється лівий лінійний множник. Для цього достатньо побудувати таку матрицю вигляду

$$\begin{Vmatrix} A_1(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2(x) \end{Vmatrix},$$

що многочлени $\det A_1(x)$ і $\det A_2(x)$ – взаємно прості, причому одну з матриць на головній діагоналі, наприклад $A_1(x)$, треба вибрати такою, що з неї не виділяється лівий лінійний множник. Наприклад, з поліноміальної матриці вигляду

$$\begin{Vmatrix} x^m & 1 & & \mathbf{0} \\ 0 & x^m & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathbf{0} & & & B(x) \end{Vmatrix},$$

де $B(x)$ – така довільна поліноміальна матриця, що $\det B(0) \neq 0$, не виділяється лівий регулярний множник, оскільки, враховуючи доведену теорему, лінійний регулярний множник повинен був би виділятися з матриці

$$\begin{Vmatrix} x^m & 1 \\ 0 & x^m \end{Vmatrix},$$

що неможливо (див. теорему 2.7).

Доведена теорема 2.16 дозволяє будувати приклади поліноміальних матриць $A(x)$, характеристичні многочлени яких зображуються розкладами вигляду

$$\Delta(x) = \varphi(x)\Phi(x),$$

де $\varphi(x)$ – унітальний многочлен степеня n, для яких, одначе, не існує відповідних паралельних розкладів.

Приклад. Нехай

$$A(x) = \begin{Vmatrix} A_1(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2(x) \end{Vmatrix}, \tag{2.63}$$

де $A_1(x)$ і $A_2(x)$ – поліноміальні матриці порядку n_1 і n_2 відповідно, причому многочлени $\det A_1(x)$ і $\det A_2(x)$ – взаємно прості, і $\det A_2(x)$ має більше, ніж n_2, коренів (з урахуванням кратності).

Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_2}, \alpha_{n_2+1}$ – довільні корені многочлена $\det A_2(x)$ (серед яких можуть бути і рівні). Доповнимо цю систему коренів $n - n_2 - 1$ коренями многочлена $\det A_1(x)$ (припускаємо, що $\det A_2(x)$ містить $\geq n - n_2 - 1$ коренів) і побудуємо по цьому доповненню многочлен

$$\varphi(x) = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_{n_2})(x-\alpha_{n_2+1})\cdots(x-\alpha_n).$$

Очевидно,

$$\Delta(x) = \varphi(x)\Phi(x), \qquad \deg\varphi(x) = n. \tag{2.64}$$

Якщо б для розкладу характеристичного многочлена $\Delta(x)$ поліноміальної матриці $A(x)$ існував паралельний йому розклад

$$A(x) = (Ex - B)C(x),$$

тобто такий, що $\det(Ex-B) = \varphi(x)$, то, згідно з доведеною теоремою 2.16,

$$A_1(x) = (Ex - B_1)C_1(x),$$

$$A_2(x) = (Ex - B_2)C_2(x),$$

де матриці B_1 і B_2 такі, що

$$B = \begin{Vmatrix} B_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 \end{Vmatrix}.$$

Але тоді, оскільки многочлен $\det(Ex-B_2)$ містить точно n_2 корені, випливало б, що деякий корінь α_i многочлена $\det A_2(x)$ ($\varphi(x)$ містить n_2+1 коренів многочлена $\det A_2(x)$) був би коренем многочлена $\det(Ex-B_1)$, а значить і коренем $\det A_1(x)$, що суперечить взаємній простоті многочленів $\det A_1(x)$ і $\det A_2(x)$.

Зазначимо, що теорема 2.16 не буде правильною, якщо зняти обмеження попарної взаємної простоти характеристичних многочленів діагональних кліток матриці. Покажемо це на такому прикладі.

Приклад. Матриця

$$\begin{Vmatrix} x^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & x^2 \end{Vmatrix},$$

як легко бачити, допускає виділення лінійного регулярного множника, але з блоку

$$\begin{Vmatrix} x^2 & 1 \\ 0 & x^2 \end{Vmatrix}$$

не можна виділити лінійний регулярний множник.

Відзначимо також, що теорему 2.16 не можна поширити на випадок клітково-трикутної матриці вигляду

$$A(x) = \begin{Vmatrix} A_1(x) & * \\ \mathbf{0} & A_2(x) \end{Vmatrix},$$

де многочлени $\det A_1(x)$ і $\det A_2(x)$ – взаємно прості. Про це свідчить такий приклад.

