РОЗДІЛ 1

ПОЛІНОМІАЛЬНІ МАТРИЦІ ПРОСТОЇ СТРУКТУРИ

1.1. Виділення з поліноміальної матриці лінійного множника простої структури

Нехай $A(x)$ – неособлива поліноміальна матриця над $\mathbb{C}[x]$ і $\Delta(x) = \det A(x)$ – її характеристичний многочлен. Припустимо, що для $\Delta(x)$ зафіксовано розклад на множники

$$\Delta(x) = \varphi(x)\psi(x) \tag{1.1}$$

з унітальним многочленом $\varphi(x)$ степеня n. Приступимо до питання пошуку розкладу

$$A(x) = (Ex - B)D(x), \tag{1.2}$$

паралельного розкладові (1.1). Для цього введемо поняття власного вектора поліноміальної матриці, що узагальнює класичне поняття власного вектора.

Означення 1.1. Нехай α – корінь характеристичного многочлена $\Delta(x)$ поліноміальної матриці $A(x)$. Рядок

$$u = \left\| u_1 \; u_2 \; \ldots \; u_n \right\|$$

для якого $uA(\alpha) = 0$ називається *власним вектором* поліноміальної матриці $A(x)$, що відповідає кореню α. Для стислості вектор u будемо називати також α*-вектором* матриці $A(x)$.

Всі власні вектори матриці $A(x)$, що відповідають фіксованому кореню α многочлена $\Delta(x)$, утворюють, очевидно, підпростір в просторі рядків довжини n. Позначимо цей простір через $L(\alpha)$.

Твердження 1.1. *Розмірність підпростору* $L(\alpha)$ *дорівнює кількості тих елементарних дільників матриці* $A(x)$, *які діляться на* $x-\alpha$.

Доведення. Нехай δ – кількість елементарних дільників матриці $A(x)$, які діляться на $x-\alpha$. Тоді ранг матриці $A(\alpha)$ дорівнює $n-\delta$. Але тоді

$$\dim L(\alpha) = n-(n-\delta) = \delta .$$

Твердження 1.2. *Якщо* $A(x) = A_1(x)A_2(x)$ *і* α, *будучи коренем* $\det A(x)$, *не є коренем* $\det A_2(x)$, *то простори* α*-векторів матриць* $A(x)$ *і* $A_1(x)$ *збігаються.*

Справді, матриця $A_2(x)$ – неособлива, тому умови $uA(\alpha)=0$ і $uA_1(\alpha)=0$ – еквівалентні.

Твердження 1.3. *Якщо матриця* $A(x)$ *має лише один елементарний дільник, який ділиться на* $x-\alpha$ (*тобто* $\delta=1$), *то простір* $L(\alpha)$ *породжується довільним ненульовим рядком матриці* $A_*(\alpha)$, *взаємної для* $A(\alpha)$.

Справді, $A_*(\alpha)\ A(\alpha)=0$, причому $\operatorname{rang} A_*(\alpha) = 1$.

Питання про існування розкладу (1.2) з матрицею B простої структури (тобто подібної до діагональної матриці, див. [5]) пов'язане з тим, наскільки багато матриця $A(x)$ має лінійно незалежних власних векторів. У зв'язку з цим доцільно зауважити, що власні вектори, що відповідають різним власним числам, у випадку поліноміальних матриць не обов'язково є лінійно незалежними. Наприклад, для матриці

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varphi(x) \end{Vmatrix},$$

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_m)$$

маємо

$$L(\alpha_1) = L(\alpha_2) = \cdots = L(\alpha_m)\,.$$

Теорема 1.1. *Щоб для поліноміальної матриці $A(x)$ існував розклад вигляду*

$$A(x) = (Ex - B)D(x),$$

де B – числова матриця простої структури, необхідно і достатньо, щоб матриця $A(x)$ мала n лінійно незалежних власних векторів.

Доведення. Якщо правильним є вказаний в теоремі розклад, то власні вектори матриці B в класичному сенсі (ми тут їх інтерпретуємо як рядки u, для яких $u(E\alpha - B) = 0$, де α – відповідне власне число матриці B) є також власними векторами поліноміальної матриці $A(x)$ в сенсі нашого означення. Оскільки B – матриця простої структури, то для неї, а отже і для $A(x)$ знайдуться n лінійно незалежних власних векторів.

Навпаки, нехай для матриці $A(x)$ ми знайшли n лінійно незалежних власних векторів $u_1, u_2, \ldots, u_n$ і нехай $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – відповідні їм корені многочлена $\Delta(x) = \det A(x)$ (серед яких, ясна річ, можуть бути і такі, що збігаються).

Розглянемо діагональну матрицю $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і неособливу матрицю Q, рядками якої є власні вектори $u_1, u_2, \ldots, u_n$, відповідно, і покладемо $B = Q^{-1}DQ$.