Приклад. Матриця

$$\begin{Vmatrix} x^2 & 1 & 0 \\ 0 & x^2 & 1 \\ 0 & 0 & (x-2)^2 \end{Vmatrix},$$

допускає паралельний розкладові

$$\Delta(x) = x^3 x (x-2)^2$$

розклад з лівим унітальним множником

$$A(x) = (Ex - B)C(x),$$

де

$$\det(Ex - B) = x^3,$$

оскільки $\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(x^3) = 3$ (див.теорему 2.2), де

$$A_*(x) = \begin{Vmatrix} x^2(x-2)^2 & (x-2)^2 & 1 \\ 0 & x^2(x-2)^2 & x^2 \\ 0 & 0 & x^4 \end{Vmatrix},$$

але блок

$$\begin{Vmatrix} x^2 & 1 \\ 0 & x^2 \end{Vmatrix}$$

— нерозкладний (див. теорему 2.7).

2.9. Розклад матричного двочлена в добуток лінійних множників

Застосуємо спочатку деякі з одержаних раніше результатів до питання розкладності матричного двочлена вигляду

$$A(x) = Ex^m - A, \tag{2.65}$$

де A – $n \times n$-матриця над алгебраїчно замкненим полем $\mathbf{F}$ нульової характеристики, в добуток лінійних множників.

Нехай у співвідношенні (2.65) $\det A \neq 0$.

Покладемо

$$\det A(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \cdots (x-\alpha_p)^{k_p}, \tag{2.66}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ – попарно різні ненульові характеристичні числа матриці A,

$$k_1 + k_2 + \dots + k_p = n\ .$$

Відомо, що $k_1, k_2, \dots, k_p$ – порядки кліток, що мають своїми характеристичними числами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ відповідно, в жордановій нормальній формі

$$I = TAT^{-1}, \tag{2.67}$$

(T – перетворююча матриця (див., наприклад, [5], с.165)), тобто

$$I = \operatorname{diag}(I_{k_1}, I_{k_2}, \dots, I_{k_p})\ ,$$

де I_{k_i} – $k_i \times k_i$ -матриця вигляду

$$I_{k_i} = \begin{Vmatrix} \alpha_i & & & * \\ & \alpha_i & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \alpha_i \end{Vmatrix},\ i = 1, 2, \dots, p\ .$$

Нехай далі β_i – будь-яке фіксоване значення $\sqrt[m]{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \dots, p$. Позначимо через $\varphi(x)$ добуток

$$\varphi(x) = (x - \beta_1)^{k_1} \cdots (x - \beta_p)^{k_p}\ .$$

Оскільки, згідно з твердненням 2.9,

$$M_{(Ex^m - I)_*}(\varphi) = \begin{Vmatrix} M_{(Ex^m - I)_*}((x - \beta_1)^{k_1}) \\ \dots \\ M_{(Ex^m - I)_*}((x - \beta_p)^{k_p}) \end{Vmatrix},$$

то, враховуючи вигляд матриці

$$(Ex^m - I)_* = \begin{Vmatrix} (E_{k_1}x - I_{k_1})_* \Delta_1(x) & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & (E_{k_p}x - I_{k_p})_* \Delta_p(x) \end{Vmatrix},$$

де $\Delta_i(x)$ одержується з $\Delta(x) = \det A(x)$ шляхом викреслювання з $\Delta(x)$ множника $(x - \alpha_i)^{k_i}$, $i = 1, 2, \ldots, p$ робимо висновок, що

$$\operatorname{rang} M_{(Ex^m - I)_*}(\varphi) = k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n. \tag{2.68}$$

Згідно з твердженнями 2.8, 2.11 і 2.13 і співвідношеннями (2.65), (2.67) і (2.68), одержуємо

$$\operatorname{rang} M_{A_*(x)}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{T_*^{-1} A(x)_* T_*}(\varphi) =$$
$$= \operatorname{rang} M_{(TA(x)T^{-1})_*}(\varphi) = \operatorname{rang} M_{(Ex^m - I)_*}(\varphi) = n,$$

де T_* і T_*^{-1} – взаємні матриці матриць T і T^{-1} відповідно. Таким чином, враховуючи теорему 2.2, маємо

$$Ex^m - A = (Ex - B)C(x),$$

де $\det(Ex - B) = \varphi(x)$, причому, згідно з теоремою 2.8, матрицю B можна знайти як розв'язок лінійного матричного рівняння вигляду

$$M_{A_*(x)}(\varphi) X = M_{A_*(x)x}(\varphi),$$

де X – невідома $n \times n$-матриця. Отже, нами одержана теорема.