Очевидно, що

$$u_i B = \alpha_i u_i\,, \; 1 \le i \le n\,.$$

Поділимо $A(x)$ на $Ex - B$ з лівою остачею:

$$A(x) = (Ex - B)C(x) + R. \tag{1.3}$$

Оскільки $u_i A(\alpha_i) = 0$ і $u_i(E\alpha_i - B) = 0$, то, покладаючи в рівності (1.3) $x = \alpha_i$ і помноживши її зліва на u_i, одержимо $u_i R = 0$.

Остання рівність правильна для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$, тому внаслідок незалежності рядків u_i маємо рівність $R = 0$. Розклад (1.3) таким чином перетворюється у розклад вигляду (1.2), і теорема 1.1 доведена.

Теорема 1.1 є узагальненням теореми, доведеної П. Ланкастером [42] (див. теорему 3.5, теорему 4.9) на випадок довільної поліноміальної матриці.

Сформулюємо теорему 1.1 дещо в іншій формі.

Теорема 1.2. *Нехай для характеристичного многочлена* $\Delta(x)$ *поліноміальної матриці* $A(x)$ *задано розклад* (1.1) *і нехай*

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_1)^{k_2} \cdots (x - \alpha_m)^{k_m}, \quad k_1 + k_2 \cdots + k_m = n,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *– попарно різні. Щоб для* $A(x)$ *існував розклад вигляду* (1.2)*, в якому* B *– матриця простої структури і для якої*

$$\det(Ex - B) = \varphi(x),$$

необхідно і достатньо, щоб для кожного $i = 1, 2, \ldots, m$ *в просторі* $L(\alpha_i)$ *існував такий підпростір* L_i*, що*

1) $\dim L_i = k_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$;

2) $\dim(L_1 + L_2 + \cdots + L_m) = k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n.$

Зауваження. Якщо множник $Ex - B$ відомий, то $L_1, L_2, \ldots, L_m$ – це не що інше, як повний набір підпросторів власних векторів матриці (що має просту структуру), а тому ці підпростори матрицею B визначаються однозначно. Виявляється, що і, навпаки, ці підпростори однозначно визначають матрицю B. Справді, кожна матриця простої структури власними числами і повним набором підпросторів власних векторів визначається однозначно. Покажемо це. Нехай для матриці B її діагональна форма має вигляд

$$D = \left\| \begin{matrix} \overbrace{\alpha_1 \ \ddots \ \alpha_1}^{k_1} & & & & \mathbf{0} \\ & \overbrace{\alpha_2 \ \ddots \ \alpha_2}^{k_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \overbrace{\alpha_m \ \ddots \ \alpha_m}^{k_m} & \\ \mathbf{0} & & & & \end{matrix} \right\|,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – попарно різні. Якщо в кожному підпросторі $L_1, L_2, \ldots, L_m$ власних векторів вибрати довільний базис і скласти з них матрицю Q (див. доведення теореми 1.1), то матимемо рівність

$$B = Q^{-1} D Q.$$

Для всякої іншої системи базисів, в підпросторах $L_1, L_2, \ldots, L_m$ відповідна матриця Q_1 буде зв'язана з Q співвідношенням

$$Q_1 = \left\| \begin{matrix} T_1 & & & \mathbf{0} \\ & T_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & T_m \end{matrix} \right\| Q,$$

де T_i – неособлива матриця порядку $k_i = \dim L_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Тоді

$$Q_1^{-1} D Q_1 = Q^{-1} D Q = B.$$

Застосовуємо теорему 1.2 до випадку, коли многочлен $\Delta(x)$ не має кратних коренів.

Теорема 1.3. *Якщо характеристичний многочлен $\Delta(x)$ поліноміальної матриці $A(x)$ не має кратних коренів і*

$$\varphi(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n)$$

– його дільник степеня n, то для $A(x)$ правильним є розклад (1.2) *з умовою*

$$\det(Ex - B) = \varphi(x),$$

тоді і тільки тоді, коли розмірність лінійної оболонки

$$\{L(\alpha_1), L(\alpha_2), \ldots, L(\alpha_n)\},$$

натягненої на одновимірні підпростори власних векторів матриці $A(x)$ для коренів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, відповідно, дорівнює n. Якщо остання умова виконана, то B в розкладі (1.2) *єдина* (*для заданого $\varphi(x)$*).

У лінійній алгебрі відома елементарна теорема про лінійну незалежність ненульових власних векторів, що відповідають попарно різним власним числам. При наявності “великої” кількості власних чисел це дає можливість побудувати “багато” лінійно незалежних власних векторів. Вище ми зазначали, що аналогічне твердження вже неправильне для поліноміальних матриць вищих степенів. Все ж правильною є така теорема.

Теорема 1.4. *Нехай поліноміальна матриця $A(x)$ має степінь m і $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – попарно різні карені її характеристичного многочлена $\Delta(x)$. Якщо $k \geq mr$, $r \geq 0$, то*

$$\dim\{L(\alpha_1), L(\alpha_2),\ldots,L(\alpha_n)\} > r+1.$$

Лема 1.1. *Нехай в поліноміальній матриці* $A(x)$ *– спільний найбільший дільник всіх мінорів* r*-го порядку, складених з її перших* r *рядків, не ділиться на* $x-\alpha$ *, але* $\det A(x)$ *ділиться на* $x-\alpha$ *. Тоді існує така неособлива числова матриця* S*, що в матриці* $SA(x)$ *перші* r *рядків такі ж, як і в матриці* $A(x)$*, а (* $r+1$*)-й рядок матриці* $SA(x)$ *ділиться на* $x-\alpha$, $0<r<n$.

Доведення. Розглянемо числову матрицю $A(\alpha)$. За умовою перші її r рядків лінійно незалежні, тоді як всі її рядки лінійно залежні. Але в цьому випадку якийсь із останніх $n-r$ рядків, наприклад $(r+1)$–й, є лінійною комбінацією решти рядків цієї матриці. Тому при множенні матриці $A(\alpha)$ зліва на матрицю вигляду

$$S=\begin{Vmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & \cdots & c_r & 1 & c_{r+2} & \cdots & c_n \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}$$

одержимо матрицю $SA(\alpha)$, ($r+1$)-й рядок якої складається виключно з нулів. А це означає, що всі елементи ($r+1$)-го рядка матриці $SA(\alpha)$ діляться на $x-\alpha$ **.**

Лема доведена.

Доведення теореми 1.4. Припустимо, що для $A(x)$ знайдено таку числову неособливу матрицю S, що в матриці $SA(x)$ перші r рядків діляться відповідно на $(x-\alpha_1)$, $(x-\alpha_2)$, …, $(x-\alpha_r)$. Спільний найбільший дільник $\delta(x)$ всіх мінорів r-го порядку матриці $SA(x)$, складених з її перших рядків, є многочленом степеня $\leq mr$. Тому серед коренів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ знайдеться такий, скажімо α_{r+1}, який не є коренем $\delta(x)$. Згідно з лемою 1.1, існує така неособлива числова матриця S_1, що в $S_1 SA(x)$ перші $r+1$ рядки діляться, відповідно, на $(x-\alpha_1)$, $(x-\alpha_2), \ldots$, $(x-\alpha_r)$, $(x-\alpha_{r+1})$. Позначимо через u_i рядок з одиницею на i-му місці з нулями на решті місць $(1 \leq i \leq r+1)$. Зрозуміло, що $u_i S_1 SA(\alpha_i) = 0$, тобто $u_i S_1 S \in L(\alpha_i)$. Оскільки рядки $u_i S_1 S$, $i = 1, 2, \ldots, r+1$ лінійно незалежні, то теорема 1.4 доведена.

Теорема 1.5. *Нехай $A(x)$ – унітальний матричний многочлен степеня m і $\Delta(x)$ – його характеристичний многочлен степеня mn. Якщо $\Delta(x)$ не має кратних коренів, то $A(x)$ розкладається в добуток унітальних лінійних множників:*

$$A(x) = (Ex - B_1)(Ex - B_2)\cdots(Ex - B_m). \tag{1.4}$$

Доведення. Застосуємо до матриці $A(x)$ теорему 1.4. Оскільки $mn \geq m(n-1)+1$, то для $A(x)$ знайдеться $n-1+1=n$ лінійно незалежних власних векторів. Згідно з теоремою 1.1 для $A(x)$ маємо розклад

$$A(x) = (Ex - B)A_1(x),$$

де $A_1(x)$ – унітальний матричний многочлен. Завершується доведення теореми 1.5 індукцією по степеню m.

Теорема 1.5 (у випадку відсутності кратних коренів) гарантує існування деякого розкладу на лінійні множники. Проте це не означає, що для довільного розкладу

$$\Delta(x) = \varphi_1(x)\cdots\varphi_m(x), \deg\varphi_i(x) = n, 1 \leq i \leq m, \tag{1.5}$$

для $A(x)$ існує паралельний йому розклад вигляду (1.4).

Наприклад, для матриці

$$\begin{Vmatrix} x^2 - 2x & 0 \\ 0 & x^2 - 1 \end{Vmatrix}$$

підпростори $L(0)$ і $L(2)$ збігаються. Тому для цієї матриці не існує розкладу на лінійні множники, паралельного розкладові

$$\Delta(x) = (x^2 - 2x)(x^2 - 1)$$

її характеристичного многочлена $\Delta(x)$. Все ж, як буде показано далі, існують унітальні матриці (характеристичні многочлени яких не мають кратних коренів), що допускають виділення лінійних множників паралельно довільному розкладові вигляду (1.1) їх характеристичного многочлена.