Теорема 2.17. *Якщо матричний двочлен* (2.65) *такий, що* $\det A \neq 0$ *і дільник* $\varphi(x)$ *степеня n характеристичного многочлена* $\Delta(x) = \det A(x)$ *має вигляд,*

$$\varphi(x) = (x - \beta_1)^{k_1} (x - \beta_2)^{k_2} \cdots (x - \beta_p)^{k_p}, \quad k_1 + k_2 + \cdots + k_p = n,$$

де β_i *– будь-яке фіксоване значення* $\sqrt[m]{\alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, p$ (α_i *– попарно різні характеристичні числа матриці* A), *то*

$$Ex^m - A = (Ex - B)C(x), \tag{2.69}$$

причому $\det(Ex - B) = \varphi(x)$ *і матрицю* B *можна знайти як єдиний розв'язок лінійного матричного рівняння вигляду*

$$M_{A_*(x)}(\varphi)X = M_{A_*(x)x}(\varphi), \tag{2.70}$$

де X *– невідома* $n \times n$*-матриця.*

Наслідок 2.4. *Якщо матриця* A *має лише один* (*нетривіальний*) *інваріантний множник* (*або, що те ж саме, всі елементарні дільники матриці* A *– попарно взаємно прості* (*див.*[5] с. 192)), *то матричне рівняння*

$$X^m - A = 0$$

має лише скінченну кількість розв'язків.

Доведення. Якщо матриця A має один нетривіальний інваріантний множник, то кожний корінь α многочлена $\det(Ex - A)$ має властивість: $\operatorname{rang} A(\alpha) = n - 1$. Звідси випливає (див. теорему 2.7), що кожний розв'язок рівняння (2.70) з деяким певним характеристичним многочленом – єдиний. Оскільки множина дільників n-го степеня многочлена $\det A(x)$ скінченна, то цим все доведено.

Зауважимо, що правильність наслідку 2.4 безпосередньо випливає з теореми 2.10.

Очевидно, що запропонований вище спосіб розв'язання матричного рівняння $X^m - A = 0$ може бути застосований лише у випадку, коли шуканий розв'язок з приписаним йому характеристичним многочленом $\varphi(x)$ – єдиний. Знаходження не єдиних розв’язків буде висвітлене пізніше (див.також [5], с.194).

Зазначимо також, що виділення лінійного унітального множника $Ex - B$ з матричного двочлена $Ex^m - A$ рівнозначне розкладові останнього на лінійні множники, оскільки з (2.69) випливає, що

$$Ex^m - A = (Ex - B)(Ex - \xi B) \cdots (Ex - \xi^{m-1} B)\,, \qquad (2.71)$$

де ξ – примітивний корінь степеня m з одиниці.

Якщо у співвідношенні (2.65) матриця A – особлива, то за винятком випадку $\operatorname{rang} A(0) = n - 1$ запропонований вище метод не працює. Для збереження повноти викладення ми сформулюємо у загальному випадку в термінах теорії елементарних дільників (див.[5], с.194) необхідні і достатні умови розкладу матричного двочлена (2.65) в добуток лінійних унітальних множників.

Без обмеження загальності вважатимемо, що

$$A(x) = Ex^m - I\,, \qquad (2.72)$$

I – нормальна жорданова форма вигляду

$$I = \{I_1, I_2, \ldots I_k, H_1, H_2, \ldots, H_t\}\,, \qquad (2.73)$$

де

$$I_i = \lambda_i E_{p_i} + H^{(p_i)},\ \lambda_i \neq 0\,,\ i = 1, 2, \ldots, k\,;$$

$$H_j = H^{(q_j)},\ j = 1, 2, \ldots, t\,,$$

E_{p_i} – одинична (як звичайно) матриця порядку p_i, $H^{(q_j)}$ – матриця порядку q_j вигляду

$$H^{(q_j)} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Згідно з теоремою 2.16 і викладеного вище, щоб матричний двочлен (2.72) (або, що те ж саме, (2.65)) можна було зобразити у вигляді добутку лінійних унітальних множників, необхідно і достатньо, щоб двочлен

$$Ex^m - \{H_1, H_2, \dots, H_t\}, \tag{2.74}$$

де $H_j = H^{(q_j)}$, $j = 1, 2, \dots, t$ можна було зобразити у вигляді добутку лінійних унітальних множників.

Лема 2.13. *Щоб двочлен* (2.74) *можна було зобразити у вигляді добутку лінійних множників, необхідно і достатньо, щоб існувала така оборотна матриця* Q *над* $\mathbf{F}$, *що*

$$Q\{H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \cdots, H^{(q_t)}\}Q^{-1} = J^m, \tag{2.75}$$

де J – *деяка нормальна жорданова форма.*

Необхідність. Якщо матричний двочлен (2.74) можна зобразити у вигляді добутку лінійних множників, то, враховуючи (2.71), переконуємося в існуванні такої матриці B, що

$$\{H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \dots, H^{(q_t)}\} = B^m.$$

Якщо через J позначити нормальну жорданову форму матриці B з перетворюючою матрицею Q, то одержимо

$$Ex^m - Q\{H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \dots, H^{(q_t)}\}Q^{-1} = Ex^m - QB^mQ^{-1} = Ex^m - J^m.$$

Із останнього співвідношення випливає (2.75).

Достатність. Якщо має місце співвідношення (2.75), то, позначивши $Q^{-1}JQ = B$ і враховуючи, що

$$\left\{H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \ldots, H^{(q_t)}\right\} = Q^{-1}J^{m}Q,$$

одержимо

$$Ex^m - \left\{H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \ldots, H^{(q_t)}\right\} = (Ex - B)(Ex - B\xi)\cdots(Ex - B\xi^{m-1}),$$

де ξ – примітивний корінь із одиниці.

Лема 2.14. *Для існування такої неособливої матриці* Q *над полем* $\mathbf{F}$*, що*

$$Q\left\{H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \ldots, H^{(q_t)}\right\}Q^{-1} = J^{m}, \tag{2.76}$$

необхідно і достатньо, щоб система елементарних дільників матриці

$$\left\{H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \ldots, H^{(q_t)}\right\}$$

складалася лише з підсистем, які містять або тільки елементарні дільники першого степеня, або m *елементарних дільників, показники степенів яких або рівні, або відрізняються на одиницю.*

Необхідність. Без обмеження загальності можна вважати, що матриця J у співвідношенні (2.76) має вигляд

$$J = \left\{H^{(s_1)}, H^{(s_2)}, \ldots, H^{(s_l)}\right\}.$$

Тоді

$$J^{m} = \left\{[H^{(s_1)}]^{m}, [H^{(s_2)}]^{m}, \ldots, [H^{(s_l)}]^{m}\right\}.$$

Знайдемо елементарні дільники матриці $[H^{(s_i)}]^m$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Запишемо характеристичну матрицю для $[H^{(s_i)}]^m$.

Матимемо

$$Ey - [H^{(s_i)}]^m = \begin{array}{c} \overbrace{}^{m} \overbrace{}^{s_i - m} \\ \left\| \begin{matrix} y & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & y & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & y & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & y & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & y \end{matrix} \right\| \end{array}. \qquad (2.77)$$

Якщо $m \geq s_i$, то матриця (2.77) має s_i елементарних дільників першого степеня. Якщо ж $m < s_i$, то матриця (2.77) має, очевидно, m елементарних дільників. У цьому випадку

$$s_i = mk + l, \; l < m \qquad (2.78)$$

і матрицю (2.77) можна записати у вигляді

$$Ey - [H^{(s_i)}]^m = \left\| \begin{matrix} E_m y & E_m & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & E_m y & E_m & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & E_m y & E_m & \mathbf{0} \\ & & k & & & E_m y & S \\ \mathbf{0} & & & & & & E_l y \end{matrix} \right\|, \qquad (2.79)$$

де E_m, E_l – одиничні матриці порядків m і l, відповідно; S – $(m \times l)$-матриця вигляду

$$S = \begin{Vmatrix} E_l \\ \mathbf{0} \end{Vmatrix}.$$

Нульові блоки матриці (2.79) – це $m \times m$-матриці, за винятком останнього стовпчика, де нульовими блоками є $m \times l$-матриці. Очевидно, що кількість блоків вигляду $E_m y$, що знаходяться на головній діагоналі матриці (2.79), дорівнює k, де k взяте із співвідношення (2.78).

Віднімемо перший блочний рядок матриці (2.79), помножений на y, від другого блочного рядка, що рівносильно множенню деякої оборотної матриці $R_1(y)$ над $\mathbf{F}[y]$ на матрицю (2.79) зліва. Віднімемо другий блочний рядок матриці $R_1(y)(Ey-[H^{(s_i)}]^m)$, помножений на y, від третього блочного рядка цієї матриці, що рівносильно множенню деякої оборотної матриці $R_2(y)$ над $\mathbf{F}[y]$ на матрицю $R_1(y)(Ey-[H^{(s_i)}]^m)$ зліва. Віднімемо третій блочний рядок матриці $R_2(y)R_1(y)(Ey-[H^{(s_i)}]^m)$, помножений на y, від четвертого блочного рядка цієї матриці, що еквівалентно множенню деякої оборотної матриці $R_3(y)$ над $\mathbf{F}[y]$ зліва на матрицю, і т.д. Нарешті, віднімемо $k-1$-й блочний рядок в матриці

$$R_{k-2}(y) \cdots R_2(y)R_1(y)(Ey-[H^{(s_i)}]^m),$$

помножений на y, від k-го блочного рядка, що еквівалентно множенню деякої оборотної матриці $R_{k-1}(y)$ над $\mathbf{F}[y]$ на цю матрицю зліва. В результаті одержимо, враховуючи будову S, матрицю вигляду

$$R_{k-1}(y)R_{k-2}(y)\cdots R_1(y)(Ey-[H^{(s_i)}]^m)=$$

$$=\left\|\begin{matrix} E_m y & E_m & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ E_m y^2 & \mathbf{0} & E_m & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ E_m y^3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ E_m y^{n-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & E_m & \mathbf{0} \\ E_m y^n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & S \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E_l y \end{matrix}\right\|. \qquad (2.80)$$