1.2. Розклад матричного многочлена простої структури в добуток лінійних множників

Введемо поняття матричного многочлена простої структури, що узагальнює класичне поняття числової матриці простої структури. Відомо ([5], 3.3 наслідок 2), що числова матриця B має просту структуру тоді і тільки тоді, коли всі елементарні дільники характеристичної матриці $Ex - B$ – лінійні. Враховуючи це, введемо означення.

Означення 1.2. Поліноміальна матриця $A(x)$ називається *поліноміальною матрицею простої структури*, якщо всі її елементарні дільники лінійні.

Зауважимо, що неособлива поліноміальна матриця $A(x)$ має просту структуру тоді і тільки тоді, коли для кожного кореня α її характеристичного многочлена $\Delta(x)$ дефект матриці $A(\alpha)$ дорінює кратності k цього кореня, тобто коли

$$\operatorname{rang} A(\alpha) = n - k . \qquad (1.6)$$

Доведемо теорему, що узагальнює теорему 1.5.

Теорема 1.6. *Унітальний матричний многочлен простої структури $A(x)$ розкладається в добуток лінійних унітальних множників простої отруктури.*

Доведемо спочатку таку лему.

Лема 1.2. *Якщо $A(x)$ – неособлива поліноміальна матриця простої структури і*

$$A(x) = B(x)D(x), \qquad (1.7)$$

де $B(x)$ – довільний дільник матриці $A(x)$, то матриці $B(x)$ і $D(x)$ є матрицями простої структури.

Доведення. Нехай α – довільний корінь характеристичного многочлена $\Delta(x) = \det A(x)$ матриці $A(x)$ і

k – кратність α в многочлені $\det A(x)$,

k_1 – кратність α в многочлені $\det B(x)$,

k_2 – кратність α в многочлені $\det D(x)$.

Очевидно, $k = k_1 + k_2$.

За умовою леми 1.2 $\operatorname{rang} A(\alpha) = n - k$, тобто дефект $A(\alpha) = k$.

Позначимо дефект $B(\alpha) = q_1$, дефект $D(\alpha) = q_2$.

Тоді, оскільки $A(\alpha) = B(\alpha)D(\alpha)$, одержимо

$$q_1 + q_2 \geq k. \qquad (1.8)$$

З іншого боку, якщо

$$q_1 \leq k_1, \quad q_2 \leq k_2 \qquad (1.9)$$

то

$$q_1 + q_2 \leq k_1 + k_2 = k . \qquad (1.10)$$

Порівнюючи нерівності (1.8) і (1.10), бачимо, що $q_1 + q_2 = k$.

Звідси, враховуючи нерівність (1.9), одержуємо, що $q_1 = k_1$, $q_2 = k_2$, тобто дефект $B(\alpha) = k_1$, дефект $D(\alpha) = k_2$. Це, очевидно, означає, що матриці $B(x)$ і $D(x)$ є поліноміальними матрицями простої структури.

Лема доведена.

Зауваження. Зрозуміло, що обернене твердження до леми 1.2 є неправильним, тобто добуток матриць простої структури не обов'язково має бути матрицею простої структури. Це показує простий приклад:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^2 \end{Vmatrix}.$$

Доведемо тепер сформульовану вище теорему 1.6. Нехай

$$A(x) = \begin{Vmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F(x) \end{Vmatrix} D(x), \qquad (1.11)$$

де $F(x)$ – регулярна поліноміальна матриця першого степеня порядку m, $1 \le m \le n$. Покажемо, що, виходячи із співвідношення (1.11), можна знайти таку неособливу числову матрицю Q_1, що правильним є співвідношення

$$Q_1 A(x) = \begin{Vmatrix} E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & F_1(x) \end{Vmatrix} D_1(x),$$

де $F_1(x)$ – регулярна поліноміальна матриця першого степеня порядку $m+1$.

Зауважимо, що в множині коренів многочлена $\det A(x)$ існує такий корінь α_i, що

$$l_i + q_i < k_i \tag{1.12}$$

де k_i – кратність α_i в многочлені $\det A(x)$; l_i – кратність α_i в многочлені $\det F(x)$; q_i – кратність α_i в многочлені $\delta_m(x)$ ($\delta_m(x)$ – спільний найбільший дільник мінорів $m-$ го порядку, складених із останніх m рядків матриці $D(x)$ у співвідношенні (1.11)).

Справді, многочлен $\delta_m(x)\det F(x)$ має не більше, ніж ms коренів (з врахуванням кратності), де s – степінь матричного многочлена $A(x)$.

Тому, якщо позначити через p_i кратність кореня α_i в многочлені $\det D(x)$, де $D(x)$ – другий множник у співвідношенні (1.11), то, очевидно, $q_i < p_i$.