Нагадаємо, що матриця S має вигляд

$$S=\left\|\begin{matrix} E_l \\ \left.\begin{matrix}\mathbf{0}\\ \vdots \\ \mathbf{0}\end{matrix}\right\} m-l \end{matrix}\right\|.$$

Помножимо тепер перші l рядків другого (знизу) блочного рядка матриці (2.80) на y і віднімемо їх від останнього блочного рядка матриці (2.80), що еквівалентно множенню деякої оборотної матриці $R_k(y)$ над $\mathbf{F}[y]$ зліва на матрицю (2.80). Одержимо матрицю

$$R_k(y)R_{k-1}(y)\cdots R_1(y)(Ey-[H^{(s_i)}]^m)=$$

$$=\left\|\begin{matrix} E_m y & E_m & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ E_m y^2 & \mathbf{0} & E_m & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ E_m y^3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ E_m y^{k-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & E_m & \mathbf{0}\\ E_m y^k & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & S\\ E_m y^{k+1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{matrix}\right\| . \qquad (2.81)$$

Помноживши тепер другий блочний стовпець на y, третій блочний стовпець на y^2 і т.д., $k-1$-й блочний стовпець на y^{k-1}, k-й блочний стовпець на y^k матриці (2.81) і віднімаючи так одержані блочні стовпці від першого блочного стовпця цієї матриці, що еквівалентно множенню деякої оборотної матриці $S_1(y)$ над $\mathbf{F}[y]$ справа на матрицю (2.81), і переставляючи стовпці так утвореної матриці, переконаємося в існуванні таких оборотних матриць $R(y)$ і $S(y)$ над $\mathbf{F}[y]$, що

$$R(y)(Ey-[H^{(s_i)}]^m)S(y)=$$

$$=\left\|\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} E_m & & \\ & \ddots & \\ & & E_m \end{matrix}}_{k-1} & & & \mathbf{0} \\ & E_l & & \\ & & E_{m-l}\,y^k & \\ \mathbf{0} & & & E_l\,y^{k+1} \end{matrix}\right\|, \qquad (2.82)$$

де

$$R(y)=R_k(y)R_{k-1}(y)\cdots R_2(y)R_1(y)\,.$$

Враховуючи вигляд матриці (2.82), робимо висновок, що матриця $Ey-[H^{(s_i)}]^m$ має $m-l+l=m$ елементарних дільників, показники степенів яких або рівні ($l=0$), або відрізняються на одиницю ($l \neq 0$), причому у випадку $l \neq 0$ елементарні дільники мають степінь $k+1$, де число k взяте із співвідношення (2.78).

Легко бачити з наведених міркувань тут побіжно одержана така теорема про розщеплення елементарних дільників (див. [5]) у випадку довільного поля $\mathbf{F}$.

Теорема 2.18. *При піднесенні нільпотентної матриці* (*над полем* $\mathbf{F}$) *до* m*-го степеня її елементарні дільники* y^i ($i>m$) *"розщепляються" на* m *елементарних дільників, степені яких або рівні, або відрізняються на одиницю, а елементарні дільники* y^i ($i \leq m$) *розщепляються на лінійні.*

Згідно з викладеним вище, система елементарних дільників матраці $[H^{(s_i)}]^m$ складається або з елементарних дільників першого степеня, або з m елементарних дільників, показники степенів яких або рівні, або відрізняються на одиницю. Таким чином, система елементарних дільників матриці J^m**,** або, що те ж саме, система елементарних дільників матриці

$$\left\{H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \ldots, H^{(q_t)}\right\}$$

складається лише із підсистем, які вимагаються умовою леми.

Достатність. Якщо умови леми виконані, то існує така оборотна матриця T над $\mathbf{F}$, що

$$T\left\{H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \ldots, H^{(q_t)}\right\}T^{-1}=\left\{L^{(v_1)}, L^{(v_2)}, \ldots, L^{(v_l)}\right\}, \quad (2.83)$$

де система елементарних дільників кожної $v_i \times v_i$-підматриці $L^{(v_i)}$ складається або з елементарних дільників першого степеня, або з m елементарних дільників, показники степенів яких або рівні, або відрізняються на одиницю. Віднесемо тепер кожній такій системі елементарних дільників підматриці $L^{(v_i)}$, $i = 1, 2, \ldots, l$ матрицю $[H^{(v_i)}]^m$. Одержимо

$$Q\left\{L^{(v_1)}, L^{(v_2)}, \ldots, L^{(v_l)}\right\}Q^{-1} = \left\{[H^{(v_1)}]^m, [H^{(v_2)}]^m, \ldots, [H^{(v_l)}]^m\right\},$$

або, згідно з (2.83),

$$QT\left\{H^{(q_1)}, H^{(q_2)}, \ldots, H^{(q_t)}\right\}T^{-1}Q^{-1} = \left\{H^{(v_1)}, H^{(v_2)}, \ldots, H^{(v_m)}\right\}^m.$$

Цим лема 2.14 доведена.