Оскільки $\delta_m(x) \not\equiv 0$, то

$$\operatorname{rang} D_m(\alpha_i) \geq m - q_i,$$

де $D_m(x)$ – підматриця матриці $D(x)$, складена із останніх m рядків матриці $D(x)$. Тому із останніх m рядків другого співмножника $D(x)$ у співвідношенні (1.11) можна вибрати хоча б $m-q_i$ рядків, які при $x=\alpha_i$ лінійно незалежні.

Розглянемо систему рядків матриці $D(x)$, що складається з її перших $n-m$ рядків і вибраних $m-q_i$ рядків підматриці $D_m(x)$. Ця система складається з $n-m+m-q_i = n-q_i$ рядків. Згідно з доведеною вище лемою 1.2, матриця $D(x)$ простої структури, тому

$$\operatorname{rang} D(\alpha_i) = m - p_i.$$

Оскільки $p_i > q_i$, то $n - q_i > n - p_i$. Це, очевидно, означає, що система $n - q_i$ рядків матриці $D(x)$ яку ми розглядаємо, при $x = \alpha$ лінійно залежна, причому підсистема, що складається з $m - q_i$ рядків матриці $D_m(x)$, лінійно незалежна. А це, як легко бачити, означає, що для матриці $A(x)$ існує така неособлива числова матриця Q_1, що правильне співвідношення

$$Q_1 A(x) = \begin{Vmatrix} E & & & & \mathbf{0} \\ & x - \alpha_i & * & \dots & * \\ & 0 & & & \\ & \vdots & & F(x) & \\ \mathbf{0} & 0 & & & \end{Vmatrix} D_1(x).$$

Оскільки порядок m поліноміальної матриці $F(x)$ був довільним числом, меншим ніж n, то, продовжуючи наші міркування, після скінченої кількості кроків, переконаємося в існуванні такої числової неособливої матриці Q, що

$$QA(x) = B(x)D(x),$$

де $B(x)$ – лінійний регулярний множник, тобто

$$A(x) = (Ex - B)\overline{D}\ (x).$$

Решта теореми доводиться індукцією за степенем матричного многочлена $A(x)$ із застосуванням леми 1.2.

1.3. Абсолютна виділеність лінійних множників

У теоремі 1.5 було показано, що регулярний матричний многочлен $A(x)$, характеристичний многочлен якого не має кратних коренів, розкладається на лінійні регулярні множники. Проте там же був наведений простий приклад, який показує, що не для кожного розкладу

$$\Delta(x) = \varphi(x)\psi(x), \quad \deg\varphi(x) = n \qquad (1.13)$$

з унітальним $\varphi(x)$ існує паралельний йому розклад матриці $A(x)$ на множники

$$A(x) = (Ex - B)A_1(x) \qquad (1.14)$$

тобто не завжди із $A(x)$ можна виділити лівий унітальний множник із заздалегідь приписаним характеристичним многочленом. У зв'язку з цим доцільно ввести означення.

Означення 1.3. Кажемо, що регулярний матричний многочлен $A(x)$ має властивість *абсолютної виділеності лівих лінійних множників*, якщо для кожного розкладу (1.13) існує паралельний йому розклад $A(x)$ вигляду (1.14) (для якого $\det(Ex - B) = \varphi(x)$).

Метою цього параграфа є доведення існування регулярних поліноміальних матриць, що мають властивості абсолютної виділеності лівих лінійних множників, і заданий характеристичний многочлен $\Delta(x)$ без кратних коренів.

Теорема 1.3 підказує нам доцільність такого означення.

Означення 1.4. Розглянемо простір рядків довжини n з елементами із фіксованого поля $\mathbf{F}$. Кажемо, що *система одновимірних підпросторів $L_1, L_2, \ldots, L_k$ знаходиться у спільному положенні*, якщо кожна її підсистема, що складається з n підпросторів, лінійно незалежна, тобто якщо кожні n підпросторів із системи, що розглядається, породжують увесь простір.

Якщо матричний многочлен $A(x)$ має попарно різні власні числа, то для кожного кореня α многочлена $\Delta(x) = \det A(x)$ підпростір власних векторів $L(\alpha)$ буде одновимірним. Згідно з теоремою 1.3 поставлена перед нами задача зводиться до побудови таких матричних многочленів з простими власними числами, для яких система одновимірних підпросторів $L(\alpha)$, де α пробігає всі корені $\Delta(x)$, знаходиться у спільному положенні.

Нехай нам задана система

$$\alpha_{ij},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n \tag{1.15}$$

попарно різних чисел із деякого поля $\mathbf{F}$. Існування регулярної поліноміальної матриці $A(x)$ із заданими власними числами (1.15), що має властивість абсолютної виділеності лівих лінійних множників, ми доведемо індукцією по m. Нехай $m \ge 2$ і побудована нами регулярна поліноміальна матриця $A_0(x)$ степеня $m-1$ з характеристичними числами α_{ij}, $1 \le i \le m-1$, $1 \le j \le n$, для якої система підпросторів власних векторів $L(\alpha_{ij})$ знаходиться у спільному положенні. Існування матриці $A_0(x)$ при $m = 2$ очевидно.

Шукатимемо матрицю $A(x)$ у вигляді

$$A(x) = A_0(x)U \left\| \begin{matrix} x-\alpha_{m1} & & & \mathbf{0} \\ & x-\alpha_{m2} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & x-\alpha_{mn} \end{matrix} \right\|,$$

де належним чином підібрана неособлива числова матриця $U = \|u_{ij}\|$.

Очевидно, що підпростори $L(\alpha_{ij})$ при $i < m$ для матриць $A(x)$ і $A_0(x)$ збігаються, а тому знаходяться у спільному положенні. До них ми повинні приєднати підпростори

$$L(\alpha_{m1}), L(\alpha_{m2}), \ \ldots, L(\alpha_{mn})$$

так, щоб розширена система була також у спільному положенні. Це можна забезпечити за рахунок належного вибору елементів матриці U. Зобразимо матрицю U у вигляді сукупності стовпців

$$u_j = \begin{Vmatrix} u_{1j} \\ u_{2j} \\ \vdots \\ u_{nj} \end{Vmatrix}.$$

Підпростір $L(\alpha_{mj})$ збігається з сукупністю розв'язків

$$X = \begin{Vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_n \end{Vmatrix}$$

матричного рівняння

$$XA_0(\alpha_{mj})U \begin{Vmatrix} \alpha_{mj} - \alpha_{m1} & & & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & \alpha_{mj} - \alpha_{mn} \end{Vmatrix} = \mathbf{0},$$

або з введенням позначення $A_0(\alpha_{mj}) = A_j$ матричного рівняння

$$XA_j \begin{Vmatrix} u_1 & \ldots & u_{j-1} & 0 & u_{j+1} & \ldots & u_n \end{Vmatrix} = 0,$$

що рівносильне системі рівнянь

$$XA_j u_i = \mathbf{0}, \qquad i \neq j.$$

З останніх рівностей випливає, що рядок XA_j пропорційний j-му рядку взаємної матриці U_* для матриці U. Отже, підпростір $L(\alpha_{mj})$ збігається з підпростором, натягненим на рядок $u_{*j}A_j^{-1}$, де u_{*j} – j-й рядок взаємної матриці U_* для матриці U.

Ми дивимось на U як на матрицю із змінними елементами u_{ij}, тобто як на матрицю з елементами з кільця многочленів $\mathbf{F}[u_{ij}]$ від n^2 змінних u_{ij}. Елементи взаємної матриці U_* є в такому випадку однорідними ненульовими многочленами від u_{ij} степеня $n-1$. Надаючи для U частинні значення (тобто вибираючи для елементів u_{ij} частинні значення із $\mathbf{F}$), одержуємо цілком визначені частинні значення для взаємної матриці U_*. Із рівності

$$UU_* = E\det U$$

випливає, що якщо U приймає всі неособливі частинні значення, то U_* пробігає також всі неособливі матриці порядку n з елементами із поля $\mathbf{F}$.

Нам необхідно неособливу матрицю U підібрати так, щоб система одновимірних підпросторів $L(\alpha_{ij})$ для всіх $i = 1, 2, \cdots, m$ і $j = 1, 2, \cdots, n$ була в спільному положенні. Виберемо з цієї системи довільним чином n підпросторів, з яких r підпросторів ($1 \le r \le n$) відповідають кореням α_{mj} і які, отже, залежать від параметрів u_{ij}, що відбираються. Для їх лінійної незалежності необхідно і достатньо, щоб визначник, складений з породжуючих ці підпростори рядків, був відмінний від нуля.

Цей визначник, позначимо його через δ, містить $n-r$ лінійно незалежних числових рядів, і тому хоч один з мінорів порядку $n-r$, складений з цих рядків, відмінний від нуля. Інші r рядків – це деякі рядки з системи $u_{*j}A_j^{-1}$. Для простоти запису припустимо, що перші r рядків визначника δ збігаються з

$$\begin{matrix} u_{*1}A_1^{-1} \\ \vdots \\ u_{*1}A_r^{-1} \end{matrix} . \qquad (1.16)$$

Ми хочемо довести, що визначник δ, який залежить від змінних u_{ij}, є ненульовим многочленом від цих змінних (точніше, формою степеня $r(n-1)$).

Оскільки A_i^{-1} – неособлива матриця, ми можемо надати рядкові $u_{*i}A_i^{-1}$ довільне числове значення, вибравши відповідне значення для рядка u_{*i}. Стверджуємо, що для $u_{*1},\ldots,u_{*r}$ можна вибрати такі лінійно незалежні значення, що $r\times n$-матриця (1.16) має тільки один відмінний від нуля мінор порядку r і він займає заздалегідь зазначене положення.