Теорема 2.19. *Щоб матричний двочлен $Ex^m - H$, де H – нільпотентна матриця над полем, можна було зобразити у вигляді добутку лінійних регулярних множників, необхідно і достатньо, щоб система елементарних дільників матриці H складалася лише з підсистем, які містять або елементарні дільники тільки першого степеня, або m елементарних дільників, показники степенів яких або рівні, або відрізняються на одиницю.*

Доведення випливає з лем 2.13 і 2.14.

Теорема 2.20. *Щоб матричний двочлен $Ex^m - A$ (A – $n \times n$ – матриця над полем $\mathbf{F}$) можна було розкласти на лінійні унітальні множники, необхідно і достатньо, щоб система елементарних дільників матриці A, що відповідає нульовому характеристичному числу, складалась лише з підсистем, які містять або елементарні дільники тільки першого степеня, або m елементарних дільників, показники степенів яких або рівні, або відрізняються на одиницю.*

Доведення випливає із співвідношення (2.72) теореми 2.16 і теореми 2.19.

Зауваження. Із попередніх міркувань випливає, що теорема 2.20 також правильна, якщо матриця A задана над алгебраїчно замкненим полем, характеристика якого не ділить числа m.

2.10. Розклад матричного двочлена на лінійні множники (продовження)

Тут досліджується питання розкладу матричного двочлена (2.65) на лінійні унітальні множники у випадку, коли характеристика алгебраїчно замкненого поля $\mathbf{F}$ ділить показник степеня m матричного двочлена.

Нехай $m = p^f k$, $(k, p) = 1$. У цьому випадку правильна така теорема.

Теорема 2.21. *Щоб матричний двочлен* $A(x) = Ex^m - A$ (A — $n \times n$*-матриця над полем* $\mathbf{F}$) *можна було зобразити у вигляді добутку лінійних унітальних множників, необхідно і достатньо, щоб кожна система елементарних дільників, яка відповідає довільному характеристичному числу* $\lambda_i \neq 0$ *матриці* A, *складалася лише з підсистем, які містять або елементарні дільники першого степеня, або* p^f *елементарних дільників, показники степенів яких рівні або відрізняються на одиницю, а система елементарних дільників, що відповідає нульовому характеристичному числу, складалася лише з підсистем, які або містять тільки елементарні дільники першого степеня, або* m *елементарних дільників, показники степенів яких або рівні, або відрізняються на одиницю.*

Н е о б х і д н і с т ь. Нехай $m = p^f k$, $(k, p) = 1$ і $Ex^m - A$ зображений у вигляді добутку лінійних унітальних многочленів. Тоді двочлен

$$T^{-1}[E(x^k)^{p^f} - A]T = E(x^k)^{p^f} - \{J_1, J_2\},$$

де J_2 – нільпотентна матриця, $\det J_1 \neq 0$, можна розкласти на лінійні унітальні множники, звідки, згідно з теоремою 2.16, випливає розкладність у цьому сенсі двочленів

$$E(x^k)^{p^f} - J_1 \quad \text{і} \quad E(x^k)^{p^f} - J_2 .$$

Зробимо в $E(x^k)^{p^f} - J_1$ заміну $x^k = y$, одержимо $Ey^{p^f} - J_1$. Без обмеження загальності можна вважати, що

$$J_1 = \{\lambda_1 E_{p_1} + H^{(p_1)}, \lambda_1 E_{s_1} + H^{(s_1)}, \ldots$$
$$\ldots, \lambda_1 E_{r_1} + H^{(r_1)}, \lambda_2 E_{p_2} + H^{(p_2)}, \lambda_2 E_{s_2} + H^{(s_2)}, \ldots, \lambda_2 E_{r_2} + H^{(r_2)}, \ldots$$
$$\ldots, \lambda_t E_{p_t} + H^{(p_t)}, \lambda_t E_{s_t} + H^{(s_t)}, \ldots, \lambda_t E_{r_t} + H^{(r_t)}\}.$$

Тоді $Ey^{p^f} - J_1$ можна записати:

$$\{E_{l_1}, E_{l_2}, \ldots, E_{l_t}\} y^{p^f} - \{\lambda_1 E_{l_1} + L_1, \lambda_2 E_{l_2} + L_2, \ldots, \lambda_t E_{l_t} + L_t\},$$

де

$$l_i = p_i + s_i + \cdots + r_i, \; L_i = \{H^{(p_i)}, H^{(s_i)}, \ldots, H^{(r_i)}\}$$

або

$$\{(y^{p^f} - \lambda_1)E_{l_1}, (y^{p^f} - \lambda_2)E_{l_2}, \ldots, (y^{p^f} - \lambda_t)E_{l_t}\} - \{L_1, \ldots, L_t\}. \quad (2.84)$$

Враховуючи, що в полі характеристики p правильною є рівність

$$y^{p^f} - \lambda_i = (y - \sqrt[p^f]{\lambda_i}),$$

замінимо в кожному блоці

$$E_{l_i}(y^{p^f} - \lambda_i) - L_i, \; i = 1, 2, \ldots, t$$

клітково-діагональної матриці (2.84) y на $z+\sqrt[p^f]{\lambda_i}$), одержимо

$$E_{l_i} z^{p^f} - L_i,\ i = 1, 2, \ldots, t. \tag{2.85}$$

Із розкладності на лінійні множники (2.84) випливає розкладність кожного блоку (2.85) зокрема. З нільпотентності L_i, $i = 1, 2, \ldots, t$, на основі теореми 2.18 випливає, що система елементарних дільників кожної матриці L_i складається лише з підсистем, які або містять тільки елементарні дільники першого степеня, або p^f елементарних дільників, показники степенів яких або рівні, або відрізняються на одиницю.

Із розкладності $Ex^m - J_2$ на лінійні унітальні множники, згідно з теоремою 2.18, випливає необхідність умови теореми 2.21 для випадку нульового характеристичного числа.

Достатність. Питання розкладу двочлена $Ex^m - A$ зводиться до розкладу в добуток лінійних унітальних множників двочленів $Ex^m - J_1$ і $Ex^m - J_2$ кожного зокрема.

Розкладність двочлена $Ex^m - J_2$ (J_2 – нільпотентна матриця) випливає з теореми 2.18. Матричний двочлен $Ex^m - J_1$ запишемо у вигляді

$$Ex^m - J_1 = E(x^k)^{p^f} - J_1 = Ey^{p^f} - J_1. \tag{2.86}$$

Як і при доведенні необхідності, будемо розглядати клітково-діагональну матрицю з діагональними блоками вигляду

$$E_{l_i} z^{p^f} - L_i,\ i = 1, 2, \ldots, t.$$

Нагадаємо, що L_i – нільпотентна матриця вигляду

$$L_i = \{H^{(p_i)}, H^{(s_i)}, \ldots, H^{(r_i)}\}.$$

Система елементарних дільників матриці L_i (позначимо її через $\{z_i\}$) відповідає множині елементарних дільників $\{y^{p^f} - \lambda_i\}$ матриці A, таким чином (на основі подібності) також складається лише із підсистем, що вимагаються в умові теореми. Звідси на основі теореми 2.18 кожний матричний двочлен $E_{l_i} z^{p^f} - L_i$ розкладається на лінійні відносно z унітальні множники. Отже,

$$Ey^{p^f} - J_i = \prod_{i=1}^{p^f} (Ey - B_i) .$$

Розглянемо двочлен

$$(Ey_i - B_i) ,\ i = 1, 2, \dots, p^f ,\ \det B \neq 0 .$$

Оскільки характеристика поля взаємно проста з k , то, (див. 2.9),

$$(Ey - B_i) = (Ex^k - B_i) = \prod_{j=1}^{k} (Ex - M_{ij}) ,$$

тобто $Ex^m - J_1$ розкладається в добуток унітальних лінійних множників. Теорема доведена.

2.11. До розкладу матричного двочлена на множники

Тут ми покажемо, що існують матричні двочлени вигляду

$$Ex^m - A ,\ m \geq 2 ,$$

де A – $n \times n$-матриця ($n \geq 2$) над алгебраїчно замкненим полем $\mathbf{F}$, які не можна зобразити у вигляді добутку двох регулярних множників.

Доведемо спочатку таку теорему. Нехай Λ – асоціативне кільце з одиницею, $\Lambda[x]$ – кільце многочленів над Λ, $ax = xa$, $a \in \Lambda$.

Теорема 2.22. *Якщо*

$$x^m + a = \varphi(x)\psi(x),\ a \in \Lambda, \tag{2.87}$$

де $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – *унітальні многочлени з* $\Lambda[x]$, *тобто многочлени вигляду*

$$\varphi(x) = x^r + b_1 x^{r-1} + \cdots + b_{r-1}x + b_r,$$

$$\psi(x) = x^s + c_1 x^{s-1} + \cdots + c_{s-1}x + c_s,$$

$b_i, c_j \in \Lambda$, *то* $\varphi(x)\psi(x) = \psi(x)\varphi(x)$.