Можливість такого вибору забезпечується такою лемою.

Лема 1.3. *Нехай* $A_1, A_2, \ldots, A_r$ *– неособливі матриці порядку* n, $1 \le r \le n$. *Тоді в підпросторі рядків вигляду*

$$\|\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_r \ 0 \cdots 0\|$$

існує такий базис $Y_1,\ldots,Y_r$, *що рядки* $Y_1A_1,\ldots,Y_rA_r$ *– лінійно незалежні.*

Доведення. Доведемо лему методом індукції. Нехай для $r-1$ неособливих матриць $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$ порядку n в підпросторі рядків вигляду

$$\|\alpha_1 \ \alpha_2 \ \ldots \ \alpha_{r-1} \ 0 \cdots 0\|$$

існує такий базис $Y_1, \ldots, Y_{r-1}$, що рядки $Y_1 A_1, \ldots, Y_{r-1} A_{r-1}$ – лінійно незалежні. Тому що r перших рядків матриці A_r, будучи лінійно незалежні (з огляду на неособливість матриці A_r), не можуть лінійно залежати від системи $Y_1 A_1, \ldots, Y_{r-1} A_{r-1}$, то існує такий рядок вигляду

$$Y_r = \left\| \beta_1 \ \ldots \ \beta_{r-1} \ \beta_r \ 0 \ \cdots \ 0 \right\|$$

з відмінним від нуля елементом β_r, що рядки

$$Y_1 A_1, \ldots, Y_{r-1} A_{r-1}, Y_r A_r$$

лінійно незалежні (можна, зрозуміло, завжди покласти $\beta = 1$). Лему доведено.

Повернемось до системи підпросторів $L(\alpha_{ij})$ і розглянемо будь-які можливі її підсистеми, що складаються з n підпросторів, кожна з яких містить хоча б один підпростір $L(\alpha_{mj})$. З кожною такою підсистемою ми щойно зв'язали ненульовий многочлен $\delta = \delta(u_{ij})$ який має ту властивість, що при виборі для змінних частинних значень з умовою $\det U \neq 0$ і $d \neq 0$ ця система підпросторів породжує увесь простір. Занумеруємо всі так одержані форми δ (степенів $r(n-1)$, $r = 1, 2, \cdots, n$). Одержимо скінчену систему ненульових форм

$$d_1(u_{ij}), \ldots, d_N(u_{ij}), \tag{1.17}$$

яка має, очевидно, таку властивість: якщо для елементів неособливої матриці $U = (u_{ij})$ вибрати частинні значення так, що всі форми (1.17) не перетворюються в нуль, то система одновимірних просторів $L(\alpha_{ij})$ буде в спільному положенні.

Сформулюємо отриманий результат у вигляді теореми.

Теорема 1.7. *Нехай задано систему попарно різних чисел (з довільного поля* $\boldsymbol{F}$ *)* $\alpha_{ij}, 1 \le i \le m, 1 \le j \le n$. *Покладемо* $D_i = \mathrm{diag}(\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{in})$. *Для поліноміальної матриці вигляду*

$$A(x) = (Ex - D_1)U_1(Ex - D_2)U_2 \dots (Ex - D_{m-1})U_{m-1}(Ex - D_m),$$

в якій числові матриці $U_1, \dots, U_{m-1}$ *мають неозначені елементи, існує така скінчена система ненульових форм* $d_1, \dots, d_M$, *що при довільній частинній системі значень з поля* $\boldsymbol{F}$ *для елементів матриць* u_j, *для яких*

$$d_k \ne 0,\ 1 \le k \le M \ \ i\ \det u_j \ne 0,\ 1 \le j \le m-1,$$

поліноміальна матриця $A(x)$ *має властивість абсолютної виділеності лівих лінійних множників.*

Зауваження. Якщо поле $\mathbf{F}$ – нескінченне, то завжди знайдуться частинні значення для елементів матриць u_j, при яких зазначені в теоремі многочлени не перетворюються в нуль. Отже, для нескінченного поля $\mathbf{F}$ завжди існують регулярні матричні многочлени довільного степеня із заданими попарно різними власними числами, які мають властивість абсолютної виділеності лівих лінійних множників.

У зв'язку з поняттям абсолютної виділеності виникає таке питання. Нехай $A(x)$ – регулярний матричний многочлен, що має властивість абсолютної виділеності лівих лінійних множників. Нехай далі

$$A(x) = (Ex - B)A_1(x).$$

Чи буде мати властивість абсолютної виділеності лівих лінійних множників матричний многочлен $A_1(x)$? Відповідь виявляється негативною. Покажемо це на такому прикладі.