Д о в е д е н н я. Розглянемо кільце матриць Λ_m порядку m над Λ. Матриці вигляду

$$\begin{Vmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & 1 \end{Vmatrix}$$

утворюють групу $T(m, \Lambda)$ відносно матричного множення (див., наприклад, [32], с. 179). Згідно із співвідношенням (2.87) маємо

$$\sum_{i+j=k} b_i c_j = 0,\ k = 1, 2, \ldots, m-1,$$

$$b_r c_s = a,\ b_i = 0,\ i > r,$$

$$b_0 = c_0 = 1,\ c_j = 0,\ j > s.$$

Розглянемо добуток матриць із $T(m, \Lambda)$:

$$\begin{Vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \dots & b_r & & \mathbf{0} \\ & 1 & b_1 & b_2 & \dots & b_r & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 1 & b_1 & b_2 & \dots & b_r \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & 1 & b_1 \\ \mathbf{0} & & & & & & 1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 1 & c_1 & c_2 & \dots & c_s & & \mathbf{0} \\ & 1 & c_1 & c_2 & \dots & c_s & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & 1 & c_1 & c_2 & \dots & c_s \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & 1 & c_1 \\ \mathbf{0} & & & & & & 1 \end{Vmatrix} = E\,.$$

Ці матриці комутують. Звідси випливає, що

$$\psi(x)\varphi(x) = x^m + a_1\,,\ a_1 \in \Lambda\,.$$

Залишилось довести, що $a_1 = a$.

Розглянемо аналогічні матриці B і C порядків $m+1$. Тоді

$$BC = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix},\ CB = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

де $a = b_r c_s$, $a_1 = c_s b_r$.

Матриця BC лежить в центрі групи $T(m+1, \Lambda)$:

$$BC(BC)^{-1} = E\,. \tag{2.88}$$

Оскільки $(BC)^{-1}$ лежить також в центрі групи $T(m+1, \Lambda)$, то $B(BC)^{-1}C = E$. Звідси

$$(BC)^{-1}CB = E\,. \tag{2.89}$$

Порівнюючи (2.88) і (2.89), бачимо, що $BC = CB$. Звідси випливає, що $a_1 = a$, що треба було довести.

Наслідок 2.5. *Якщо матричний двочлен* $Ex^m + A$ *можна зобразити у вигляді добутку двох унітальних многочленів, то ці многочлени комутують.*

Наслідок 2.6. *Якщо матричний двочлен* $Ex^m + A$, *де* A *–* $n \times n$*-матриця над алгебраїчно замкненим полем, можна розкласти на два регулярних множники, один з яких допускає виділення лінійного унітального множника, то матричний двочлен, що розглядається, розкладається на лінійні множники.*

Д о в е д е н н я. Переставивши на основі наслідку 2.5 регулярний множник, що допускає виділення лінійного унітального множника, на перше (зліва) місце і використовуючи наслідок 2.4 теореми 2.17, переконуємось у правильності нашого твердження.

Теорема 2.23. *Матричний двочлен* $Ex^m + A$, *де* A *– нільпотентна матриця над алгебраїчно замкненим полем* $\mathbf{F}$ *рангу* $n-1$, *не може бути зображений у вигляді добутку двох унітальних множників.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що всупереч нашому твердженню

$$Ex^m + A =$$

$$= (Ex^s + A_1x^{s-1} + \cdots + A_s)(Ex^{m-s} + B_1x^{m-s-1} + \cdots + B_{m-s}). \qquad (2.90)$$

Оскільки, згідно з наслідком 2.5, унітальні множники у співвідношенні (2.90) комутують, то робимо висновок, що матриці A, A_s, B_{m-s} попарно комутують. Враховуючи, що ранг нільпотентної матриці дорівнює $n-1$, робимо висновок, що комутуючі з нею матриці A_s і B_{m-s} є многочленами від A з коефіцієнтами із $\mathbf{F}$ (див. наприклад, [33], с.22) і тому, враховуючи (2.90), також нільпотентні. Далі, без обмеження загальності, можна вважати, що матриці A, A_s, B_{m-s} мають верхню трикутну форму. На основі співвідношення (2.90) $A_s B_{m-s} = A$. Це означає, що добуток двох (верхніх) трикутних нільпотентних матриць є (верхня) трикутна матриця рангу $n-1$, що неможливо.

Цікаво відзначити, що в розкладі (2.90), де A – нільпотентна матриця рангу, меншого $n-1$, матриці A_s і B_{m-s} не обов'язково мають бути нільпотентними. Це показує такий приклад:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} x^4 - \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} =$$

$$= \left(Ex^2 + \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} x + \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \right) \times$$

$$\times \left(Ex^2 - \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} x + \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \right).$$