Нехай

$$A(x) = \begin{Vmatrix} x+2 & 0 \\ 1 & x-3 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} x(x-1) & 1 \\ 0 & (x+1)(x-2) \end{Vmatrix}.$$

Коренями характеристичного многочлена $\Delta(x) = \det A(x)$ є числа:

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3.$$

Власні вектори, що відповідають цим власним числам, є

$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \end{Vmatrix}$,

$\begin{Vmatrix} 1 & -1 \end{Vmatrix}$,

$\begin{Vmatrix} 7 & -2 \end{Vmatrix}$,

$\begin{Vmatrix} 5 & -3 \end{Vmatrix}$,

$\begin{Vmatrix} 1 & -4 \end{Vmatrix}$,

$\begin{Vmatrix} 1 & -5 \end{Vmatrix}$.

Очевидно, що ці вектори знаходяться у спільному положенні. Це означає, що матриця $A(x)$ має властивість абсолютної виділеності лівих лінійних множників.

Проте для множника

$$\begin{Vmatrix} x(x-1) & 1 \\ 0 & (x+1)(x-2) \end{Vmatrix}$$

не існує лівого лінійного дільника $Ex - B_1$ з характеристичним многочленом

$$\det(Ex - B_1) = (x+1)(x-2).$$

Застосуємо результати цього параграфа до випадку $m = 2$, тобто до випадку регулярних матричних тричленів 2-го степеня. Матриця $A_0(x)$ у цьому випадку дорівнює:

$$A_0(x) = \mathrm{diag}(x-\alpha_1, \ldots, x-\alpha_n)\,.$$

Тут і нижче ми вводимо нові позначення:

$$\alpha_{1i} = \alpha_i\,,\ \alpha_{2i} = \beta_i\,,\ 1 \le i \le n\,.$$

Підпростір $L(\alpha_i)$ породжується, очевидно, рядком

$$\left\| 0 \ldots 1 \ldots 0 \right\|,$$

де одиничний елемент стоїть на i-му місці. Далі

$$A_i = A_0(\beta_i) = \mathrm{diag}(\alpha_1 - \beta_i, \alpha_2 - \beta_i, \ldots, \alpha_n - \beta_i)\,,$$

$$u_{*i} A_i^{-1} = \left\| \frac{u_{i1}^*}{\alpha_1 - \beta_i} \cdots \frac{u_{in}^*}{\alpha_{n1} - \beta_i} \right\|,$$

де u_{ij}^* – елемент i-го рядка j-го стовпця взаємної матриці U_* для матриці $U = \left\| u_{ij} \right\|$. Отже, мінор δ – це один з мінорів матриці

$$\left\| \frac{u_{ij}^*}{\alpha_j - \beta_i} \right\|$$

довільного порядку r, $1 \le r \le n$. Таким чином теорема 1.7 для частинного випадку $m = 2$ дає нам такий результат.

Теорема 1.8. *Нехай* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ *– попарно різні числа,* $U = \left\| u_{ij} \right\|$ *– неособлива матриця. Щоб поліноміальна матриця другого степеня*

$$A(x) = \left\| \begin{matrix} x-\alpha_1 & & & \mathbf{0} \\ & x-\alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & x-\alpha_n \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} u_{11} & u_{12} & \ldots & u_{1n} \\ u_{21} & u_{22} & \ldots & u_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{n1} & u_{n2} & \ldots & u_{nn} \end{matrix} \right\| \times$$

$$\times \begin{Vmatrix} x-\beta_1 & & & \mathbf{0} \\ & x-\beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & x-\beta_n \end{Vmatrix}$$

мала властивість абсолютної виділеності лінійних регулярних множників, необхідно і достатньо, щоб в матриці

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{u_{11}^*}{\beta_1-\alpha_1} & \dfrac{u_{12}^*}{\beta_1-\alpha_2} & \cdots & \dfrac{u_{1n}^*}{\beta_1-\alpha_n} \\ \dfrac{u_{21}^*}{\beta_2-\alpha_1} & \dfrac{u_{22}^*}{\beta_2-\alpha_2} & \cdots & \dfrac{u_{2n}^*}{\beta_2-\alpha_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{u_{n1}^*}{\beta_n-\alpha_1} & \dfrac{u_{n2}^*}{\beta_n-\alpha_2} & \cdots & \dfrac{u_{nn}^*}{\beta_n-\alpha_n} \end{Vmatrix}$$

були відмінними від нуля всі мінори всіх можливих порядків $r=1,\ldots,n$.

Зауваження. В теоремі 1.8, тобто у випадку регулярних матриць 2-го степеня, замість абсолютної виділеності лінійних множників ми могли б говорити про абсолютну розкладність на лінійні множники, розуміючи під цим існування розкладу на лінійні регулярні множники

$$A(x) = (B_0x + B_1)(G_0x + G_1),$$

паралельного довільному розкладові характеристичного многочлена

$$\Delta(x) = \varphi(x)\psi(x)$$

на множники степеня n.